Branched twist spins and knot determinants from the point of view of representations

福田瑞季

概 要

Branched twist spin とは，4 次元球面内に埋め込まれた 2 次元結び目であり，スパン結び目やツイストスパン結び目の一般化である．本講演では，与えられた 2 つの branched twist spin が異なるための十分条件を結び目の行列式によって得られることを示す．また，1 次元結び目の結び目群の既約な $SU(2,\mathbb{C})$- metabelian 表現の個数は，結び目の行列式から得られることが Lin によって示されている．このアナロジーを branched twist spin に対して考えて得られた結果も紹介する．

1 はじめに

2 つの n 次元結び目 K と K' について，S^{n+2} 上の滑らかなアイソトピー $g_t : S^{n+2} \to S^{n+2}$ で $g_0 = \mathrm{id}$, $g_1(K) = K'$ を満たすものが存在するとき，K と K' は同値であるといい，$K \sim K'$ と書くことにする．この同値関係によって結び目の位相型を調べる．

1.1 局所滑らかな作用

以下では作用 f は左右両側で定義されているものとし，混乱が起きないときは写像 f を明記せず $f(g,x)$ や $f(x,g)$ を単に gx や xg と書くことにする．

X, Y を G -空間とする． 微分同相写像 $\phi : X \to Y$ が存在して，

$$\phi(gx) = g\phi(x)$$

が全ての $x \in X$ に対して成り立つとき，X と Y は G-同値であるという．また，微分同相写像 $\phi : X \to Y$ に対して $\psi \in Aut(G)$ が存在して，

$$\phi(gx) = \psi(g)\phi(x)$$

が全ての $x \in X$ に対して成り立つとき，X と Y は弱 G -同値という．

直積 $X \times Y$ への G -作用を $g(x,y) = (xg^{-1}, gy)$ で定義すると，$X \times Y$ も G -空間となる．この作用による商空間を $X \times_G Y$ と書き，ねじれ直積と定義する．商空間の同値

類を $[x, y]$ と書くことにすると $[xg, y] = [x, gy]$ となることを注意しておく．作用が直交的であるとは作用の表現が直交群と同型になるときをいう．

次の補題からユークリッド空間上のコンパクトリー群による作用は常に直交的な作用としてよい．

補題 1.1. G をコンパクトリー群，$H \subset G$ を閉部分群とする．このとき，ある自然数 m と $v \in \mathbb{R}^m$ に対して $G_v = H$ となる表現 $\rho : G \to O(m)$ が存在する．

次に局所滑らかな作用を定義する．X を G -空間とし，X 内のある点 X の軌道 $G(x)$ を G/H -タイプとする．ここで，軌道 $G(x)$ が G/H-タイプであるとは，$G_x = H$ となるときをいう．さらに，V をユークリッド空間で，V 上の H の作用は直交的であるとする．このとき $G(x)$ に関する線形管を

$$\phi : G \times_H V \to X$$

の像として定義する．また点 $y \in X$ の線形スライス S_y を

$$\psi : G \times_{G_y} S_y \to X; [g, s] \mapsto gs$$

が $G(y)$ の線形管と G -同値となるものとして定義する．各点で線形スライスが存在するとき X を局所滑らかであるという．注意として，$G \times_H V \to X$ は G/H 上の V 束なので $G \times_H V$ は多様体である．したがって滑らかな作用を持つ空間 X は多様体でなくてはならない．

一般に作用と軌道空間が与えられたときに，全空間がどのようになっているかわからない．しかし 主 S^1 束については次が成立する．

補題 1.2. $\mathcal{P}(S^1, M)$ を M 上の主 S^1 束全体の集合とする．このとき，$\mathcal{P}(S^1, M) = H^2(M; \mathbb{Z})$.

