

強可逆結び目の不変ザイフェルト曲面

日浦 涼太 (広島大学大学院理学研究科)*

概要

結び目の中には、周期結び目や強可逆結び目と呼ばれる対称性を持つ結び目が存在する。周期結び目に対して、周期写像で不変な最小種数ザイフェルト曲面が存在することがEdmonds-Livingston [1]により示された。一方、強可逆結び目に対しては、対合で移り合う互いに交わらない最小種数ザイフェルト曲面の組が存在することがTollefson [9]により示されている。本稿では、まず強可逆結び目に対して対合で不変なザイフェルト曲面を構成するアルゴリズムを与えることにより不変ザイフェルト曲面の存在を証明する(定理 2.2)。この結果により、強可逆結び目に対して“不変種数”を定義することができる。2橋結び目が定める標準的な強可逆結び目に対して、その不変種数を決定する(定理 3.2)。系として、この不変種数と通常の種数の差はいくらでも大きくなり得ることが従う(系 3.3)。

1. 周期結び目と強可逆結び目

ここでは、周期結び目や強可逆結び目の定義を述べ、Edmonds-Livingston [1]及びTollefson [9]による先行研究を紹介する。

定義 1.1. 結び目 K が位数 n の周期結び目 (periodic knot of period n) であるとは、次の2つの条件を満たす位数 n の周期写像 $\varphi : (S^3, K) \rightarrow (S^3, K)$ (つまり、 $\varphi^n = \text{id}$) が存在するときをいう。

(i) $\text{Fix}(\varphi) \cong S^1$.

(ii) $\text{Fix}(\varphi) \cap K = \emptyset$.

定義 1.2. 周期結び目 (K, φ) , (K', φ') が同値 (equivalent) であるとは、 $g(K) = K'$ かつ $g \circ \varphi \circ g^{-1} = \varphi'$ を満たす向きを保つ同相写像 $g : S^3 \rightarrow S^3$ が存在するときをいう。

定義 1.3. 結び目 K が強可逆結び目 (strongly invertible knot) であるとは、次の2つの条件を満たす対合 $h : (S^3, K) \rightarrow (S^3, K)$ (つまり、 $h^2 = \text{id}$) が存在するときをいう。

(i) $\text{Fix}(h) \cong S^1$.

(ii) $\text{Fix}(h) \cap K \cong S^0$.

定義 1.4. 強可逆結び目 (K, h) , (K', h') が同値 (equivalent) であるとは、 $g(K) = K'$ かつ $g \circ h \circ g^{-1} = h'$ を満たす向きを保つ同相写像 $g : S^3 \rightarrow S^3$ が存在するときをいう。

注意 1.5. Smith 予想の肯定的解決 [6]により、定義 1.1と定義 1.3における φ と h は標準的な回転と同値であることが証明されている。

例 1.6. 三つ葉結び目は周期3の周期結び目であり、8の字結び目は強可逆結び目である。

* 〒739-0044 広島県東広島市鏡山1-3-1 広島大学 大学院理学研究科
e-mail: ry.hiura+knot@gmail.com

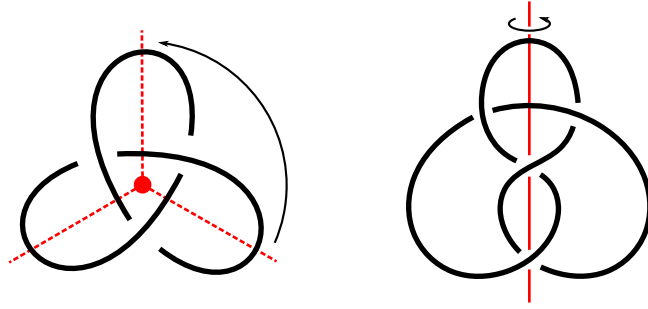


図 1

周期結び目に対して, Edmonds-Livingston [1] によって次のことが証明されている.

定理 1.7 ([1, Corollary 2.2]). 任意の周期結び目 (K, φ) は, φ -同変圧縮不可能ザイフェルト曲面 S を持つ. 特に, K がファイバー結び目であるならば, S は最小種数ザイフェルト曲面である.

M を 3 次元多様体とし, F を M に適切に埋め込まれた曲面とする. ただし F は 2 次元球面でも円板でもないものとする. G を有限群とし, G は M へ効果的に (effectively) 作用しているとする.

定義 1.8. (1) 任意の元 $g \in G$ に対して $gD = D$ または $gD \cap D = \emptyset$ を満たす F の圧縮円板 D を G -同変圧縮円板 (G -equivariant compressing disk) といい, 曲面 F を G -同変圧縮可能曲面 (G -equivariant compressible surface) という. F が G -同変圧縮可能曲面でないとき G -同変圧縮不可能曲面 (G -equivariant incompressible surface) という.

(2) 任意の元 $g \in G$ に対して $gD = D$ または $gD \cap D = \emptyset$ を満たす F の境界圧縮円板 D を G -同変境界圧縮円板 (G -equivariant boundary compressing disk) といい, 曲面 F を G -同変境界圧縮可能曲面 (G -equivariant boundary compressible surface) という. F が G -同変境界圧縮可能曲面でないとき G -同変境界圧縮不可能曲面 (G -equivariant boundary incompressible surface) という.

(3) $G = \langle \varphi \rangle$ のとき単に φ -同変 (φ -equivariant) という.

一方で強可逆結び目に対して, 次のことが Tollefson [9] により示された.

定理 1.9 ([9, Theorem 6]). 任意の強可逆結び目 (K, h) に対して, h で互いに移り合う互いに交わらない最小種数ザイフェルト曲面の組 (S_1, S_2) が存在する.

また, 最小種数ザイフェルト曲面が対合で不変でないような強可逆結び目が存在することも知られている.

例 1.10. 図 2 の結び目は最小種数ザイフェルト曲面をイソトピーを除いて丁度 2 つ持つことが知られている [4, 5, 8]. 2 つ最小種数ザイフェルト曲面は図 2 のようにバンドを 2 つ貼り, ザイフェルト円周に円板を手前から貼ったものと, 奥から貼ったものである. この 2 つの曲面は対合によって互いに移り合い, 不変ではない.

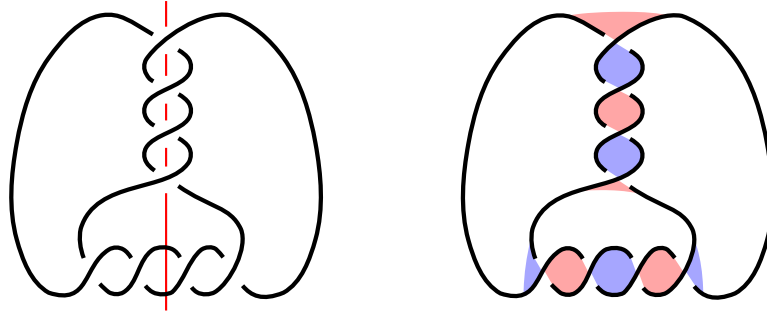


図 2

2. 不変ザイフェルト曲面を構成するアルゴリズム

まずはじめに不変ザイフェルト曲面を定義する.

