Topology of the Milnor fibrations of polar weighted homogeneous polynomials

稲葉和正　(東北大学)*

1. Mixed polynomials

$P(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}})$ を複素変数 $\mathbf{z}=(z_1,\dots,z_n)$ とその複素共役 $\bar{\mathbf{z}}=(\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_n)$ を用いて次のように表される多項式とする:

$$P(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}}):=\sum_{\nu,\mu}c_{\nu,\mu}\mathbf{z}^{\nu}\bar{\mathbf{z}}^{\mu},$$

ここで $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)$ に対して $\mathbf{z}^{\nu}=z_1^{\nu_1}\cdots z_n^{\nu_n}$ ($\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)$ に対して $\bar{\mathbf{z}}^{\mu}=\bar{z}_1^{\mu_1}\cdots\bar{z}_n^{\mu_n}$) と定める．このような多項式を混合多項式と呼ぶ [10, 11].

$\rho_1(\mathbf{x},\mathbf{y})$ と $\rho_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$ を $\mathbb{R}^{2n}$ から $\mathbb{R}$ への実多項式写像とし, 実変数を $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n),\mathbf{y}=(y_1,\dots,y_n)$ とおく．このとき $(\rho_1,\rho_2):\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^2$ は次のように混合多項式写像で表すことができる:

$$P(\mathbf{z},\bar{\mathbf{z}}):=\rho_1\Big(\frac{\mathbf{z}+\bar{\mathbf{z}}}{2},\frac{\mathbf{z}-\bar{\mathbf{z}}}{2i}\Big)+i\rho_2\Big(\frac{\mathbf{z}+\bar{\mathbf{z}}}{2},\frac{\mathbf{z}-\bar{\mathbf{z}}}{2i}\Big),$$

ここで $\Re z_j=x_j,\Im z_j=y_j$ $(j=1,\dots,n)$ とする．また $\Re P$ と $\Im P$ はそれぞれ混合多項式 P の実部と虚部とする．$\Re P$ と $\Im P$ のグラディエントが一次従属になる点 $\mathbf{w}\in\mathbb{C}^n$ を P の混合特異点という．

1.1. Milnor fibrations

$P(\mathbf{z})$ は $\mathbb{C}^n$ の原点 $\mathbf{o}=(0,\dots,0)$ で消える n 変数 $\mathbf{z}=(z_1,\dots,z_n)$ の複素多項式とする．原点 $\mathbf{o}$ は $P(\mathbf{z})$ の特異点, つまり $(\partial P/\partial z_1)(\mathbf{o})=\cdots=(\partial P/\partial z_n)(\mathbf{o})=0$ をみたす点とする．1968 年に J. Milnor は次のことを証明した．

Theorem 1 ([9]) 十分小さい正の数 ε_0 が存在して, $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ をみたす任意の正の数 ε に対し,

$$\frac{P}{|P|}:S_{\varepsilon}^{2n-1}\setminus K_P\to S^1$$

は局所自明なファイバー束になる．ここで S_{ε}^{2n-1} は $(2n-1)$ 次元の原点を中心にもつ半径 ε の球面とし, $K_P=S_{\varepsilon}^{2n-1}\cap P^{-1}(0)$ とおく．

このファイバー束を Milnor 束と呼ぶ．原点が $P(\mathbf{z})$ の孤立特異点になるとき, ファイバー F の閉包は内部が F で, 境界が K_P になる滑らかな多様体である．K_P を特異点の絡み目と呼ぶ．

1.2. Polar weighted homogeneous 多項式

この章では複素多項式とは限らない混合多項式で Milnor 束をもつクラスを紹介する．$(p_1,\dots,p_n)$ と $(q_1,\dots,q_n)$ は $\gcd(p_1,\dots,p_n)=\gcd(q_1,\dots,q_n)=1$ をみたす整数の組とする．このとき $\mathbb{C}^n$ 上の S^1-作用と $\mathbb{R}^*$-作用を次のように定義する:

$$s\circ\mathbf{z}=(s^{p_1}z_1,\dots,s^{p_n}z_n),\quad s\in S^1,$$
$$r\circ\mathbf{z}=(r^{q_1}z_1,\dots,r^{q_n}z_n),\quad r\in\mathbb{R}^*.$$

* Mathematical Institute, Tohoku University, Sendai 980-8578
e-mail: sb0d02@math.tohoku.ac.jp