2 Branched twist spin

2.1 Branched twist spin の定義

S^3 上の 固定点を持たない S^1 作用を考える．S^3 の懸垂を考えることで S^4 上の S^1 作用を得る．もし S^3 上の作用で，$\mathbb{Z}_m$ -タイプのみの例外軌道を持つとき，S^4 上では例外軌道と固定点の和集合 $E_m \cup F$ は 2 次元球面であり，$E_m^* \cup F^*$ は軌道空間 S^3 内の弧になる．$E_m \cup F$ は S^1 不変である S^4 内の近傍 N_m を持つ．ここで S^1 不変とは任意の $y \in S^1$ に対して，$yN_m = N_m$ となることである．$\mathbb{Z}_m$ -タイプと $\mathbb{Z}_n$ -タイプの 2 種類を例外軌道として持つとき，$E_m \cup F$ と $E_n \cup F$ はそれぞれ 2 次元球面であり，2 点の固定点 F でのみ横断的に交わっている．また，$E_m^* \cup E_n^* \cup F^*$ は軌道空間 S^3 内の単純閉曲線になっている．$E_m \cup E_n \cup F$ は S^1 不変である S^4 内の近傍 $N_{m,n}$ を持つ．

M^4 をホモトピー S^4 とし，M 上の局所滑らかで効果的な S^1 作用を考える．軌道空間の情報を admissible data といい，

- 例外軌道がなく，軌道空間が S^3 かつ固定点が 2 点，または 軌道空間が D^3 かつ固定点の像が $\partial D^3 = S^2$ のとき，$\{M^*\}$,
- $\mathbb{Z}_m$-タイプの例外軌道が 1 種類存在し，軌道空間が S^3 であるとき $\{M^*, m\}$,
- $\mathbb{Z}_m$-タイプと $\mathbb{Z}_n$-タイプの例外軌道が 2 種類存在し，軌道空間が S^3 であるとき $\{(M^*, K), m, n\}$,

と書くことにする．M 上の S^1 作用と admissible data の間には次の関係が成立する．

定理 2.1 (Fintushel [1])**.** M^4 を 4 次元ホモトピー球面とする．M 上の局所滑らかで効果的な S^1 作用の弱同値での同値類と admissible data には全単射が存在する．

注意 2.2. Fintushel の論文 [1] では admissible data の D^3 はホモトピー D^3，S^3 はホモトピー S^3 である．この論文はポアンカレ予想が解決する前に書かれたものであり，ポアンカレ予想によってホモトピー D^3 は実際に D^3 に，ホモトピー S^3 は S^3 になる．

次の Pao の定理によって $\{(M^*K), m\}$, $\{(S^3, K), m, n\}$ に対しても，$M^4 = S^4$ としてよいことが示された．

定理 2.3 (Pao [10])**.** 2 つの admissible data $\{(S^3, K), m, n\}, \{(S^3, K), m', n'\}$ について，

(1) $n \equiv n' \pmod{m}$ かつ $n - n' \equiv 0 \pmod{2}$,

(2) $n \equiv -n' \pmod{m}$ かつ $n + n' \equiv 0 \pmod{2}$,

のいずれかが成立するとき，2 つの軌道空間から作用で引き戻されるそれぞれの全空間は同相であり，作用は弱 S^1 同値である．

実際，この定理を繰り返し用いることで，任意の $\{(S^3, K), m, n\}$ は $\{(S^3, K), 1, 1\}$ もしくは $\{(S^3, K), 1, 0\}$ のどちらかの全空間と同相になる．$\{(S^3, K), 1, 1\}$ の場合は $\{D^3\}$ の全空間と，$\{(S^3, K), 1, 0\}$ の場合は $\{S^3\}$ の全空間とそれぞれ同相である．$\{D^3\}$ と $\{S^3\}$ の場合には全空間が S^4 になることが上の議論からわかっているため，定理 2.1 は次のように言い換えることができる．

定理 2.4 (Pao [10])**.** S^4 上の局所滑らかで効果的な S^1 作用の弱 S^1 -同値での同値類と admissible data には全単射が存在する．

