トーラス束と準トーラス束上のSol構造の具体的構成と対合の分類

渕上　美規　(広島大学大学院理学研究科)*

概　　要

アノソフモノドロミーを持つ円周上のトーラス束およびそれを二重被覆にもつ準トーラス束上にはSol構造が入ることが知られている。トーラス束上の対合はSakumaにより，準トーラス束上の自由対合はBarreto-Gonçalves-Vendrúscoloにより分類されている．一方，軌道体定理(orbifold theorem)により，準トーラス束上の対合の分類は，その等長変換群の位数2の元の共役を法とする分類と同値となる．本稿ではSol構造を具体的に構成した後，具体的な例を用いて準トーラス束の等長変換群と準トーラス束上の対合を決定するアルゴリズムについて述べる．

1. トーラス束と準トーラス束の位相的構成

この章ではトーラス束及び準トーラス束の定義を述べ，その関係について述べる．

1.1. トーラス束

$A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ とする．線形同型写像 $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ は部分群 $\mathbb{Z}^2$ を保つので，トーラス $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上の同相写像を誘導する．

定義 1.1. $M_A := T^2 \times \mathbb{R}/(\boldsymbol{x}, t) \sim (A\boldsymbol{x}, t+1)$ をモノドロミーが A である円周上のトーラス束 (torus bundle over the circle with monodromy A) という．

次の定理はPoincaréにより得られていたが，Ghys-Sergiescu [3] により証明が再発見されている．

定理 1.2 (Poincaré)**.** $A,\ A' \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ とする．このとき，M_A と $M_{A'}$ が同相であるための必要十分条件は，A が $GL(2,\mathbb{Z})$ のなかで A' または A'^{-1} と共役であることである．

射影 $T^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続写像 $\pi : M_A \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$ を導き，M_A は π を射影，T^2 をファイバーとする S^1 上のファイバー束の構造をもつ．

1.2. 準トーラス束

定義 1.3. クラインボトル上のひねり I 束とは $[0,1] \times S^1 \times [-1,1]$ において $(0,\theta,s) \sim (1,-\theta,-s)$ という同一視をして得られる空間である．これを記号 KI で表す．

一次元軌道体 $\mathcal{I} := [-1,1]/s \sim -s$ を考えると射影 $\bar{p} : KI \to \mathcal{I}$ により，KI は次の意味で $\mathcal{I}$ 上のトーラスをファイバーとする準ファイバー束とみなせる．

- $s \in [-1,1]$ が代表する $\mathcal{I}$ の元を $[s]$ とすると

$$\bar{p}^{-1}([s]) \cong \begin{cases} \text{トーラス} & (s \neq 0) \\ \text{クラインボトル} & (s = 0) \end{cases}$$

* 〒739-8526 東広島市鏡山一丁目３番１号　広島大学 大学院理学研究科
e-mail: fuchigami.miki.1030@gmail.com

定義 1.4. クラインボトル上のひねり I 束 KI の 2 つのコピーをその境界 $\partial KI \cong T^2$ の同相写像 B で貼り合わせたものを $N_B := KI \underset{B}{\cup} KI$ とする．ここで，

$$\begin{aligned} B : \pi_1(\partial KI) &\to \pi_1(\partial KI) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto (\alpha, \beta)B \end{aligned}$$

とする．

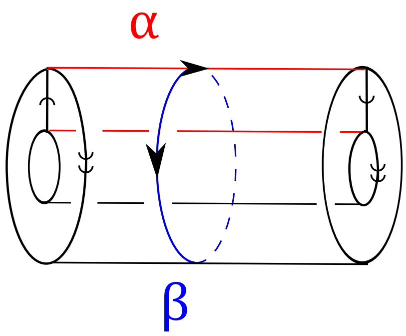


図 1: クラインボトル上のひねり I 束

$p : N_B \to \mathcal{I} \cup \mathcal{I}$ は一次元軌道体 $\mathcal{I} \cup \mathcal{I}$ 上のトーラスをファイバーとする準ファイバー束とみなせる．以下 N_B を**準トーラス束** (torus semi-bundle) と呼ぶ．