定義 2.1. 強可逆結び目 (K, h) に対して, K のザイフェルト曲面 S が (K, h) の不変ザイフェルト曲面 (invariant Seifert surface) であるとは, $h(S) = S$ を満たすときをいう.

この章では, 強可逆結び目 (K, h) の不変ザイフェルト曲面を構成するアルゴリズムを与える. このアルゴリズムの存在により次の定理を得る.

定理 2.2. 任意の強可逆結び目 (K, h) に対して不変ザイフェルト曲面が存在する.

以下 \tilde{S} を (K, h) の不変ザイフェルト曲面とする. $\text{Fix}(h)$ は S^1 と同相であり, K と $\text{Fix}(h)$ は丁度 2 点で交わっていた. そこで, $\text{Fix}(h)$ を $K \cap \text{Fix}(h)$ の 2 点を境界とする 2 つの部分弧に分解する. \tilde{S} はどちらか一方の部分弧を含み, もう一方の部分弧とは交わらない. これは $K \cap \text{Fix}(h)$ の近くを調べることでわかる. \tilde{S} に含まれる部分弧を $\tilde{\delta}$ とおく. また, 射影 $\pi: S^3 \rightarrow S^3/h \cong S^3$ による \tilde{S} , K , $\text{Fix}(h)$, $\tilde{\delta}$ の像をそれぞれ $S = \pi(\tilde{S})$, $k = \pi(K)$, $O = \pi(\text{Fix}(h))$, $\delta = \pi(\tilde{\delta})$ とおく. このとき, 次が成り立つ.

命題 2.3. 強可逆結び目 (K, h) とその不変ザイフェルト曲面から上のように構成される S^3/h 内の曲面 S は次の条件 (i), (ii) を満たす:

(i) $\partial S = \delta \cup k$, $S \cap O = \partial S \cap O = \delta$.

(ii) 任意の閉曲線 $\gamma \subset \mathring{S}$ に対して次のいずれかが成り立つ:

(a) γ が向き保存閉曲線であるならば, $\text{lk}(\gamma, O) \equiv 0 \pmod{2}$ である.

(b) γ が向き逆転閉曲線であるならば, $\text{lk}(\gamma, O) \equiv 1 \pmod{2}$ である.

逆に S^3/h 内の曲面 S が条件 (i), (ii) を満たすならば, その逆像 $\tilde{S} := \pi^{-1}(S)$ は (K, h) の不変ザイフェルト曲面である.

注意 2.4. 条件 (ii) は次の条件と同値である.

(ii)' 絡み数が定める準同型 $H_1(S) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と向き準同型 $H_1(S) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は同じである.

証明. \tilde{S} を $\tilde{\delta}$ を含む (K, h) の不変ザイフェルト曲面とする. すると, $\partial \tilde{S} = K$ かつ $\tilde{S} \cap \text{Fix}(h) = \tilde{\delta}$ であり, $\tilde{\delta}$ は \tilde{S} へ適切に埋め込まれているので, $S = \pi(\tilde{S})$ は条件 (i) を満たす.

次に S が条件 (ii) を満たすことを示す. $S = D \cup (\bigcup_{i=1}^n B_i)$ と仮定してよい. ただし D は円板であり, B_i ($i = 1, 2, \dots, n$) は互いに交わらないバンドであり, $D \cap B_i = \partial D \cap \partial B_i$ は ∂B_i の交わらない 2 本の弧である. $D \cup B_i$ を N_i とおき, γ_i を N_i の中心曲線とする. また, $\delta \subset \partial D$ であると仮定する. $D \setminus \dot{N}(\delta)$ を D_0 とおき, $D_0 \cup B_i$ を \check{N}_i とおく. $N_i = \check{N}_i \cup N(\delta)$ である.

- (a) $\text{lk}(\gamma_i, O) \equiv 0 \pmod{2}$ のとき, $\pi^{-1}(N_i)$ は N_i の 2 つのコピーを δ で貼り合わせて得られる. \tilde{S} が向き付け可能ならば, $\pi^{-1}(N_i)$ も向き付け可能なので, N_i は向き付け可能である. つまり, γ_i は向き保存閉曲線である.
- (b) $\text{lk}(\gamma_i, O) \equiv 1 \pmod{2}$ のとき, $\pi^{-1}(N_i)$ は $\pi^{-1}(\check{N}_i)$ に $\pi^{-1}(N(\delta)) \cong I \times I$ を $I \times \partial I$ で貼り合わせて得られる. 貼り合わせの情報は図 3 で示される. 従って, $\pi^{-1}(N_i)$ が向き付け可能ならば, \check{N}_i は向き付け不可能であるので, γ_i が向き逆転閉曲線である.

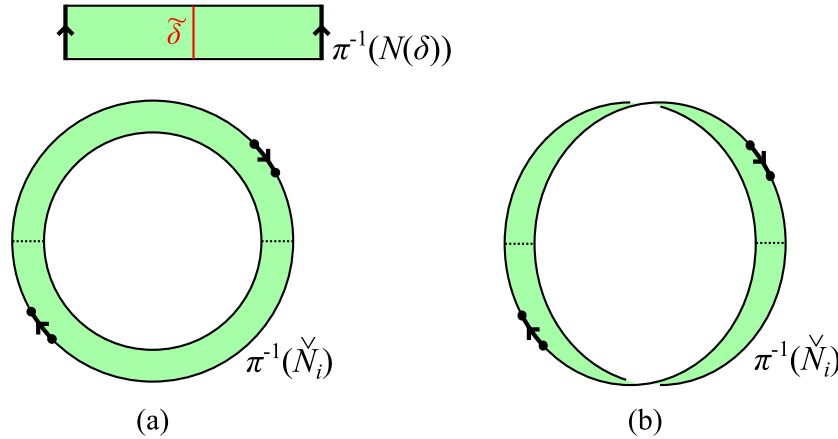


図 3: (a) は $\text{lk}(\gamma_i, O) \equiv 0 \pmod{2}$ のときを表しており, (b) は $\text{lk}(\gamma_i, O) \equiv 1 \pmod{2}$ のときを表している. 矢印の向きに合わせて $\pi^{-1}(N(\delta))$ の “両端” を貼り合わせると, (a) は向き付け不可能であり, (b) は向き付け可能であることが分かる.

以上により, S は条件 (ii) を満たす.

逆に, S^3/h 内の曲面 S が条件 (i), (ii) を満たしていれば, 上の議論によりその逆像 $\tilde{S} := \pi^{-1}(S)$ は $\tilde{\delta}$ を含む (K, h) の不変ザイフェルト曲面となることが分かる. \square

次に不変なザイフェルト曲面を構成するアルゴリズムを述べる. アルゴリズムは, 条件 (i), (ii) を満たす S^3/h 内の曲面を構成し, 命題 2.3 を用いて不変ザイフェルト曲面を構成する.