Branched twist spin は次のように定義される．

定義 2.5 (Branched twist spin)**.** $S^1 \curvearrowright S^4$ を局所滑らかで効果的な作用，2 つの例外軌道をそれぞれ E_m, E_n とし，$K = E_m^* \cup E_n^* \cup F^*$ とする．$E_m \cup F$ と $E_n \cup F$ をそれぞれ K の branched twist spin といい $K^{n,m}, K^{m,n}$ と書く．

注意 2.6. (1) 例外軌道 E_m に対応した branched twist spin は $K^{n,m}$ と n が先に来る並び順であることに注意されたい．

(2) Admissible data $\{(S^3, K), m, 1\}$ に対応した branched twist spin $E_1 \cup F = K^{m,1}$ は m ツイストスパン結び目である．

軌道空間が S^3 になる場合を考えると．$E_m^* \cup E_n^* \cup F^*$ は単純閉曲線，つまり 1 次元結び目である．Branched twist spin $K^{m,n} = E_n \cup F$ はこの 1 次元結び目の一部分 $E_n^* \cup F^*$ の S^1 作用による引き戻しである．定理 2.4 によって branched twist spin は任意の 1 次元結び目 K とその上の互いに素な整数の組 (m, n) によって構成されることがわかる．以下簡単のため，組 (m, n) は自然数の組とする．負の数になる場合には [4] を参照されたい．

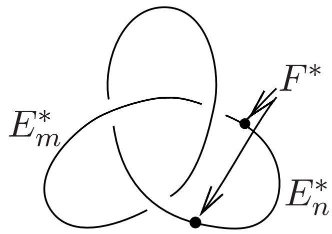

図 1: 軌道空間 S^3 内の例外軌道と固定点の像

各例外軌道や固定点の近傍を作用の逆像を張り合わせ S^4 を再構成することで，Branched twist spin $K^{m,n}$ の結び目群は次のように表示できる．

補題 2.7. $K^{m,n}$ を K の branched twist spin とする．$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ を $m\alpha + n\beta = 1$ を満たすものとする．このとき，

$$\pi_1(S^4 - \mathrm{int}N(K^{m,n})) \cong \langle \pi_1(S^3 - \mathrm{int}N(K)) \times \langle h \rangle \mid \theta^m h^\beta = 1 \rangle$$

が成り立つ．ここで表示の θ は結び目 K のメリディアンである．

注意 2.8. 上の表示の中で $K^{m,n}$ のメリディアン μ は $\theta^{-n} h^\alpha$ と表せる．

2.2 結び目の非自明性と Reflexive

S^4 から $\mathrm{int}(S^2 \times D^2)$ を取り除き，再びある貼り合わせ写像によって $S^2 \times D^2$ を貼り合わせることを，Gluck surgery という．

Gluck 自身は次の定理によって Gluck surgery が高々8 個しかないことを示した．

定理 2.9 (Gluck [5])**.** $S^2 \times S^1$ の同相写像の pseudo -アイソトピー類の集合を $\mathcal{H}(S^2 \times S^1)$ とする．このとき，

$$\mathcal{H}(S^2 \times S^1) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

が成立する．

上の定理での右辺の第一項，第二項はそれぞれ S^2 と S^1 の向きに対応していて，第三項はある $0 \leq \theta \leq 2\pi$ によって S^2 を北極と南極を軸に赤道方向に回す写像 ρ_θ を用いて

$$\tau(x, \theta) = (\rho_\theta(x), \theta)$$

なる写像 τ が生成元である．

S^2 と S^1 の向きを入れ替える Gluck surgery の前後では S^4 は変化せず，S^2 の埋め込み方も変化しない．しかし，τ による Gluck surgery によって得られる多様体はホモトピー S^4 であるが，S^4 とは限らない．S^2 の埋め込み方が Gluck surgery の前後で異なる可能性がある．つまり，2 次元結び目として位相型が異なる可能性がある．τ による Gluck surgery で 2 次元結び目 K の位相型が変わらないとき，K は reflexive であるという．