準トーラス束の分類定理が森元 [5] により得られている (Hatcher [4] 参照)．

定理 1.5 (森元 [5])**.** B, B' を $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ の元とする．このとき，N_B と $N_{B'}$ が同相であるための必要十分条件は，B' が行列 $\pm B^{\pm 1}, \pm JB^{\pm 1}, \pm B^{\pm 1}J, \pm JB^{\pm 1}J$ のうちの一つであることである．ただし，$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である．

次にトーラス束との関係を述べる．

命題 1.6. $A = JB^{-1}JB$ とする．このとき準トーラス束 N_B はトーラス束 M_A を二重被覆にもつ．

証明. KI は $S^1 \times S^1 \times [-1, 1]$ を二重被覆にもち，その被覆変換群は

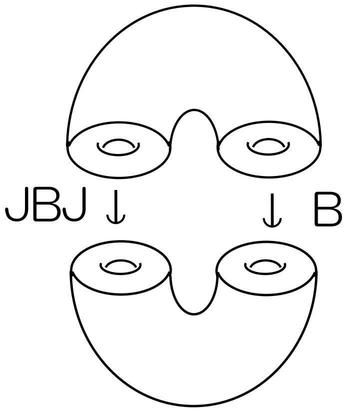
$$\begin{aligned} h : S^1 \times S^1 \times [-1, 1] &\to S^1 \times S^1 \times [-1, 1] \\ (x, y, t) &\mapsto (x + 1/2, -y, -t) \end{aligned}$$

により生成されることに注意する．N_B の二重被覆は $S^1 \times S^1 \times [-1, 1]$ の 2 つのコピーをその境界 $\partial(S^1 \times S^1 \times [-1, 1]) = T^2 \times \{-1, 1\}$ の同相写像で貼り合わせたものである．

図 2 より，N_B の二重被覆 $\widehat{N}_B$ は M_A と同一視される．ただし，$A = (hBh)^{-1}B = hB^{-1}hB = JB^{-1}JB$ である． $\square$

2. トーラス束と準トーラス束上の Sol 構造の具体的構成

$A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ とする．$|\mathrm{Tr}A| \geq 3$ のとき，トーラス束 M_A とそれを二重被覆にもつ準トーラス束上には Sol 構造が入ることが知られている ([7] 参照)．この章ではその Sol 構造を具体的に記述する．



$$\begin{tikzcd}
T^2 \times \{-1\} \arrow[ddddddd, "hBh"'] \arrow[dddrr, "P_-"] & \subset & T^2 \times [-1,1] \arrow[d, "P"] & \supset & T^2 \times \{+1\} \arrow[llll, bend right, "h=J"'] \arrow[dddll, "P_+"', "\cong"] \arrow[ddddddd, "B"] \\
 & & KI & & \\
 & & \cup & & \\
 & & \partial KI \arrow[d, "B"'] & & \\
 & & \partial KI & & \\
 & & \cap & & \\
 & & KI & & \\
T^2 \times \{-1\} \arrow[uuurr, "P_-"'] & \subset & T^2 \times [-1,1] \arrow[u, "P"'] & \supset & T^2 \times \{+1\} \arrow[llll, bend left, "h=J"] \arrow[uuull, "P_+", "\cong"']
\end{tikzcd}$$

図 2: 準トーラス束の二重被覆

2.1. リー群Solと Sol構造

この節ではリー群Solについて述べた後，3次元多様体上にSol構造が入ることの定義を述べる．

リー群Solは，半直積 $\mathbb{R}^2 \rtimes_\phi \mathbb{R}$ で定義される．

$$1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathrm{Sol} \underset{\iota}{\rightleftarrows} \mathbb{R} \longrightarrow 1$$

ここで ϕ とは，

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2)\ ,\ \phi(z) = \begin{pmatrix} e^{-z} & 0 \\ 0 & e^{z} \end{pmatrix}$$

で定義される準同型写像である．

Solと $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ を写像 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathrm{Sol}; (\boldsymbol{x}, z) \mapsto \boldsymbol{x}\iota(z)$ により同一視すると，演算が次で与えられる．

$$(\boldsymbol{x}, z)(\boldsymbol{x}', z') = (\boldsymbol{x} + \phi(z)\boldsymbol{x}',\ z + z')$$