$\theta(K, h) = k \cup O$ とおき, これを (K, h) が定める θ 曲線 (θ -curve) と呼ぶ. このとき, $\theta(K, h)$ は図 4 のような表示を持つと仮定してよい. なぜならば, 一般的には 2 点 $k \cap O$ は “隣り合っていない” が, $k \cap O$ の 1 点を O に沿って滑らせることで, “隣り合う” ようにすることができる. そこで, 図 4 のような θ 曲線を用意し, O と k が絡んでいる部分を “ストラップ” と名付ける. 次は不変ザイフェルト曲面を構成するアルゴリズムである.

Step 1. 図 5-(a) の操作を用いて, ストラップを図 4 で定める “標準的な” 形にする.

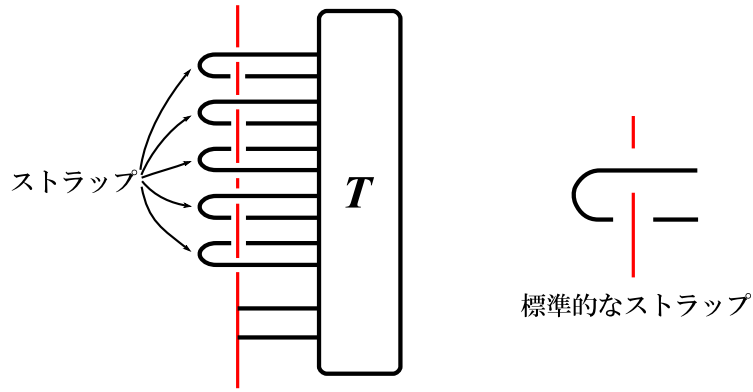


図 4

Step 2. ストラップの個数が奇数の場合は、図 5-(b) の操作によって偶数にする．個数が偶数の場合は何も行わない．

Step 3. k に向きを与え、その向きに従ってストラップに番号を付ける．さらに、必要に応じて図 5-(c) の操作を行い、ストラップを番号順に並び替える．

Step 4. 図 9 で示すように、 δ の近くにバンド B_0 を貼り、各 i ($i = 1, 2, \dots, n$) に対して $2i - 1$ 番目と $2i$ 番目のストラップの間にバンド B_i を貼る．

注意 2.5. $2i - 1$ 番目と $2i$ 番目のストラップのつながり方は図 9 に示される 4 通りの場合があることに注意する．特に、図 9 の部分弧 α は他のストラップを通らないことに注意する．

Step 5. バンド B_i を図 6 のように切り離すことで、 $\theta(K, h)$ から分離された絡み目 $O \cup \tilde{k}$ が得られる．バンド B_i 近くの交差では図 7 で示す向きになるように、絡み目 \tilde{k} に向きを入れてザイフェルトのアルゴリズムを適用する．注意 2.5 より、このような向きはいつでも入れることができる．こうして得られたザイフェルト曲面を \check{S} とおき、 $S := \check{S} \cup (\bigcup_{i=0}^n B_i)$ とおく． S は条件 (i) を満たしていることが構成方法から分かる．また、以下のことから S は条件 (ii) も満たすことも分かる．図 8 で表す S 上の閉曲線を γ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) とする． $H_1(S) = H_1(\check{S}) \oplus \langle \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \rangle$ である． $H_1(\check{S})$ の任意の生成元は、 O と分離される向き保存閉曲線で実現されるので条件 (ii) を満たす．また、各 γ_i も $\text{lk}(\gamma_i, O) = \pm 1$ の向き逆転閉曲線なので条件 (ii) を満たす．従って S は条件 (i), (ii) を満たすので、命題 2.3 より $\pi^{-1}(S)$ は不変ザイフェルト曲面である．

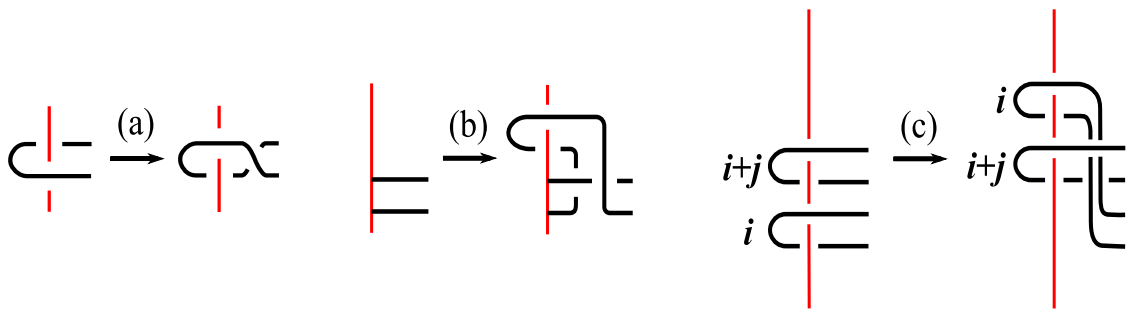


図 5: 操作 (a), (b), (c)