τ による Gluck surgery に関しては次が成り立つ．

定理 2.10 (Gordon [6])**.** K を 1 次元結び目とし，K^m を K の m ツイストスパン結び目とする．このとき，$(S^4 - \mathrm{int}(S^2 \times D^2)) \cup_\tau K^m \times D^2 = S^4$ が成立する．

また，reflexive に関しては次の定理が知られている．

定理 2.11 (Hillman,Plotnick [3])**.** K を 1 次元結び目とする．K の 2 ツイストスパン結び目 K^2 は reflexive である．

定理 2.12 (Hillman,Plotnick [3])**.** K をトーラスまたは双曲結び目とする．$m > n$ かつ $m \geq 3$ であれば $K^{m,n}$ は reflexive でない．

自明な 2 次元結び目は reflexive であるので，次の系が成り立つ．

系 2.13. K を 1 次元トーラス結び目または双曲結び目とする．$m > n$ かつ $m \geq 3$ であれば $K^{m,n}$ は非自明な 2 次元結び目である．

3 主定理の証明

結び目 K に対してその branched twist spin を $K^{m,n}$ とした．補題 2.7 より $K^{m,n}$ の結び目群は $\pi_1(S^4 - \mathrm{int}N(K^{m,n})) \cong \langle \pi_1(S^3 - \mathrm{int}N(K)) \times \langle h \rangle \mid \theta^m h^\beta = 1 \rangle$ であり，Wirtinger 表示を使うことで，

$$\pi_1(S^4 - \mathrm{int}N(K^{m,n})) \cong \langle x_1, \ldots x_l, h \mid r_1, \ldots r_l, x_i h = h x_i, x_1^m h^\beta = 1 \rangle$$

が得られる．この表示に対して関係式 $x_i h = h x_i$ を s_i , $x_1^m h^\beta = 1$ を r と表記することにすると，branched twist spin $K^{m,n}$ のアレクサンダー行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} a_*\left(\frac{\partial r_1}{\partial x_1}\right) & \cdots & \cdots & a_*\left(\frac{\partial r_1}{\partial x_l}\right) & a_*\left(\frac{\partial r_1}{\partial h}\right) \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_*\left(\frac{\partial r_l}{\partial x_1}\right) & \cdots & \cdots & a_*\left(\frac{\partial r_l}{\partial x_l}\right) & a_*\left(\frac{\partial r_l}{\partial h}\right) \\ a_*\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_1}\right) & \cdots & \cdots & a_*\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_l}\right) & a_*\left(\frac{\partial s_1}{\partial h}\right) \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_*\left(\frac{\partial s_l}{\partial x_1}\right) & \cdots & \cdots & a_*\left(\frac{\partial s_l}{\partial x_l}\right) & a_*\left(\frac{\partial s_l}{\partial h}\right) \\ a_*\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right) & \cdots & \cdots & a_*\left(\frac{\partial r}{\partial x_l}\right) & a_*\left(\frac{\partial r}{\partial h}\right) \end{pmatrix}$$

となる．このアレクサンダー行列に対して簡単な計算で次の補題を得る．

補題 3.1. 1 次元結び目 K の branched twist spin $K^{m,n}$ について以下が成り立つ．

(1) $E_0(K^{m,n}) = 0$.

(2) β を $m\alpha + n\beta = 1$ を満たす整数とする．$E_1(K^{m,n})$ は以下の元で生成されるイデアルである．

- $\Delta_K(t^\beta)\left\{(1-t^m), (1-t^\beta), \dfrac{1-t^{m\beta}}{1-t^\beta}, \dfrac{1-t^{m\beta}}{1-t^m}\right\}$,
- $G_i(t^\beta)(1-t^m)\left\{(1-t^m), (1-t^\beta), \dfrac{1-t^{m\beta}}{1-t^\beta}, \dfrac{1-t^{m\beta}}{1-t^m}\right\}$,
- $(1-t^m)^{l-1}\left\{(1-t^m), (1-t^\beta), \dfrac{1-t^{m\beta}}{1-t^\beta}, \dfrac{1-t^{m\beta}}{1-t^m}\right\}$.