もし正の整数 d_p が存在して $P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ が次の等式をみたすとする:

$$P(s^{p_1} z_1, \ldots, s^{p_n} z_n, \bar{s}^{p_1} \bar{z}_1, \ldots, \bar{s}^{p_1} \bar{z}_n) = s^{d_p} P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}), \quad s \in S^1,$$

このとき混合多項式 P は polar weighted homogeneous であるという．また正の整数 d_r が存在して $P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ が次の等式をみたすとき, P は radial weighted homogeneous であるという:

$$P(r^{q_1} z_1, \ldots, r^{q_n} z_n, r^{q_1} \bar{z}_1, \ldots, r^{q_n} \bar{z}_n) = r^{d_r} P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}), \quad r \in \mathbb{R}^*.$$

混合多項式 P が polar かつ radial weighted homogeneous ならば,

$$P : \mathbb{C}^n \setminus P^{-1}(0) \to \mathbb{C}^*$$

は局所自明なファイバー束である．ファイバー束のファイバーを $F = P^{-1}(1)$ とおく．このときモノドロミー写像 $h : F \to F$ は

$$h(\mathbf{z}) = \exp\big(\frac{2\pi i}{d_p}\big) \circ \mathbf{z} = \Big(z_1 \exp\big(\frac{2p_1 \pi i}{d_p}\big), \ldots, z_n \exp\big(\frac{2p_n \pi i}{d_p}\big)\Big)$$

で与えられる [12, 2, 10, 11]. また次が成り立つ.

Theorem 2 ([11]) P が polar かつ radial weighted homogeneous ならば, 次の二つのファイバー束は

$$P : D_\varepsilon^{2n} \cap P^{-1}(\partial D_\delta^2) \to \partial D_\delta^2, \quad \frac{P}{|P|} : S_\varepsilon^{2n-1} \setminus \mathrm{Int} N(K_P) \to S^1$$

同型である, ここで $K_P = S_\varepsilon^{2n-1} \cap P^{-1}(0)$.

P は polar weighted homogeneous かつ原点を孤立特異点にもつ 2 変数混合多項式とする．このとき P の原点の絡み目は Seifert 絡み目になる [4]. 以下では絡み目を $L(P, \mathbf{o})$ で表す． $L(P, \mathbf{o})$ の連結成分の向きが S^1-action と同じ時, *positive component* と呼ぶ. また逆向きになるときは *negative component* と呼ぶ. positive component と negative component の個数をそれぞれ $|L^+(P, \mathbf{o})|$ と $|L^-(P, \mathbf{o})|$ で表す.

2. Deformations

混合多項式 $P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ の変形とは多項式写像

$$F : \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}, (\mathbf{z}, t) \mapsto F_t(\mathbf{z})$$

で, $F_0(\mathbf{z}) = P(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ をみたすものとする．以下では原点 $\mathbf{o}$ は $P(\mathbf{z})$ の孤立特異点と仮定する．複素特異点のとき, 原点の近傍 U と $P(\mathbf{z})$ の変形 F_t で各 $0 < t << 1$ に対して $F_t(\mathbf{z})$ は複素多項式で, U 内の $F_t(\mathbf{z})$ の特異点は Morse 特異点になるものが存在する (Morsification) [3]. ここで Morse 特異点とは次の多項式の特異点として表される特異点のことである: $P(\mathbf{z}) = z_1^2 + \cdots + z_n^2$. また Morse 特異点の十分小さい近傍は $2n$ 次元 n ハンドルになり, 次のような分解が得られる

$$D_\varepsilon^{2n} \cap F_t^{-1}(D_\delta^2) \cong \big(D_\varepsilon^{2n} \cap F_t^{-1}(D_{\delta_t}^2)\big) \cup_\varphi \big(\sqcup_{i=1}^{\ell} (n\text{-handle})_i \big),$$

ここで ℓ は ファイバー曲面の Milnor 数, $\varphi = (\varphi_1, \dots \varphi_\ell)$ は $(n\text{-handle})_i$ の attaching map の組で, 原点中心の 2 次元円板 $D^2_{\delta_t}$ の半径 δ_t は $\delta_t < \delta$ かつ $F_t \mid_{F_t^{-1}(D^2_{\delta_t})}$ が特異点を持たないようにとる.

