Thompson's F and links

井上　侑平　(東北大学)*

概　要

Thompson's F と呼ばれる群の元から任意の絡み目を構成できることが Jones [3] により示されている．F の元に符号を考えることによって新たな絡み目の構成法を得られたので紹介する．

1. 背景

四色定理は1974年に Appel と Haken [1] により解決されたが，その証明は非常に長い．より短い証明を得ようとする試みが Bowlin と Brin [2] によりなされていて，ここで登場するのが Thompson's F である．F の元は binary tree の組であり，これらの辺彩色を考えることが四色定理と同値になっている．また辺彩色から符号を与えることができて，この符号を考えることも四色定理と同値になっている．詳しくは次節で述べる．

Jones は [3] において絡み目から F の元を構成し，また逆に絡み目から F の元を構成した．我々は四色定理と絡み目の繋がりに期待して，符号つきの F の元から任意の絡み目を構成する方法を見つけた．

2. Thompson's F

Definition 2.1. $\mathcal{W} := \{0$ と 1 からなる有限長の word$\} \cup \{\emptyset\}$

$w, x \in \mathcal{W}$ に対し wx と書いたら，w の末尾に x を書き加えた word とする．ここでの $\emptyset$ は空の word であり，$\emptyset w = w\emptyset = w$ である．

Definition 2.2. 有限集合 T が binary tree であるとは，$T \subset \mathcal{W}$ であり以下を満たすときをいう．

- $\emptyset \in T$,
- 任意の $w \in T$ に対し，$(w0 \in T \wedge w1 \in T) \vee (w0 \notin T \wedge w1 \notin T)$,
- 任意の $w \in T \setminus \{\emptyset\}$ に対し，ある $w' \in T$ が存在して $w'0 = w \vee w'1 = w$.

Definition 2.3. T を binary tree とする．$w \in T$ に対し $w0, w1 \in T$ を w の子と呼び，特に $w0$ を left child，$w1$ を right child と呼ぶ．また w を $w0$, $w1$ の親と呼ぶ．子を持たない T の元を leaf と呼ぶ．$0 < 1$ とした辞書式順序で T の元には順序をつけることができる．leaf の集合 $L(T) := \{w \in T \mid w$ は leaf $\}$ にも同様に順序を入れることができる．この順序で1番の leaf，2番の leaf，$\ldots$ と leaf を番号で呼ぶことにする．$\mathcal{T}_n := \{T :$ binary tree $\mid \#L(T) = n\}$ とおく．

Binary tree は元を頂点，親子のペアを辺とすればグラフとなる．

Definition 2.4. $T \in \mathcal{T}_n$ とする．単純グラフ $G(T) = (V, E)$ を次で定義する．

- $V = T \cup \{\star\}$,

*e-mail: `inoue@ims.is.tohoku.ac.jp`

- $E = \{\{w, w0\}, \{w, w1\}, \{\star, \emptyset\} \mid w \in intT\}$.

すると binary tree は例えば図1のように表せる.

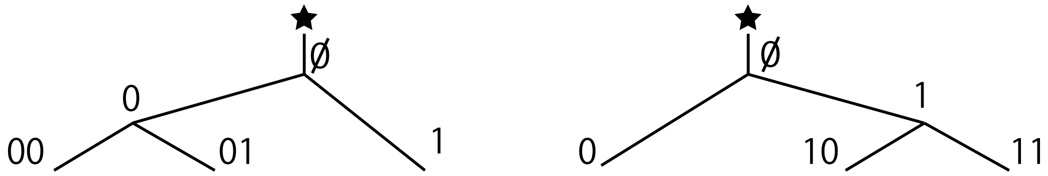


図 1: binary tree

$\star$ なる頂点は root と呼ぶ. 図1のように root と $\emptyset$ を描き, $\emptyset$ の left child 0を左下に right child 1を右下に描き辺で結ぶ. これを繰り返して親の左下に left child, 右下に right child を書き足していくと $G(T)$ を平面に描くことが出来る. 以降 $T \in \mathcal{T}_n$ と書いたら $G(T)$ をこの描き方で平面に埋め込んだ planar graph とする.

図2のように leaf の数の等しい2つの binary tree D, R の番号の等しい leaf 同士, root 同士を繋げると planar graph を得る. このグラフを $D\#R$ で表す.

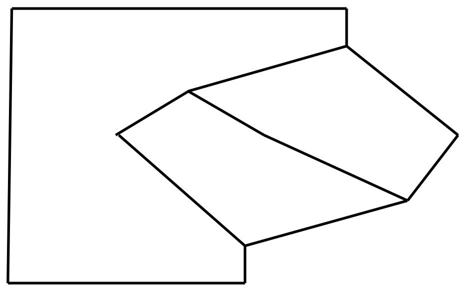


図 2: $D\#R$

Definition 2.5 (Thompson's F)**.** $F := \{(D, R) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{T}_n \times \mathcal{T}_n) \mid D\#R$ は 2 cycle をもたない$\}$ と定義する.

どのような算法について F が群をなすかについては今回の結果と関係しないので省略する.

Theorem 2.6 (Bowlin, Brin [2])**.** 以下の命題と四色定理は同値である.
任意の $(D, R) \in F$ に対し, $D\#R$ は辺3彩色を持つ.

3. 符号つき F の元からの絡み目の構成

図3のように F の元, つまり binary tree を張り合わせた planar graph とその辺3彩色が与えられたとき, 各頂点に接続する辺には時計回りか反時計回りに色が塗られている. 図4のように反時計回りのときには符号 $+$ を, 時計回りのときには符号 $-$ をふる.