特に $E_1(K^{m,n}) \neq 0$ である．

ここでの生成元の表記は共通因子を $\{\}$ の外に出した略記である．また，l は K の結び目群の Wirtinger 表示の生成元の個数で，$G_i(t)$ は $E_2(K)$ の各生成元である．

ここでは補題 3.1 を認めて主定理を証明する．

証明 (主定理). $K_1^{m_1,n_1} \sim K_2^{m_2,n_2}$ と仮定する．補題 3.1 より，$E_1(K_i^{m_i,n_i}) \neq 0$ である．$E_2(K_i)$ の生成元を $G_j^i(t)$ とする．補題 3.1 より，$E_1(K_i^{m_i,n_i})$ の生成元たちは，

- $\Delta_{K_i}(t^{\beta_i})\left\{(1-t^{m_i}),(1-t^{\beta_i}),\dfrac{1-t^{m_i\beta_i}}{1-t^{\beta_i}},\dfrac{1-t^{m_i\beta_i}}{1-t^{m_i}},\right\}$,

- $G_j^i(t^{\beta_i})(1-t^{m_i})\left\{(1-t^{m_i}),(1-t^{\beta_i}),\dfrac{1-t^{m_i\beta_i}}{1-t^{\beta_i}},\dfrac{1-t^{m_i\beta_i}}{1-t^{m_i}}\right\}$,

- $(1-t^{m_i})^{l_i-1}\left\{(1-t^{m_i}),(1-t^{\beta_i}),\dfrac{1-t^{m_i\beta_i}}{1-t^{\beta_i}},\dfrac{1-t^{m_i\beta_i}}{1-t^{m_i}}\right\}$,

と書けた．もし $E_1(K_1^{m_1,n_1})=E_1(K_2^{m_2,n_2})$ ならば，$E_1(K_1^{m_1,n_1})$ の生成元は $E_1(K_1^{m_2,n_2})$ の生成元たちの $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ の一次結合で書けなければならない．今，ローラン多項式 $P_k(t),P_k^j(t)\in\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ を用いて

$$\begin{aligned}\Delta_{K_2}(t^{\beta_2})(1-t^{m_2})=&\Delta_{K_1}(t^{\beta_1})\times\\ &\left\{P_1(t)(1-t^{m_1})+P_2(t)(1-t^{\beta_1})+P_3(t)\frac{1-t^{m_1\beta_1}}{1-t^{\beta_1}}+P_4(t)\frac{1-t^{m_1\beta_1}}{1-t^{m_1}}\right\}\\ &+\sum_j G_j^1(t^{\beta_1})(1-t^{m_1})\times\left\{P_5^j(t)(1-t^{m_1})+P_6^j(t)(1-t^{\beta_1})+\right.\\ &\left.P_7^j(t)\frac{1-t^{m_1\beta_1}}{1-t^{\beta_1}}+P_8^j(t)\frac{1-t^{m_1\beta_1}}{1-t^{m_1}}\right\}+(1-t^{m_1})^{l_1-1}\times\\ &\left\{P_9(t)(1-t^{m_1})+P_{10}(t)(1-t^{\beta_1})+P_{11}(t)\frac{1-t^{m_1\beta_1}}{1-t^{\beta_1}}+P_{12}(t)\frac{1-t^{m_1\beta_1}}{1-t^{m_1}}\right\}\end{aligned}$$