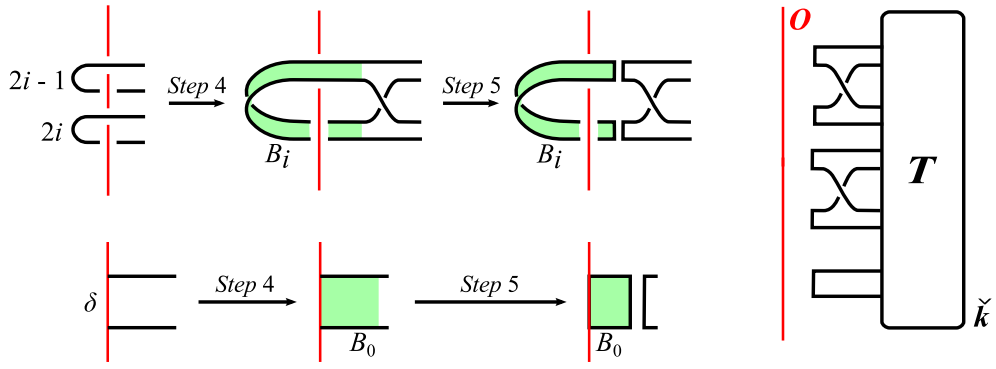


图 6

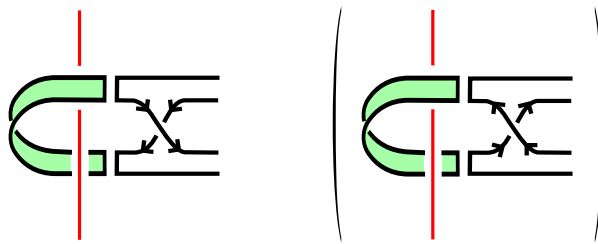


图 7

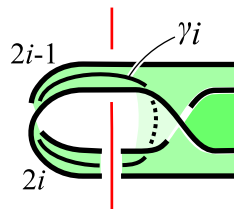


图 8

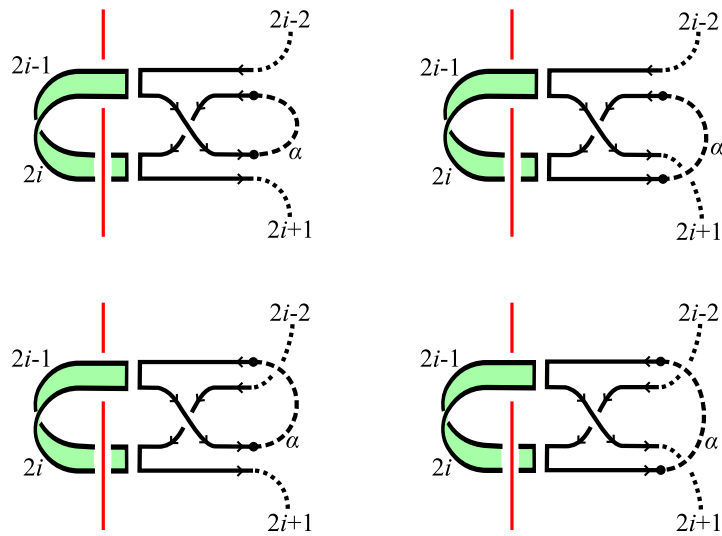
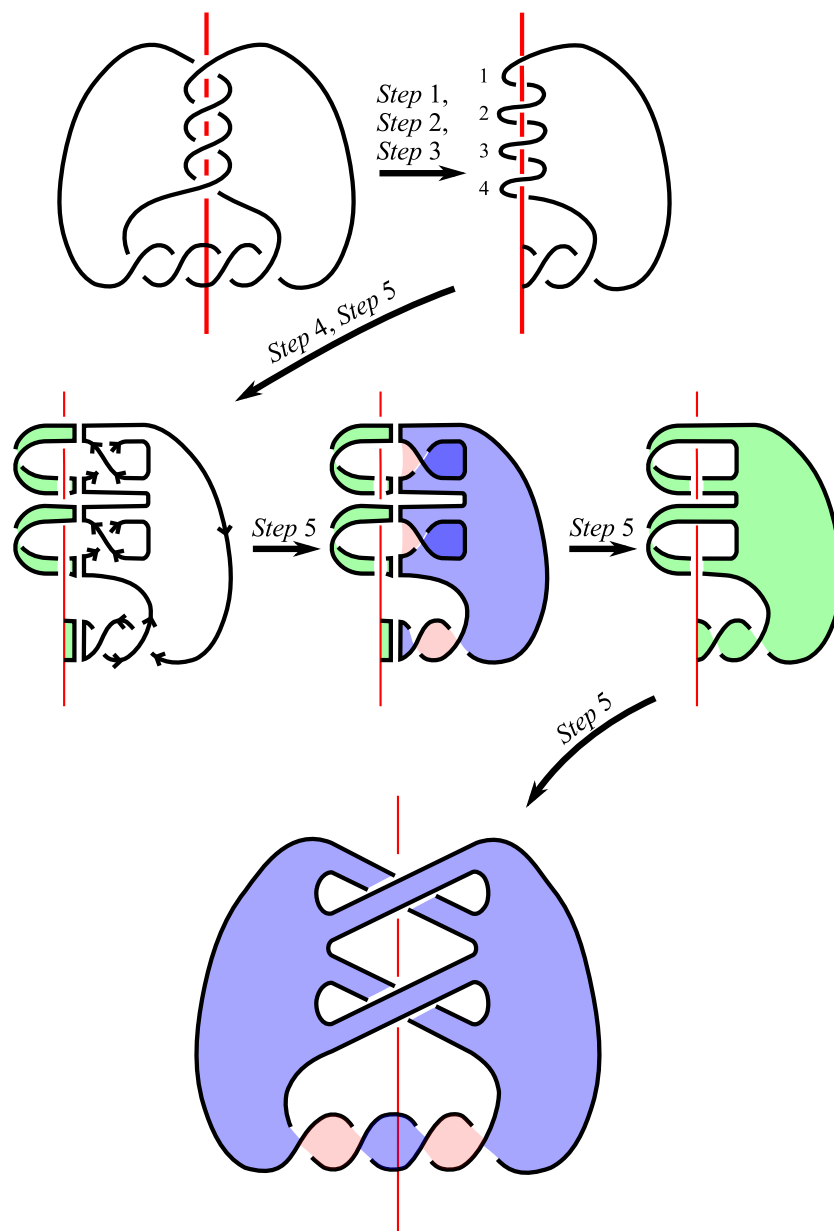


图 9

例 2.6. 例 1.10 の強可逆結び目の不変ザイフェルト曲面の構成



$\text{Fix}(h)$ を $K \cap \text{Fix}(h)$ を境界とする 2 つの部分弧に分解する. この 2 つの部分弧を $\tilde{\delta}_1$, $\tilde{\delta}_2$ とする. このとき, 強可逆結び目 (K, h) の不変種数を次のように定義する.

定義 2.7. $\tilde{\delta}_i$ を含む (K, h) の不変ザイフェルト曲面の最小種数を, 強可逆結び目 (K, h) の部分弧 $\tilde{\delta}_i$ に対する不変種数 (invariant genus) と定義し, $g(K, h, \tilde{\delta}_i)$ で表す.

注意 2.8. (1) $g(K, h, \tilde{\delta}_i) \geq g(K)$ が成り立つ.

(2) $g(K, h, \tilde{\delta}_i)$ は $\tilde{\delta}_i$ ($i = 1, 2$) の選び方に依存する.

強可逆結び目 (K, h) の最小種数不変ザイフェルト曲面は一般には圧縮可能かもしれないが, h -同変圧縮不可能かつ h -同変境界圧縮不可能曲面である.