いま，$(\boldsymbol{x}, z) \in \mathrm{Sol}$ を (x, y, z) と書き，Sol 上の左不変リーマン計量 $ds^2 = e^{2z}dx^2 + e^{-2z}dy^2 + dz^2$ を考える．この計量に関する等長変換群 $\mathrm{Isom(Sol)}$ に対して，次の分裂完全列を得る．

$$1 \longrightarrow \mathrm{Sol} \longrightarrow \mathrm{Isom(Sol)} \rightleftarrows \mathcal{D}_4 \longrightarrow 1$$

ここで，$\mathcal{D}_4$(の Isom(Sol) における像) は $\mathbb{R}^3$ 上の次の 8 つの写像からなる二面体群である．

$$(x, y, z) \mapsto (\pm x, \pm y, z), (x, y, z) \mapsto (\pm y, \pm x, -z)$$

定義 2.1. 3次元多様体 M 上にSol**構造が入る**とは，Solの等長変換群の捩れのない離散部分群 Γ で $M \cong \mathrm{Sol}/\Gamma$ を満たすものが存在するときをいう．

3次元多様体 M の普遍被覆を $\widetilde{M}$ で表す．定義 2.1 は，展開写像 $D:\widetilde{M}\to\mathrm{Sol}$ とホロノミー準同型 $\rho:\pi_1(M)\to\mathrm{Isom}(\mathrm{Sol})$ が存在して，D が同相写像でありかつ，任意の $g\in\pi_1(M)$ に対し $DgD^{-1}=\rho(g)$ が成り立つことと同値である．

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M} \arrow[r, "D", "\cong"'] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Sol} \arrow[d, "\rho(g)"] \\ \widetilde{M} \arrow[r, "D", "\cong"'] & \mathrm{Sol} \end{tikzcd}$$

2.2. トーラス束の基本群とその普遍被覆への作用

この節ではトーラス束上に Sol 構造を入れるため，トーラス束の基本群とその普遍被覆への作用についてみる．

トーラス束 M_A の基本群 $\pi_1(M_A)$ は $\mathbb{Z}^2$ と $\mathbb{Z}$ の半直積である．

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \pi_1(T^2) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & \pi_1(M_A) \arrow[r, shift left] & \langle\gamma\rangle \arrow[l, shift left] \arrow[r] & 1 \\ & \mathbb{Z}^2 & & & \end{tikzcd}$$

群表示は

$$\pi_1(M_A)=\langle\ \mathbb{Z}^2,\gamma\mid\gamma\boldsymbol{n}\gamma^{-1}=A\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^2\ \rangle$$

である．

トーラス束 M_A の普遍被覆 $\widetilde{M_A}$ は $\widetilde{T^2}\times\mathbb{R}$ と同相であり，これは $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$ である．$\pi_1(M_A)$ の $\widetilde{M_A}=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$ への作用は次で与えられる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x},t)&=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n},t) \qquad (\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^2)\\ \gamma\cdot(\boldsymbol{x},t)&=(A\boldsymbol{x},t+1) \end{aligned}$$

2.3. トーラス束上の Sol 構造の具体的構成

この節ではトーラス束上の Sol 構造を $\mathrm{Tr}A\geq 3$ と $\mathrm{Tr}A\leq -3$ の場合にわけて構成する．

(1) $\mathrm{Tr}A\geq 3$ のとき．　$\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$ の元 Q であって $QAQ^{-1}=\begin{pmatrix} e^{-\tau} & 0\\ 0 & e^{\tau}\end{pmatrix}$ となるものをとる．展開写像 D とホロノミー準同型 ρ を

$$\begin{aligned} D:\widetilde{M_A}\to\mathrm{Sol}\ ,\ D(\boldsymbol{x},t)=(Q\boldsymbol{x},t\tau)\\ \rho:\pi_1(M_A)\to\mathrm{Isom}(\mathrm{Sol})\ ,\ \rho(\boldsymbol{n})=Q\boldsymbol{n}\in\mathbb{R}^2\ (\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^2)\ ,\ \rho(\gamma)=\tau=\iota(\tau) \end{aligned}$$