のように $\Delta_{K_2}(t^{\beta_2})(1-t^{m_2})$ を $E_1(K_1^{m_1,n_1})$ の生成元の一次結合で書けたとする．$m_1\alpha_1+n_1\beta_1=1$ より m_1 と β_1 は互いに素なので，β_1 は奇数である．上の等式に $t=-1$ を代入すると，

$$\Delta_{K_1}(-1)(2P_2(-1)+\beta_1P_4(-1))=\Delta_{K_2}((-1)^{\beta_2})(1-(-1)^{m_2})$$

を得る．もし m_2 が偶数であれば $\Delta_K(-1)\neq 0$ より，$2P_2(-1)+\beta_1P_4(-1)=0$ を得る．もし m_2 が奇数であれば，$m_2\alpha_2+n_2\beta_2=1$ という条件から β_2 を偶数として取ることができるので，任意の 1 次元結び目 K に対して $\Delta_K(1)=1$ であることから，

$$\frac{\Delta_{K_2}(1)}{\Delta_{K_1}(-1)}=\frac{1}{\Delta_{K_1}(-1)}=\frac{2P_2(-1)+\beta_1P_4(-1)}{2}\in\frac{\mathbb{Z}}{2}$$

を得る．以上のことから，$\Delta_{K_2}(t^{\beta_2})(1-t^{m_2})$ を $E_1(K_1^{m_1,n_1})$ の生成元の一次結合で書くためには，

- m_2 が偶数であれば，$2P_2(-1)+\beta_1P_4(-1)=0$,

- m_2 が奇数であれば，$\dfrac{1}{\Delta_{K_1}(-1)}\in\dfrac{\mathbb{Z}}{2}$,

とならなくてはならない．$2P_2(-1)+\beta_1 P_4(-1)=0$ を満たす $P_2(t), P_4(t)\in\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ は存在するため，ここではこの条件に対してこれ以上議論はしない．

$E_1(K_2^{m_2,n_2})$ の他の生成元 $\Delta_{K_2}(t^{\beta_2})\left\{(1-t^{\beta_2}), \dfrac{1-t^{m_2\beta_2}}{1-t^{\beta_2}}, \dfrac{1-t^{m_2\beta_2}}{1-t^{m_2}}\right\}$ に対しても同様の議論をすることで次の表が得られる．

$E_1(K_2^{m_2,n_2})$ の生成元	$1-t^{m_2}$	$1-t^{\beta_2}$	$\dfrac{1-t^{m_2\beta_2}}{1-t^{\beta_2}}$	$\dfrac{1-t^{m_2\beta_2}}{1-t^{m_2}}$
$(m_2,\beta_1,\beta_2)=$ (偶, 奇, 奇)	P	$\dfrac{\mathbb{Z}}{2}$	P	$\dfrac{\mathbb{Z}}{\beta_2}$
$(m_2,\beta_1,\beta_2)=$ (奇, 奇, 偶)	$\dfrac{\mathbb{Z}}{2}$	P	$\dfrac{\mathbb{Z}}{m_2}$	P