$S_k(F_t)$ を次のように定義する:

$$S_k(F_t) = \{\mathbf{z} \in U \mid \operatorname{rank} dF_t(\mathbf{z}) = 2 - k\} \qquad (k = 0, 1, 2).$$

このとき $S_0(F_t)$ は F_t の正則点の集合であり, $S_1(F_t) \cup S_2(F_t)$ は F_t の特異点集合である. 一般に polar weighted homogeneous 混合多項式の孤立特異点で Morse 特異点に分裂しないものが存在する [5, 6]. 以下ではそのような混合多項式 P の変形 F_t は次をみたすと仮定する:

1. F_t は各 $0 \le t \ll 1$ で polar weighted homogeneous;
2. 各 $\mathbf{w} \in S_1(F_t)$ で, $\mathbf{w}$ 中心の局所座標 (x_1, x_2, x_3, x_4) で F_t は
$$(F_t/|F_t|, |F_t|) = \bigl(x_1, -x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + c_{t,\mathbf{w}}\bigr),$$
と表すことができる. ここで $c_{t,\mathbf{w}} = |F_t(\mathbf{w})|$ $(\mathbf{w} \in S_1(F_t),\ 0 < t \ll 1)$;
3. $S_2(F_t) = \{\mathbf{o}\}$ 又は $\emptyset$.

条件 1 から $F_t(\mathbf{z})$ の特異点は次の性質を持つ:

- $S_j(F_t)$ の各連結成分は S^1-作用の軌道になる,
- $F_t(S_1(F_t))$ は原点中心の円になる.
- $S_2(F_t) = \{\mathbf{o}\}$ または $\emptyset$.

2.1. Deformation of $f\bar{g}$

上記の仮定をみたす混合多項式の変形は次のような例が存在する. $f(\mathbf{z})$ と $g(\mathbf{z})$ は convenient な 2 変数複素擬斉次多項式で共通の分枝を持たず, 原点が孤立特異点になると仮定する. また $\mathbb{C}^2$ 上の $\mathbb{C}^*$-作用を次のように定義する:

$$c \circ \mathbf{z} = (c^q z_1, c^p z_2), \quad c \in \mathbb{C}^*, \quad \gcd(p, q) = 1.$$

このとき $f(\mathbf{z})\overline{g}(\mathbf{z})$ は $f(c \circ \mathbf{z})\overline{g}(c \circ \mathbf{z}) = c^{pq(m-n)} f(\mathbf{z})\overline{g}(\mathbf{z})\ \ (m > n)$ をみたす. よって $f(\mathbf{z})\overline{g}(\mathbf{z})$ は polar かつ radial weighted homogeneous 混合多項式である.

次のような $f(\mathbf{z})\overline{g}(\mathbf{z})$ の変形を考える:

$$F_t(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z})\overline{g}(\mathbf{z}) + t h(\mathbf{z}),$$

$$h(\mathbf{z}) = \begin{cases} \gamma_1 z_1^{p(m-n)} + \gamma_2 z_2^{q(m-n)} & (g(\mathbf{z})\text{ は線形多項式ではない}) \\ z_1^m \overline{z}_1 + z_1^{m-1} + \gamma z_2^{m-1} & (g(\mathbf{z})\text{ は線形多項式, i.e., } g(\mathbf{z}) = z_1 + \beta z_2). \end{cases}$$

次の性質をみたす $h(\mathbf{z})$ の存在を示すことができる.

Theorem 3 ([7]) 上記の条件 $1, 2, 3$ をみたすように P の変形 F_t をとることができる. また原点 $\mathbf{o}$ のリンク $F_t^{-1}(0) \cap S^3_\varepsilon$ が $(p(m-n), q(m-n))$-トーラス・リンクになる.

2.2. Round handles

X と Y はそれぞれ n 次元の滑らかな多様体とする．このとき X が Y にラウンド k ハンドルを貼り合わせることで得られるとは

1. S^1 上の円板束 E_s^k と E_u^{n-k-1} が存在し，
2. $X \cong Y \cup_\phi E_s^k \oplus E_u^{n-k-1}$ をみたす埋め込み $\varphi : \partial E_s^k \times_{S^1} E_u^{n-k-1} \to \partial Y$ が存在することである，

ここで $E_s^k \oplus E_u^{n-k-1}$ は S^1 上の E_s^k と E_u^{n-k-1} の Whitney 和である [1]．S^1 上のバンドル $E_s^k \oplus E_u^{n-k-1}$ を n 次元ラウンド k ハンドルと呼び，φ を $E_s^k \oplus E_u^{n-k-1}$ の貼り合わせ写像と呼ぶ．