で定める．このとき，任意の $g\in\pi_1(M)$ に対し $DgD^{-1}=\rho(g)$ が成り立ち，$M_A=\widetilde{M_A}/\pi_1(M_A)\cong\mathrm{Sol}/\Gamma$ を得る．ただし $\Gamma:=\rho(\pi_1(M_A))$ とする．

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M_A} \arrow[r, "D", "\cong"'] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Sol} \arrow[d, "\rho(g)"] \\ \widetilde{M_A} \arrow[r, "D", "\cong"'] & \mathrm{Sol} \end{tikzcd}$$

(2) $\mathrm{Tr}A \leq -3$のとき． $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$の元$Q$であって$QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} -e^{-\tau} & 0 \\ 0 & -e^{\tau} \end{pmatrix}$となるものをとる．展開写像$D$とホロノミー準同型$\rho'$を

$$D : \widetilde{M}_A \to \mathrm{Sol}\ ,\ D(\boldsymbol{x}, t) = (Q\boldsymbol{x}, t\tau)$$
$$\rho' : \pi_1(M_A) \to \mathrm{Isom}(\mathrm{Sol})\ ,\ \rho'(\boldsymbol{n}) = Q\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^2\ (\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^2)\ ,\ \rho'(\gamma) = f\tau$$

で定める．ここでfとは，$f(\boldsymbol{x}, t) = (-\boldsymbol{x}, t)$で定義されるSol上の等長変換とする．このとき，任意の$g \in \pi_1(M)$に対し$DgD^{-1} = \rho'(g)$が成り立ち，$M_A = \widetilde{M}_A/\pi_1(M_A) \cong \mathrm{Sol}/\Gamma$を得る．ただし$\Gamma := \rho'(\pi_1(M_A))$とする．

2.4. 準トーラス束上のSol構造の具体的構成

この節では前の節で構成したトーラス束上のSol構造を使って準トーラス束上にSol構造を入れる．

$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$とする．命題 1.6 より

$$A = JB^{-1}JB = \begin{pmatrix} 1+2bc & 2bd \\ 2ac & 1+2bc \end{pmatrix}$$

に対し，トーラス束M_Aは準トーラス束N_Bの二重被覆である．トーラス束$M_A = \widehat{N}_B$上にSol構造が入るための必要十分条件は$|\mathrm{Tr}A| = |2(1+2bc)| \geq 3$であるのでこれは$bc \neq 0, -1$と書きかえられる．$bc \neq 0, -1$のとき二重被覆$M_A$は一意である．その被覆変換を$h$とし，$N_B = M(A,h) := M_A/h$と表す．

以後，$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$は$bc \neq 0, -1$を満たすと仮定する．簡単のため，$B \equiv I \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$の場合に準トーラス束$N_B$上にSol構造を具体的に構成する．

二重被覆$M_A \to N_B$の被覆変換を$r : M_A \to M_A$とする．

$$JAJ = J(JB^{-1}JB)J = B^{-1}JBJ = A^{-1}$$

を使うと，対合rは次の対合に持ち上がる．これを同じ記号rで表す．

$$r : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \widetilde{M}_A \to \widetilde{M}_A = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$
$$(\boldsymbol{x}, t) \mapsto (J\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{e}_1, -t)$$

ここで$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$である．準トーラス束$N_B$上にSol構造を入れるためには，展開写像$D : \widetilde{M}_A \to \mathrm{Sol}$を$DrD^{-1} \in \mathrm{Isom}(\mathrm{Sol})$であるように取れることを示せば十分である．

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M}_A \arrow[r, "D", "\cong"'] \arrow[d, "r"'] & \mathrm{Sol} \arrow[d, dotted, "DrD^{-1}"] \\ \widetilde{M}_A \arrow[r, "D", "\cong"'] & \mathrm{Sol} \end{tikzcd}$$