表の 1 行目は $E_1(K_2^{m_2,n_2})$ の生成元 $\Delta_{K_2}(t^{\beta_2})\left\{(t^{\beta_2}-1), \dfrac{1-t^{m_2\beta_2}}{1-t^{\beta_2}}, \dfrac{1-t^{m_2\beta_i}}{1-t^{m_2}}\right\}$ のうち，どの生成元の一次結合を考えたのか，共通部分である $\Delta_{K_2}(t^{\beta_2})$ を省略して書いている．2 行目からは 1 列目の (m_2,β_1,β_2) のそれぞれの偶奇で場合分けをした場合，各生成元の 1 次結合に対して $t=-1$ を代入したときの $\dfrac{\Delta_{K_2}((-1)^{\beta_2})}{\Delta_{K_1}(-1)}$ の値の範囲を示している．また P は $2P_2(-1)+\beta_1 P_4(-1)=0$ を表す．$E_1(K_2^{m_2,n_2})$ の全ての生成元が $E_1(K_1^{m_1,n_1})$ の生成元たちの一次結合で書けなければいけないということを考慮すると，表の行の共通部分を取ればよいことになる．よって全ての場合において $\dfrac{\Delta_{K_2}((-1)^{\beta_2})}{\Delta_{K_1}(-1)}\in\mathbb{Z}$ とならなくてはならない．特に，m_2 が偶数ならば K_1, K_2 を入れ替えて同様の議論をすることにより，$\dfrac{\Delta_{K_1}(-1)}{\Delta_{K_2}(-1)}$，$\dfrac{\Delta_{K_2}(-1)}{\Delta_{K_1}(-1)}\in\mathbb{Z}$ つまり，$|\Delta_{K_1}(-1)|=|\Delta_{K_2}(-1)|$ を得る．また，m_2 が奇数ならば $\dfrac{1}{\Delta_{K_1}(-1)}\in\mathbb{Z}$ つまり，$|\Delta_{K_1}(-1)|=1$ となることが，イデアル $E_1(K_1^{m_1,n_1})$ と $E_1(K_2^{m_2,n_2})$ が等しくなる必要条件となる． □

注意 3.2. 上の証明ではそれぞれの初等イデアルを比較する際，$t^{m_1}=1$ を満たすものとして $t=-1$ を代入しているが，$t=-1$ 以外の m_1 乗根を代入しても有用な条件を得ることができなかった．つまり m_1, m_2 がどちらも奇数の場合には証明中の議論は通用しない．

参考文献

[1] R. Fintushel, *Locally smooth circle actions on homotopy 4-spheres*, Duke Math. J. **43** (1976), 63–70.

[2] R. H. Fox, *Rolling*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 162–164.

[3] J. A. Hillman and S. P. Plotnick, *Geometrically fiberd two-knots*, Math. Ann. **287** (1990) 259–273.

[4] M. Fukuda, *Branched twist spins and knot determinants*, Osaka J. Math. (to appear).

[5] H. Gluck, *The embedding of two-spheres in the four-sphere*, Trans. Amer. Math. Soc. **104** (1962) 308–333.

[6] C. McA. Gordon, *Knots in the 4-sphere*, Comment. Math. Helv. **51** (1976), 585–596.

[7] 鎌田聖一, 曲面結び目理論, シュプリンガー現代数学シリーズ, 丸善出版, 2012.

[8] R. A. Litherland, *Deforming twist-spun knots*, Trans. Amer. math. Soc. **250** (1979), 311–331.

[9] D. Montgomery and C. T. Yang, *Groups on S^n with principal orbits of dimension n-3*, **I**, **II**, Illinois J. Math. **4** (1960), 507–517. ; **5** (1961), 206–211.

[10] P. S. Pao, *Non-linear circle actions on the 4-sphere and twisting spun knots*, Topology **17** (1978), 291–296.

[11] S. Plotnick, *The homotopy type of four-dimensional knot complements*, Math. Z. **183** (1983), 447–471.

[12] S. Plotnick, Fibered knots in S^4 -twisting, spinning, rolling, surgery, and branching, Contemporary Math., vol. 5, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1984, pp.437–459.

[13] D. Rolfsen, Knots and Links, Math. Lec. Series, **7**, Publish or Perish, Inc., Berkeley, 1976.

[14] H. Seifert, *Topologie dreideminsionaler gefaserter Raume*, Acta Math. **60** (1932), 147–238.

[15] J. Stallings, *On topological unknotted spheres*, Ann. of Math. Second Series, Vol. 77, no.3, May, 1963, pp. 490–503.

[16] M. Teragaito, *Roll-spun knots*, Math. Proc. Cambridge. Philos. Soc. **113**, no.1 (1992), 91–96.

[17] M. Teragaito, *Twist-roll spun knots*, Proc, Amer, Math, Soc, **122**, no.2 (1994), 597-599.