例 2.9. 例 2.6 で求めた不変ザイフェルト曲面は, 圧縮可能であるが h -同変圧縮不可能な例になっている. 実際, 図 10 で表される閉曲線を境界とする分離円板が存在するの

で圧縮可能である。しかし、この分離円板は h -同変ではない。後述の定理 3.2 によりこの不変ザイフェルト曲面は最小種数であり、従って h -同変圧縮不可能である。

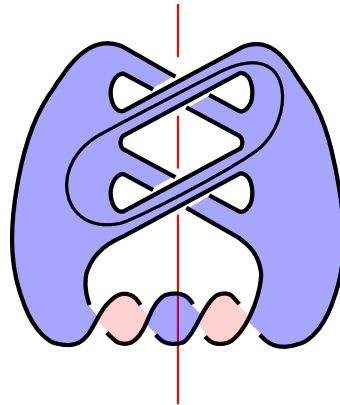


図 10

3. 2 橋結び目から造られる強可逆結び目の不変種数

ここでは、2 橋結び目の不変種数を決定する。まずはその準備として 2 橋結び目に関する既に知られている事実を述べる。

3.1. 2 橋結び目の対合

$$\frac{p}{q} = r + [a_1, a_2, \dots, a_n] := r + \frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_2 - \dots - \frac{1}{a_n}}}, \quad r, a_i \in \mathbb{Z}$$

p/q が上のような連分数展開を持つとき、2 橋絡み目 $K_{p/q}$ は図 11 で表すように n 本のバンドをプラミング (plumbing) して得られる曲面の境界となっている。 i 番目のバンドは a_i 回半ひねりされている ($a_i > 0$ のとき右ひねりであり、 $a_i < 0$ のとき左ひねりである)。このとき $K_{p/q}$ を $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ で表し、この表示法を **Conway 表示** (Conway notation) という。

2 橋結び目 $K_{p/q}$, $K_{p'/q'}$ に対して、 $q' = q$ かつ $p' \equiv p^{\pm 1} \pmod{q}$ が成り立つとき $K_{p/q} = K_{p'/q'}$ となる。以下、奇数 q と $|p| < |q|$ を満たす偶数 p によって 2 橋結び目 $K_{p/q}$ を表すことにする。すると、 p/q は $p/q = [2b_1, 2b_2, \dots, 2b_{2n}]$ という連分数展開を持つ。 $K_{p/q}$ の対合は Sakuma [7] によって次のように分類される。

定理 3.1 ([7, Proposition 3.6]). $K_{p/q}$ は次のような対合を持つ強可逆結び目である。

- (1) $p^2 \not\equiv 1 \pmod{q}$ のとき $K_{p/q}$ の対合は図 12 で表す軸 α と軸 β における 180° 回転である。
- (2) $p^2 \equiv 1 \pmod{q}$ のとき $K_{p/q}$ の対合は図 12 で表す軸 α と軸 γ における 180° 回転である。

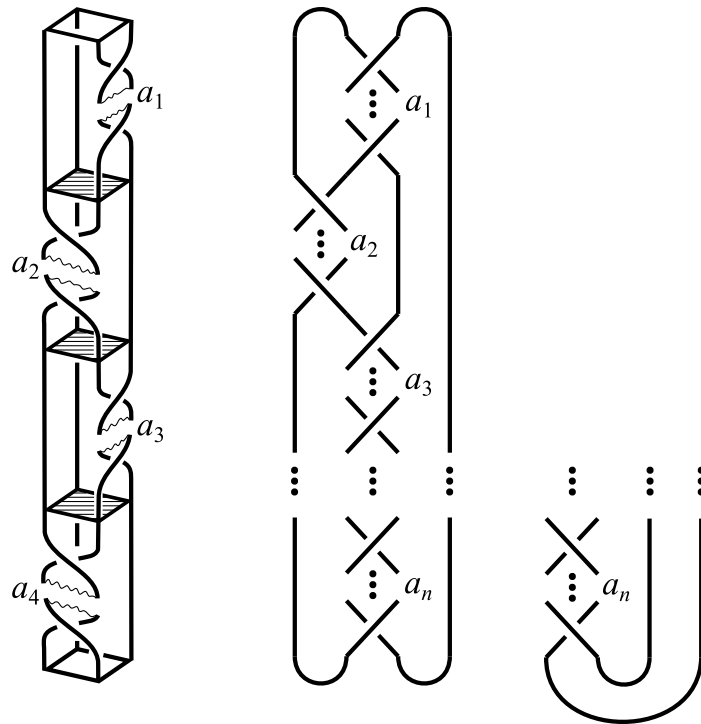


図 11: 中図は n が奇数のときを表しており, 右図は n が偶数のときを表している.

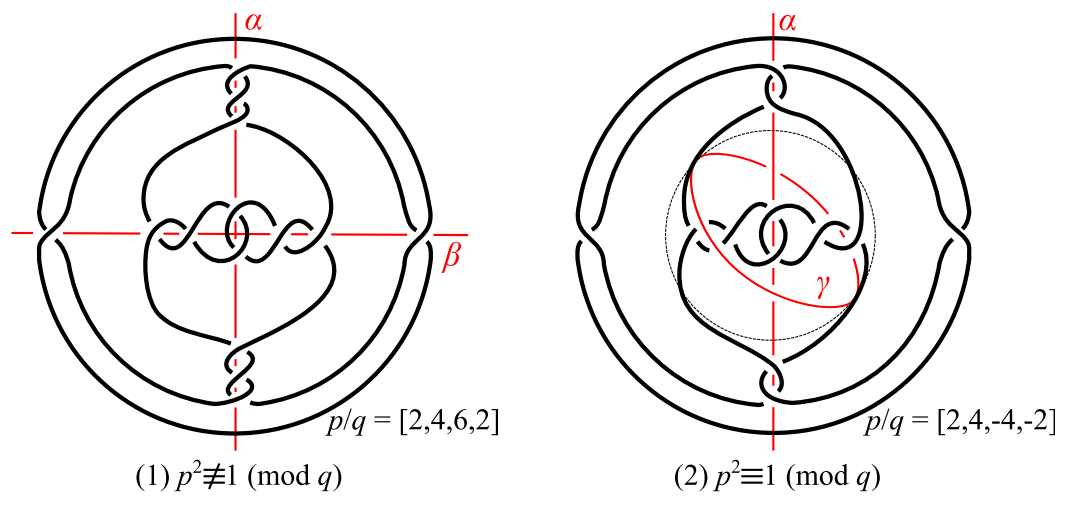


図 12

3.2. Farey タイル貼り

ここでは、定理 3.2 の証明で重要な Farey タイル貼りについて述べる。

複素平面を \mathbb{C} で表し、 \mathbb{C} の上半平面を $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ とおく。図 13 で表される \mathbb{H}^2 のタイル貼りのことを **Farey タイル貼り** (Farey tessellation) と呼び、 $\mathbb{Q} \cup \{1/0\}$ を Farey タイル貼りの頂点集合とみなす。Farey タイル貼りは $\{0/1, 1/1, 1/0\}$ を理想頂点とする理想三角形を、各辺における鏡映変換により生成される群で写すことにより得られる。2つの頂点 a/b と c/d が $ad - bc = \pm 1$ を満たすとき、それらを結ぶ辺 (edge) が存在する。