計算により DrD^{-1} は $(\boldsymbol{x}, z)$ を $(QJQ^{-1}\boldsymbol{x} + \dfrac{1}{2}\,Q\boldsymbol{e}_1, -z)$ にうつすことがわかる．

$$\begin{aligned}
QJQ^{-1}\begin{pmatrix}\pm e^{-\tau} & 0\\ 0 & \pm e^{\tau}\end{pmatrix}(QJQ^{-1})^{-1} &= QJ(Q^{-1}\begin{pmatrix}\pm e^{-\tau} & 0\\ 0 & \pm e^{\tau}\end{pmatrix}Q)JQ^{-1}\\
&= QJAJQ^{-1}\\
&= QA^{-1}Q^{-1} = \begin{pmatrix}\pm e^{-\tau} & 0\\ 0 & \pm e^{\tau}\end{pmatrix}^{-1}
\end{aligned}$$

より QJQ^{-1} の対角成分は 0 であることがわかり，行列式が -1 であるので，正の実数 k を使って $QJQ^{-1} = \pm\begin{pmatrix}0 & 1/k\\ k & 0\end{pmatrix}$ とできる．いま $Q' = \begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}Q$ と定めると

$$\begin{aligned}
Q'JQ'^{-1} &= \begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}QJQ^{-1}\begin{pmatrix}1/k & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \pm\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1/k\\ k & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/k & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \pm\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

かつ

$$Q'AQ'^{-1} = \begin{pmatrix}\pm e^{-\tau} & 0\\ 0 & \pm e^{\tau}\end{pmatrix}$$

が成り立つので，Q を Q' で取りかえる．また，写像 $(\boldsymbol{x}, z) \mapsto \left(\pm\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}, -z\right)$ は二面体群 $\mathcal{D}_4 < \mathrm{Isom(Sol)}$ の元であるので $DrD^{-1} \in \mathrm{Isom(Sol)}$ となり，$M_A/\langle DrD^{-1}\rangle = N_B$ を得る．ここで，$M_A = \mathrm{Sol}/\Gamma$ である．以上により N_B 上に Sol 構造を構成できた．他の場合についても同様に構成できる．

3. 準トーラス束上の対合

定義 3.1. 3次元多様体 M 上の同相写像 r で $r^2 = id_M$ となるものを M 上の**対合**という．また，M 上の対合 r と r' が**同値**であるとは，同相写像 $f : M \to M$ で $f \circ r \circ f^{-1} = r'$ を満たすものが存在するときをいう．

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f", "\cong"'] \arrow[d, "r"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[d, "r'"]\\
M \arrow[r, "f", "\cong"'] & M
\end{tikzcd}$$

M 上の対合の同値類の集合を $\mathrm{Inv}(M)$ で表し， 集合 S の元の個数を $|S|$ で表す．

軌道体定理 [2] により次の定理を得る．

定理 3.2. M をコンパクト3次元多様体とし，M 上にはSol構造が入るとする．$\mathrm{Isom}(M)$ の位数2の元全体の集合 $\mathrm{Isom}^{(2)}(M)$ から $\mathrm{Inv}(M)$ への自然な写像は，全単射

$$\mathrm{Isom}^{(2)}(M)/\text{共役} \to \mathrm{Inv}(M)$$

を導く．

3.1. 例

この節では具体的な例を用いて準トーラス束の等長変換群と準トーラス束上の対合を決定するアルゴリズムについて述べる．

例 3.3. $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$ に対し，$|\mathrm{Inv}(N_B)| = 10$ である．

手順 1 準トーラス束 N_B の二重被覆であるトーラス束 M_A の等長変換群を求める．

手順 2 トーラス束 M_A の等長変換 r で $M_A/\langle r\rangle = N_B$ となるものをとる．

手順 3 準トーラス束 N_B の等長変換群を求め，位数2の元を共役で分類する．

手順 1. $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$ とすると，$A = JB^{-1}JB = \begin{pmatrix} 49 & 20 \\ 120 & 49 \end{pmatrix}$ である．
いま，$\tau_0, J, -E$ を

$$J : \widetilde{M_A} \to \widetilde{M_A}; (\boldsymbol{x}, t) \mapsto (J\boldsymbol{x}, -t)$$

$$\tau_0 : \widetilde{M_A} \to \widetilde{M_A}; (\boldsymbol{x}, t) \mapsto (B\boldsymbol{x}, t + \frac{1}{2})$$

$$-E : \widetilde{M_A} \to \widetilde{M_A}; (\boldsymbol{x}, t) \mapsto (-\boldsymbol{x}, t)$$