P の変形 F_t の条件 2 から，$S_1(F_t)$ の各連結成分の十分小さい近傍は，4 次元ラウンド 1 ハンドルの構造をもつ．また絶対値 $|F_t|$ は $t > 0$ のとき，$(D_\varepsilon^4 \cap F_t^{-1}(D_\delta^2))/S^1$ から原点の像を除いた空間上の Morse 関数である．このとき $(D_\varepsilon^4 \cap F_t^{-1}(D_\delta^2))/S^1$ のハンドル分解から次の分解が決まる:

$$D_\varepsilon^4 \cap F_t^{-1}(D_\delta^2) \cong \big(D_\varepsilon^4 \cap F_t^{-1}(D_{\delta_t}^2)\big) \cup_\varphi \big(\sqcup_{i=1}^{\ell} \text{(round 1-handle)}_i \big)$$

ここで $D_{\delta_t}^2$ は $D_{\delta_t}^2 \cap F_t(S_1(F_t)) = \emptyset$ をみたす原点中心の円板，$\varphi = (\varphi_1, \ldots \varphi_\ell)$ はラウンド 1 ハンドル達の貼り合わせ写像の組である．

3. Main result

上記の Milnor 束のラウンドハンドルによる分解を考察することで次の定理が得られた．

Theorem 4 ([8]) P は原点を孤立特異点にもつ 2 変数の polar かつ radial weighted homogeneous 多項式とする．また F_t は条件 1, 2 と 3 をみたす P の変形とする．このとき

i. $D_\varepsilon^4 \cap F_t^{-1}(D_{\delta_t}^2)$ の連結成分は 4 次元球体又は，ℓ 個の $S^1 \times B^3$ と微分同相である，ここで B^3 は 3 次元球体，各 φ_i はラウンド 1 ハンドルの貼り合わせ領域を 4 次元球体の境界と $S^1 \times B^3$ の境界に写す; また

ii. ラウンド 1 ハンドルの個数 ℓ は

$$\ell = |L^+(P, \mathbf{o})| - |L^+(F_t, \mathbf{o})| = |L^-(P, \mathbf{o})| - |L^-(F_t, \mathbf{o})|$$

で与えられる．

参考文献

[1] D. Asimov, *Round handles and non-singular Morse-Smale flows*, Ann. Math. **102** (1975), 41–54.

[2] J. L. Cisneros-Molina, *Join theorem for polar weighted homogeneous singularities*, Singularities II, edited by J. P. Brasselet, J. L. Cisneros-Molina, D. Massey, J. Seade and B. Teissier, Contemp, Math. **475**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 43–59.

[3] W. Ebeling, Functions of several complex variables and their singularities, Translated from the 2001 German original by Philip G. Spain, Graduate Studies in Math. 83, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2007.

[4] D. Eisenbud and W. Neumann, Three-Dimensional Link Theory and Invariants of Plane Curve Singularities, Annals of Mathematics Studies 110, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1985.

[5] K. Inaba, *On the enhancement to the Milnor number of a class of mixed polynomials*, J. Math. Soc. Japan. **66** (2014), 25–36.

[6] K. Inaba, *On fibered links of singularities of polar weighted homogeneous mixed polynomials*, Singularities in Geometry and Topology 2011, Advanced Studies in Pure Mathematics **66**, pp. 81–92, 2015.

[7] K. Inaba, *On deformations of isolated singularities of polar weighted homogeneous mixed polynomials*, Osaka J. Math. **53** (2016), 813-842.

[8] K. Inaba, *Topology of the Milnor fibrations of polar weighted homogeneous polynomials*, arXiv:1609.06132.

[9] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Annales of Mathematics Studies 61, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1968.

[10] M. Oka, *Topology of polar weighted homogeneous hypersurfaces*, Kodai Math. J. **31** (2008), 163–182.

[11] M. Oka, *Non-degenerate mixed functions*, Kodai Math. J. **33** (2010), 1–62.

[12] M. A. S. Ruas, J. Seade and A. Verjovsky, *On real singularities with a Milnor fibration*, Trends Math., edited by A. Libgober and M. Tibăr, Birkhäuser, Basel, 2003, 191–213.