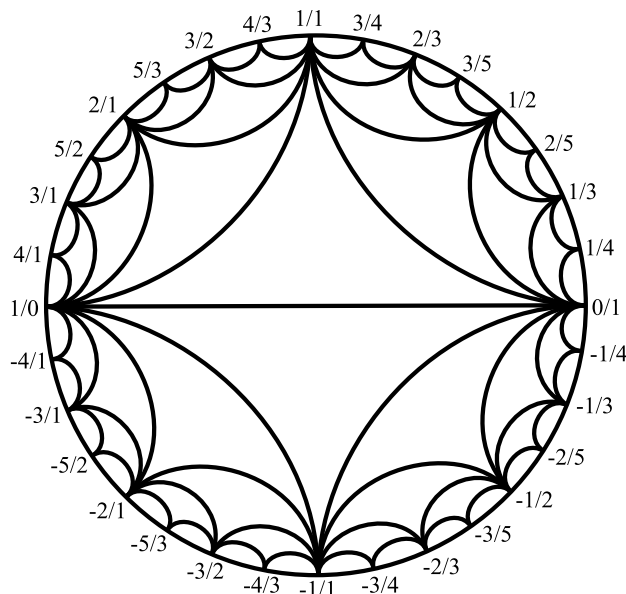


図 13

また、Farey タイル貼り内の $1/0$ と p/q を結ぶ辺の道 (edge-path) (または単に道 (path)) と連分数展開 $p/q = r + [a_1, a_2, \dots, a_n]$ が 1 対 1 に対応する。正確には、 $1/0$ と p/q を結ぶ辺の道における頂点の列と、部分和 $p_i/q_i = [a_1, \dots, a_i]$ が一致する。 $1/0$ と p/q を結ぶ辺の道は、 $a_i > 0$ のとき頂点 p_{i-1}/q_{i-1} で左に三角形 $|a_i|$ 個通り過ぎるように曲がり、 $a_i < 0$ のとき右に曲がる。道が次の 2 つの条件を満たすとき極小 (minimal) であるという：

- (i) 同じ道は 2 度通らない。
- (ii) 1 つの理想三角形の 2 辺を通らない。

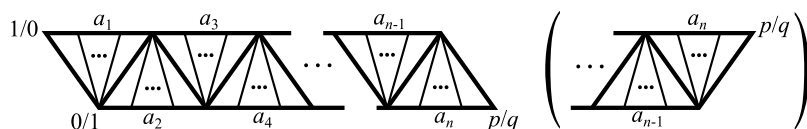


図 14

$1/0$ と p/q を結ぶすべての極小道は図 14 で表される Farey タイル貼り内の部分複体に含まれる。ここで各 a_i は次の一意的な連分数展開によって定まる：

$$\frac{p}{q} = [a_1, -a_2, a_3, -a_4, \dots, \pm a_n] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}, \quad a_i > 0, a_n > 1.$$

3.3. 2橋結び目の不変種数

本稿では図 12 の軸 α, β における 180° 回転のみ扱う。不変種数の決定には Hatcher-Thurston [4] の手法を用いる。

以下、2橋結び目 K は $C(2b_1, 2b_2, \dots, 2b_{2n})$ という Conway 表示を持つものとし、対合 h を図 12 の軸 α または軸 β における 180° 回転とする。 $\tilde{\delta}_1$ を $\text{Fix}(h)$ の ∞ を通る部分弧とし、 $\tilde{\delta}_2$ をもう一方の部分弧とする。このとき、次のような 2橋結び目の不変種数を計算する公式を得る。

定理 3.2. 以下の 2 つが成り立つ：

- (1) $g(K, h, \tilde{\delta}_1) = \sum_{i: \text{odd}} |b_i|$.
- (2) 各 i ($i = 1, 2, \dots, 2n$) に対して $b_i > 0$ であり、 b_2, b_4, \dots, b_{2n} がすべて偶数であるならば、 $g(K, h, \tilde{\delta}_2) = 2n$.

この定理から次のことがすぐに分かる。

系 3.3. 2橋結び目の不変種数と通常の種数の差はいくらでも大きくすることができる。

証明. $K = C(2b_1, 2b_2, \dots, 2b_{2n})$ のとき $g(K) = n$ である [4, 3]。従って

$$g(K, h, \tilde{\delta}_1) - g(K) = \sum_{i: \text{odd}} |b_i - 1|,$$

$$g(K, h, \tilde{\delta}_2) - g(K) = n$$

となり、差はいくらでも大きくすることができる。 □

定理 3.2(1) の証明には Hatcher-Thurston [4] の議論を用いる。具体的にいうと、2橋絡み目の補空間内の圧縮不可能かつ境界圧縮不可能曲面と、Farey タイル貼り内の道を関連付けることである。

\tilde{S} を $\tilde{\delta}_1$ を含む (K, h) の不変ザイフェルト曲面のうち最小種数のものとする。射影 $\pi : S^3 \rightarrow S^3/h \cong S^3$ による $\tilde{S}, K, \text{Fix}(h), \tilde{\delta}_i$ ($i = 1, 2$) の像をそれぞれ S, k, O, δ_i ($i = 1, 2$) とおく。 δ_1 の S における正則近傍を $N(\delta_1)$ で表す。すると、 $N(\delta_1)$ は m 回全ひねりされた円板になっている。ただし m は整数で、円板は $m > 0$ のときは右ひねり、 $m < 0$ のときは左ひねりされているとする。そこで、 $\overline{S \setminus N(\delta_1)}$ を S' とおき、 $\partial S'$ を k' とおく。このとき、 $k' \cup O$ は Conway 表示 $C(4b_1, b_2, 4b_3, b_4, \dots, b_{2n}, 2m)$ を持つ 2橋絡み目となる。この 2橋絡み目を $K' = K_{p/q}$ とおく。ただし、 p と q は互いに素な整数で $p/q = [4b_1, b_2, 4b_3, b_4, \dots, b_{2n}, 2m]$ を満たす。

補題 3.4. S' は $E(K') = (S^3/h) \setminus \mathring{N}(K')$ 内で圧縮不可能かつ境界圧縮不可能な曲面であり、次の条件 (i)'', (ii)'' を満たす：

(i)'' $\partial S' = k', S' \cap O = \emptyset$.

(ii)'' 任意の閉曲線 $\gamma \subset S'$ に対して次が成り立つ :

(a) γ が向き保存閉曲線であるならば, $\text{lk}(\gamma, O) \equiv 0 \pmod{2}$ である.

(b) γ が向き逆転閉曲線であるならば, $\text{lk}(\gamma, O) \equiv 1 \pmod{2}$ である.

注意 3.5. 条件 (i)'', (ii)'' は命題 2.3 の曲面 S に対する条件 (i), (ii) を曲面 S' に合わせて少しアレンジしたものである.