で定義される同相写像とする．$JAJ = A^{-1}$ より，写像 J は M_A 上の対合を誘導する．また，B の対角成分が等しいので $JB^{-1}J = B$ より $A = B^2$ である．よって $BAB^{-1} = A$ であるので，写像 τ_0 は M_A 上の対合を誘導する．

トーラス束 M_A の等長変換群は，

$$1 \to \mathrm{Coker}(A-E) \to \mathrm{Isom}_0(M_A) \rightleftarrows \langle \tau_0 \mid {\tau_0}^2 = 1\rangle \to 1$$

$$1 \longrightarrow \mathrm{Isom}_0(M_A) \longrightarrow \mathrm{Isom}(M_A) \rightleftarrows \langle J\rangle \oplus \langle -E\rangle \to 1, \quad J^2 = (-E)^2 = 1$$

である．ただし，$\mathrm{Isom}(M_A)$ の元として $\tau_0, J, -E$ と書くときはそれぞれ等長変換

$$D\tau_0 D^{-1}, DJD^{-1}, D(-E)D^{-1}$$

を表す．また E は単位行列である．$\mathrm{Isom}(M_A)$ は次の群表示をもつ．

$$\mathrm{Isom}(M_A) = \left\langle \mathrm{Coker}(A-E), \tau_0, J, -E \;\middle|\; \begin{array}{l} {\tau_0}^2 = J^2 = (-E)^2 = 1,\ \tau_0\boldsymbol{v}{\tau_0}^{-1} = B\boldsymbol{v}, \\ \boldsymbol{J}\boldsymbol{v}J = -AJ\boldsymbol{v}\ ,\ J\tau_0 J = {\tau_0}^{-1}, \\ (-E)\boldsymbol{v}(-E) = -\boldsymbol{v}\ ,\ (-E)\tau_0(-E) = \tau_0 \end{array} \right\rangle$$

ただし $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Coker}(A-E)$ である．

手順 2.　$\mathrm{Coker}(A-E)\cong\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_{24}$ である．なぜなら $\mathbb{Z}^2$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\-12\end{pmatrix}\right\}$ に対して次の等式が成り立つからである．

$$(A-E)\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix},(A-E)\begin{pmatrix}5\\-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\24\end{pmatrix}$$

ここで，$(\bar{1},\bar{0})=\boldsymbol{e}_1,(\bar{0},\bar{1})=\boldsymbol{e}_2$ とかく．等長変換 $(\bar{0},\bar{12})J$ は M_A 上の自由対合であり，$M_A/\langle(\bar{0},\bar{12})J\rangle=N_B$ であることが確認できる．

手順 3.　準トーラス束 N_B の等長変換群は，

$$1\to(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_{24})\rtimes\langle\tau_0\mid{\tau_0}^2=1\rangle\to\mathrm{Isom}(N_B)\rightleftarrows\langle -E\mid(-E)^2=1\rangle\to 1$$

と求めることができる．$f_1=(\bar{2},\bar{0}),f_2=(\bar{0},\bar{1})$ とすると，群表示は

$$\mathrm{Isom}(N_B)=\left\langle f_1,f_2,\tau_0,-E\ \middle|\ \begin{array}{l}{f_1}^2={f_2}^{24}=[f_1,f_2]={\tau_0}^2=(-E)^2=1,\\ \tau_0f_1\tau_0=f_1,\ \tau_0f_2\tau_0=f_1{f_2}^5,\\ (-E)f_1(-E)=f_1,(-E)f_2(-E)={f_2}^{-1},\\ (-E)\tau_0(-E)=\tau_0\end{array}\right\rangle$$

である．2行目の関係式は

$$\tau_0f_1{\tau_0}^{-1}=Bf_1=B\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\24\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+24\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}={f_1}^5{f_2}^{24}=f_1$$

$$\tau_0f_2{\tau_0}^{-1}=Bf_2=B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=f_1{f_2}^5$$

から導かれる．$\mathrm{Isom}(N_B)$ の位数2の元は次の4種類である．

(1) $f_1,{f_2}^{12},f_1{f_2}^{12}$

(2) ${f_1}^p{f_2}^q(-E)$，　p,q は任意

(3) ${f_1}^p{f_2}^q\tau_0$，　$q\equiv 0\pmod 4$

(4) ${f_1}^p{f_2}^q\tau_0(-E)$，　$q\equiv 0\pmod 6$

これは

$${f_1}^p{f_2}^q(-E){f_1}^p{f_2}^q(-E)={f_1}^p{f_2}^q{f_1}^{-p}{f_2}^{-q}=1$$

$${f_1}^p{f_2}^q\tau_0{f_1}^p{f_2}^q\tau_0={f_1}^p{f_2}^q{f_1}^p(f_1{f_2}^5)^q={f_1}^{2p+q}{f_2}^{q+5q}={f_1}^q{f_2}^{6q}$$

$${f_1}^p{f_2}^q\tau_0(-E){f_1}^p{f_2}^q\tau_0(-E)={f_1}^p{f_2}^q(-E){f_1}^p(f_1{f_2}^5)^q(-E)={f_1}^{p-p-q}{f_2}^{(1-5)q}={f_1}^{-q}{f_2}^{-4q}$$

により確認できる．3行目では τ_0 と $-E$ は可換であることを使った．さらに共役類を分類するため，各場合について生成元 $f_1,f_2,\tau_0,-E$ で共役をとる．

(1) の共役類.　$f_1,f_2,\tau_0,-E$ はそれぞれ $f_1,{f_2}^{12}$ と可換である．τ_0 と ${f_2}^{12}$ は，

$$\tau_0{f_2}^{12}{\tau_0}^{-1}=(f_1{f_2}^5)^{12}={f_1}^{12}{f_2}^{5\cdot 12}={f_2}^{12}$$

により確かめられる．よって (1) について共役類は $f_1,{f_2}^{12},f_1{f_2}^{12}$ の3つである．

(2) の共役類.　各生成元で共役をとると

$$
\begin{aligned}
f_1{f_1}^p{f_2}^q(-E){f_1}^{-1} &= {f_1}^p{f_2}^q(-E)\\
f_2{f_1}^p{f_2}^q(-E){f_2}^{-1} &= {f_1}^p{f_2}^{1+q+1}(-E) = {f_1}^p{f_2}^{q+2}(-E)\\
\tau_0{f_1}^p{f_2}^q(-E){\tau_0}^{-1} &= {f_1}^p(f_1{f_2}^5)^q(-E) = {f_1}^{p+q}{f_2}^{5q}(-E)\\
(-E){f_1}^p{f_2}^q(-E)(-E)^{-1} &= {f_1}^{-p}{f_2}^{-q}(-E)
\end{aligned}
$$

となる．${f_1}^p{f_2}^q(-E)$ を (p,q) で表すと，次の共役関係を得る．

$$
(p,q)\sim(p,q+2),\ (p,q)\sim(p+q,5q),\ (p,q)\sim(-p,-q)
$$

よって (2) について共役類は $-E,\ f_1(-E),\ f_2(-E)$ の 3 つである．

(3) の共役類.　各生成元で共役をとると

$$
\begin{aligned}
f_1{f_1}^p{f_2}^q\tau_0{f_1}^{-1} &= {f_1}^p{f_2}^q\tau_0\\
f_2{f_1}^p{f_2}^q\tau_0{f_2}^{-1} &= {f_1}^p{f_2}^{q+1}(f_1{f_2}^5)^{-1}\tau_0 = {f_1}^{p-1}{f_2}^{q-4}\tau_0\\
\tau_0{f_1}^p{f_2}^q\tau_0{\tau_0}^{-1} &= {f_1}^p(f_1{f_2}^5)^q\tau_0 = {f_1}^{p+q}{f_2}^{5q}\tau_0 = {f_1}^p{f_2}^{5q}\tau_0\\
(-E){f_1}^p{f_2}^q\tau_0(-E)^{-1} &= {f_1}^{-p}{f_2}^{-q}\tau_0
\end{aligned}
$$