証明. S' は圧縮可能曲面であると仮定する. すると, 分離円板 $D \subset E(K')$ が存在する. $\pi^{-1}(D) \subset E(K)$ は \tilde{S} の h -同変分離円板または h -同変分離円板の組になっている. これは \tilde{S} が h -同変圧縮不可能曲面であることに矛盾する. よって S' は圧縮不可能である. 同様にして, S' が境界圧縮不可能であることも示せる. また, S は命題 2.3 の条件 (i), (ii) を満たしていることから, $S' = S \setminus N(\delta_1)$ は条件 (i)'', (ii)'' を満たす. \square

自然な射影 $S^3/h \cong S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ のレベル球面を $S_t^2 = S^2 \times \{t\} \subset S^2 \times \mathbb{R} \subset S^3$ で表す. S_t^2 と \mathbb{R}^2/Γ を同一視する. ただし Γ は \mathbb{R}^2 内の格子点 \mathbb{Z}^2 における 180° 回転によって生成される群とする. さらに, $K' \subset S^2 \times [0, 1]$ を仮定し, $K' \cap S_t^2$ は, $t = 1$ のとき傾き $1/0$ の 2 本の弧であり, $t = 0$ のとき傾き p/q の 2 本の弧であり, $0 < t < 1$ のときは 4 点であると仮定する. このとき, $k' \cap S_t^2$ と $O \cap S_t^2$ は, $t = 0, 1$ のときそれぞれ 1 本の弧であり, $0 < t < 1$ のときそれぞれ 2 点である. また, S' 上の高さ関数は Morse 関数であり, S' の特異点はすべて異なるレベルにあると仮定してよい. 正則点 t ($0 < t < 1$) に対して, $S' \cap S_t^2$ は $k' \cap S_t^2$ を結ぶ 1 本の弧と有限個の単純閉曲線から構成される. $S' \cap S_t^2$ の弧の傾きは S' の鞍点でのみ変化する. その弧の傾きは, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して, $t = 1 - \varepsilon$ のとき $1/0$ であり, $t = 0 + \varepsilon$ のとき p/q である. 次の補題 3.6 より, $S' \cap S_t^2$ ($0 < t < 1$) は弧だけで構成される.

補題 3.6 (cf. [4, 2]). S' を同位変形して, $S' \cap S_t^2$ ($0 < t < 1$) 内のすべての単純閉曲線を取り除くことができる.

証明. $S' \cap S_t^2$ 内の単純閉曲線は次の 3 種類が考えられる :

(1) 自明な単純閉曲線 (つまり $S_t^2 \setminus K'$ 内の円板の境界になっているもの).

(2) 4 点 $S_t^2 \cap K'$ を 1 点と 3 点に分ける単純閉曲線.

(3) 4 点 $S_t^2 \cap K'$ を 2 組に分ける単純閉曲線.

(1) の単純閉曲線が存在するとき, S' は極大点または極小点を持つ. [2, Proposition 2.1] を適用することで S' はすべての極大点または極小点を取り除くことができる. そのため, (1) の単純閉曲線は取り除くことができる. (2) の単純閉曲線は S' の向き保存閉曲線であり, O との絡み数は ± 1 である. 従ってそのような単純閉曲線は存在しない. (3) の単純閉曲線は [4, Lemma 2] の証明を見れば存在しないことが分かる. \square

$S' \cap S_t^2$ ($0 < t < 1$) の弧の傾きを $\lambda(S_t^2)$ ($0 < t < 1$) で表す. $\lambda(S_1^2) = 1/0$, $\lambda(S_0^2) = p/q$ であり, $\lambda(S_t^2)$ の値は鞍点でのみ変化する. $\lambda(S_t^2)$ の値が変化する鞍点を本質的な鞍点 (essential saddle) と呼ぶ. 次の補題 3.7 から, S' は本質的な鞍点しか持たないことが分かる.

補題 3.7. S' には同相なものを除いて図 15 のような鞍点しか存在しない.

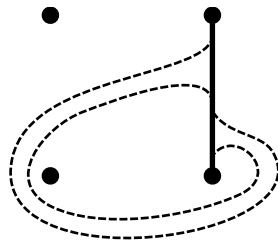


図 15

証明. 鞍点の形は同相なものを除いて図 16 で表す 4 種類が考えられる. (a) と (b) の鞍

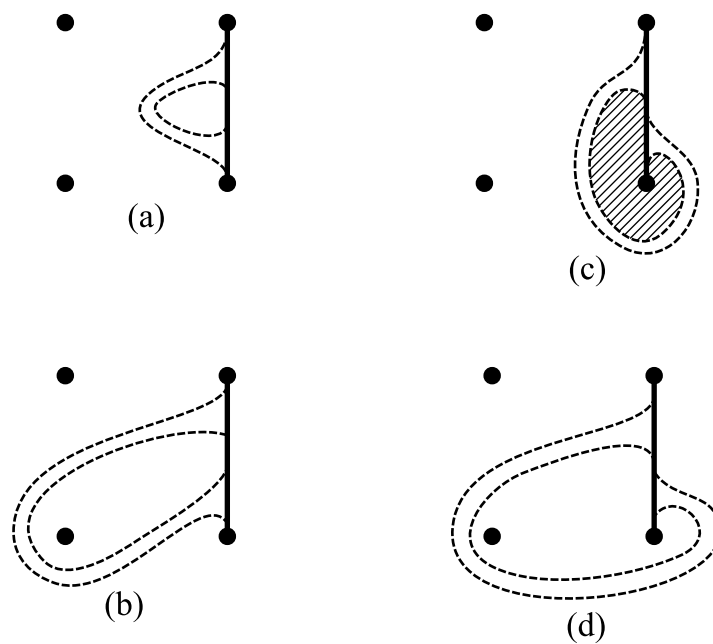


図 16

点は単純閉曲線が生じるので存在しない. (c) のとき, 影のついた分離円板が生じるので S' は境界圧縮可能曲面である. 従って, (c) の鞍点も存在しない. 一方で, (d) の鞍点が存在しても S' は補題 3.4 と補題 3.6 を満たす. \square

$\lambda_0 = 1/0, \lambda_1, \dots, \lambda_l = p/q$ を $t = 1$ から $t = 0$ までの $\lambda(S_t^2)$ の列とする. ただし $\lambda_i \neq \lambda_{i+1}$ とする.

補題 3.8 ([4, Lemma 2]). S' を同位変形することで, 任意の i に対して $\lambda_i \neq \lambda_{i+2}$ とすることができる.

鞍点の通過前後での $S' \cap S_t^2$ の傾きの変化は次のように Farey タイル貼りを用いて表すことができる.

補題 3.9. 各 i ($i = 1, 2, \dots, l-1$) に対して, λ_i と λ_{i+1} は頂点 s_i を経由して辺で結ばれる. さらに, この 2 辺 $\overline{\lambda_i s_i}, \overline{\lambda_{i+1} s_i}$ の間には 4 つの理想三角形が存在する (図 17).

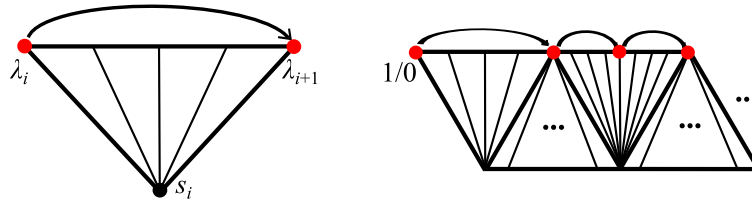


図 17

証明. 補題 3.7 より, 図 15 で表される鞍点の場合のみ考えればよい. この鞍点の通過前後での $S' \cap S_t^2$ の傾きは $1/0$ から $1/4$ に変化している. この変化を Farey タイル貼りを用いて表すと, $1/0$ と $1/4$ は $0/1$ を経由して辺で結ばれており, 2 辺の間には 4 つの理想三角形が存在する. \square

補題 3.8 と Farey タイル貼りの双対グラフ (dual graph) が木 (tree) であることから, $\lambda(S_t^2)$ の列は一意に定まる. このことから, S' の鞍点の数は $m = 0$ のとき最小となり, その値は $\sum_{i: \text{odd}} |b_i|$ であることが分かる.