となる．3 行目では $q\equiv 0 \pmod 2$ であることを使った．${f_1}^p{f_2}^q\tau_0$ を (p,q) で表すと，次の共役関係を得る．

$$
(p,q)\sim(p-1,q-4),\ (p,q)\sim(p,5q),\ (p,q)\sim(-p,-q)
$$

よって (3) について共役類は $\tau_0, f_1\tau_0$ の 2 つである．

(4) の共役類.　各生成元で共役をとると

$$
\begin{aligned}
f_1{f_1}^p{f_2}^q\tau_0(-E){f_1}^{-1} &= {f_1}^p{f_2}^q\tau_0(-E)\\
f_2{f_1}^p{f_2}^q\tau_0(-E){f_2}^{-1} &= {f_1}^p{f_2}^{q+1}\tau_0f_2(-E) = {f_1}^{p+1}{f_2}^{q+6}\tau_0(-E)\\
\tau_0{f_1}^p{f_2}^q\tau_0(-E){\tau_0}^{-1} &= {f_1}^{p+q}{f_2}^{5q}(-E){\tau_0}^{-1} = {f_1}^p{f_2}^{5q}\tau_0(-E)\\
(-E){f_1}^p{f_2}^q\tau_0(-E)(-E)^{-1} &= {f_1}^{-p}{f_2}^{-q}\tau_0(-E)
\end{aligned}
$$

となる．${f_1}^p{f_2}^q\tau_0(-E)$ を (p,q) で表すと，次の共役関係を得る．

$$
(p,q)\sim(p+1,q+6),\ (p,q)\sim(p,5q),\ (p,q)\sim(-p,-q)
$$

よって (4) について共役類は $\tau_0(-E), f_1\tau_0(-E)$ の 2 つである．

以上の計算と定理 3.2 により $|\mathrm{Inv}(N_B)|=10$ を得る．

注意 3.4. 作間 [6] により，トーラス束 M_A が向き付け可能であるとき，$1\le|\mathrm{Inv}(M_A)|\le 21$ であることが示されており，$A=\begin{pmatrix}49 & 20\\ 120 & 49\end{pmatrix}$ に対し $|\mathrm{Inv}(M_A)|=21$ が示されている．

注意 3.5. Barreto-Gonçalves-Vendrúscolo [1] により，$B=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 12 & 5\end{pmatrix}$ に対し, 準トーラス束 N_B には 3 つの自由対合の同値類があることが示されている．

謝辞

講演の機会を与えてくださった日本大学の市原一裕先生，茂手木公彦先生に御礼申し上げます．そして，本研究を進めるにあたりご指導いただきました作間誠先生に心から感謝いたします．また先輩の阪田直樹さん，片山拓弥さんには貴重な助言をいただきました。深く感謝しております。本当にありがとうございました。

参考文献

[1] A. P. Barreto, D. Lima Gonçalves, and D. Vendrúscolo, *Free involutions on torus semi-bundles and the Borsuk-Ulam Theorem for maps into* $\mathbb{R}^n$, to appear in Hiroshima Math. J.

[2] M. Boileau and J. Porti, *Geometrization of 3-orbifolds of cyclic type*, Astérisque **272** (2001), 208. Appendix A by Michael Heusener and Porti.

[3] E. Ghys and V. Sergiescu, *Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages*, Topology **19** (1980), no. 2, 179–197.

[4] A. Hatcher, *Notes on basic* 3*-manifold topology*, `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/3M/3Mdownloads.html` .

[5] K. Morimoto, *Some orientable* 3*-manifolds containing Klein bottles*, Kobe J. Math. **2** (1985), no. 1, 37–44.

[6] M. Sakuma, *Involutions on torus bundles over* S^1, Osaka J. Math. **22** (1985), no. 1, 163–185.

[7] P. Scott, *The geometries of* 3*-manifolds*, Bull. London Math. Soc. **15** (1983), no. 5, 401–487.