定義 3.10. (1) 図式の双対グラフとは, 図式内の三角形を頂点集合とし, 隣接する三角形の頂点を辺で結んで得られるグラフをいう.

補題 3.11. (1) $\chi(S) = \chi(S')$.

(2) $\chi(\tilde{S}) = 2\chi(S) - 1$.

証明. (1) S と S' は同相なので成り立つ. (2) \tilde{S} は S' の 2 重被覆に $\pi^{-1}(N(\delta_1)) \cong I \times I$ を $I \times \partial I$ で貼り合わせたものである. そのため $\chi(\tilde{S}) = 2\chi(S') - 1$ が成り立つので, (1) を適用することで示される. \square

定理 3.2 (1) の証明. $n = \sum_{i: \text{odd}} |b_i|$ とおくと, S' は円板 D に n 本のバンド $I \times I$ を $I \times \partial I$ で貼り合わせたものと思えるので,

$$\begin{aligned} \chi(S') &= \chi(D) + n\chi(I \times I) - 2n\chi(I) \\ &= 1 + n - 2n \\ &= 1 - n. \end{aligned}$$

補題 3.11(1), (2) より,

$$\begin{aligned} \chi(\tilde{S}) &= 2\chi(S') - 1 \\ &= 2(1 - n) - 1 \\ &= 2 - 2n. \end{aligned}$$

従って,

$$g(\tilde{S}) = n = \sum_{i: \text{odd}} |b_i|.$$

\square

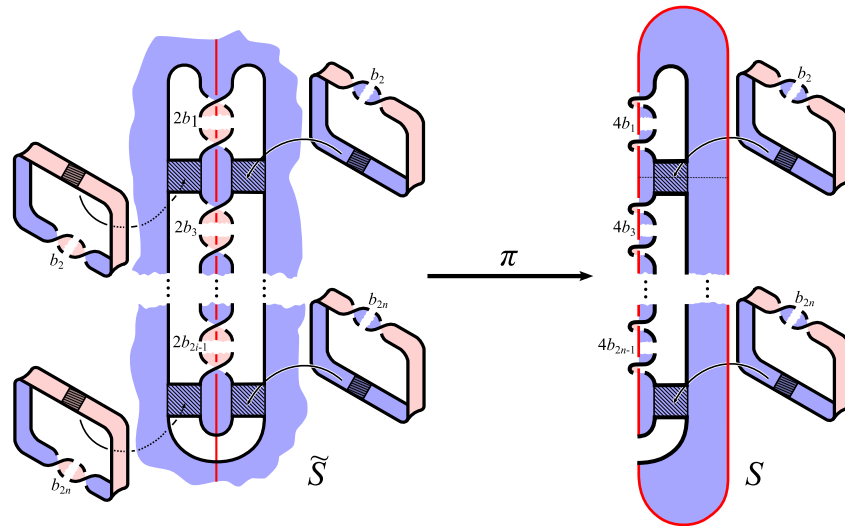


図 18

定理 3.2 (2) の証明. 図 18 で表される (K, h) の不変ザイフェルト曲面 \tilde{S} の種数は n である. そこで \tilde{S} が最小種数であることを示す. そのために $S := \pi(\tilde{S})$ が命題 2.3 の条件 (i), (ii) を満たす曲面の中で最小ベッチ数であることを示す. S は $4b_{2i-1}$ 回半ひねりされたバンドの連結和に b_{2i} 回半ひねりされたバンドをプラミングして得られる (図 18). このことから S のベッチ数は n である.

一方, $k \cup \delta_2$ は Conway 表示 $C(4b_1, b_2, 4b_3, b_4, \dots, b_{2n})$ を持つ 2 橋結び目である. この 2 橋結び目を $K' = K_{p/q}$ とおく. ただし $p/q = [4b_1, b_2, 4b_3, b_4, \dots, b_{2n}]$ とする. 各 i に対して $b_i > 1$ であるので, Farey タイル貼りにおいて部分和 p_i/q_i を頂点集合とする道が最小道なので, [4, Theorem 1 (b)] より $E(K')$ 内の圧縮不可能かつ境界圧縮不可能曲面の最小ベッチ数は n であることが分かる. 従って, S は条件 (i), (ii) を満たす曲面の中で最小種数である. \square

謝辞

講演の機会を与えてくださった日本大学の市原一裕先生, 茂手木公彦先生には心よりお礼申し上げます. また本研究を進める中で, 大変有益な助言をくださった名古屋工業大学の平澤美可三先生には改めてお礼申し上げます. そして, 指導教員の作間誠先生には問題の示唆をはじめ非常に有益な助言をたくさん頂きました. この場をお借りして, ご指導ご鞭撻の数々に深く感謝申し上げます. 執筆にあたって, 丁寧かつ熱心に推敲していただいた先輩の阪田直樹さん, 片山拓弥さんには深く感謝申し上げます.

参考文献

- [1] A. L. Edmonds and C. Livingston, *Group actions on fibered three-manifolds*, Comment. Math. Helv. **58** (1983), no. 4, 529–542.
- [2] W. Floyd and A. Hatcher, *Incompressible surfaces in punctured-torus bundles*, Topology Appl. **13** (1982), no. 3, 263–282.
- [3] D. Gabai, *The Murasugi sum is a natural geometric operation*, Low-dimensional topology (San Francisco, Calif., 1981), Contemp. Math., vol. 20, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983, pp. 131–143.
- [4] A. Hatcher and W. Thurston, *Incompressible surfaces in 2-bridge knot complements*, Invent. Math. **79** (1985), no. 2, 225–246.

- [5] T. Kobayashi, *Uniqueness of minimal genus Seifert surfaces for links*, Topology Appl. **33** (1989), no. 3, 265–279.
- [6] J. W. Morgan and H. Bass (eds.), *The Smith conjecture*, Pure and Applied Mathematics, vol. 112, Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1984. Papers presented at the symposium held at Columbia University, New York, 1979.
- [7] M. Sakuma, *On strongly invertible knots*, Algebraic and topological theories (Kinosaki, 1984), Kinokuniya, Tokyo, 1986, pp. 176–196.
- [8] ———, *Minimal genus Seifert surfaces for special arborescent links*, Osaka J. Math. **31** (1994), no. 4, 861–905.
- [9] J. L. Tollefson, *Innermost disk pairs in least weight normal surfaces*, Topology Appl. **65** (1995), no. 2, 139–154.