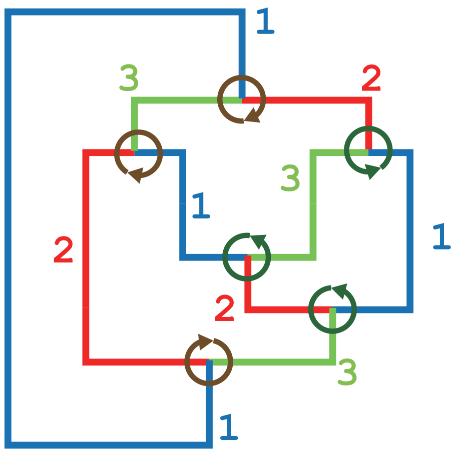


図 3: F の元とその辺彩色

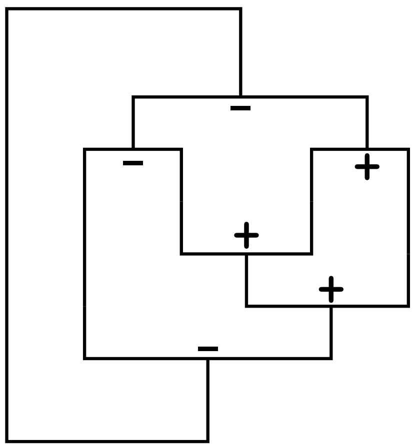
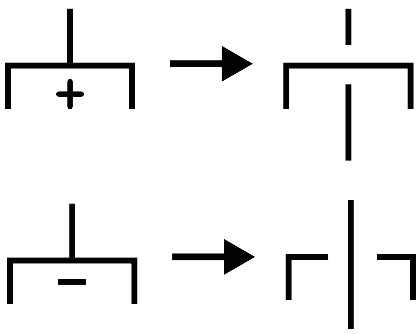


図 4: 符号つき F の元

この符号にしたがって次のように頂点達をひもの交差に書き換える.



向かい合った頂点から伸びるひもを繋げることにより絡み目が得られる.

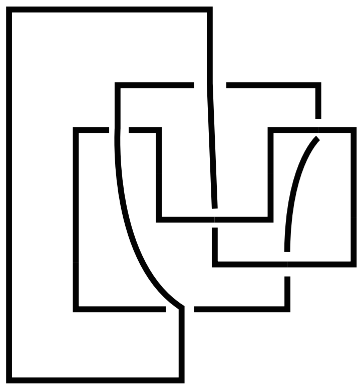


図 5: F の元から得られた絡み目

F の元 f とその符号 σ からこの操作で得られる絡み目を $h(f,\sigma)$ と表すことにする.

4. 絡み目からの符号つき F の元の構成

Theorem 4.1 (主結果)**.** 任意の絡み目 L に対し, ある F の元 f とその符号 σ が存在して $L = h(f,\sigma)$ が成り立つ.

以降, 与えられた絡み目 L を固定しておく. L の図式から具体的に F の元と符号をみつけることでこの定理を証明する.

4.1. 証明

L を表す図式を次数 4 の正則グラフとみなしたとき, そのグラフは連結かつループを持たない平面グラフとしてよい. これはライデマイスター移動の I と II から明らかである.

(Step1)

L の辺上に, 交差を通らない辺で結ぶことのできる 2 点 S, G を任意にとる. つまり今, L が自明な結び目でなければ S から G へひもを辿る方法は交差を一つも通らないものと, 1 つ以上通るものがある.

S から G へ向かう方向は 2 つあるが, 交差を通らない方と逆の方向を $P_\emptyset$ とおく. S から $P_\emptyset$ の方向へ進み, 最初に出会う交差を $\emptyset$ とおく. 交差 $\emptyset$ において $P_\emptyset$ から見て左に伸びる方向を $l_\emptyset$, 右を $r_\emptyset$, まっすぐを $s_\emptyset$ とおく. $l_\emptyset$ に進み最初に出会う交差を 1 とおく. 同様に l_1, r_1, s_1 の方向を定める. l_1 の方向へ進み最初に出会う交差を 11 おく. 同様にして l_{1^k} が出会う最初の交差を 1^{k+1} とおく. ただし 1^k は 1 が k 個並んだ語である.

L をグラフとみなしたとき, S と G を含む辺を境界にもつ面は 2 つ存在する. 上記の操作を繰り返すと, これらの面のうちの 1 つの境界上に交差 $\emptyset, 1, 11, \ldots$ が並ぶ. よってある整数 k_0 が存在して 1^{k_0} と G は交差のない辺で結ばれる.

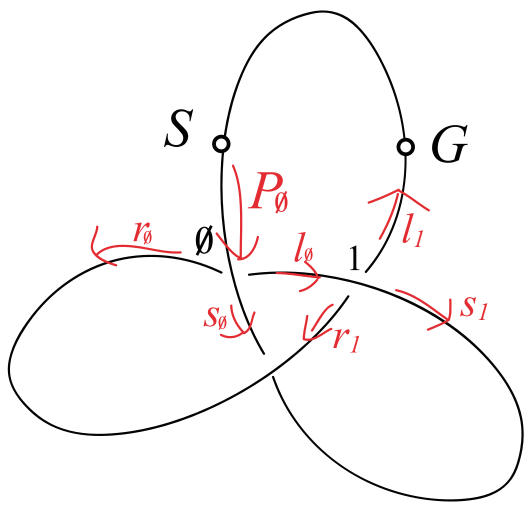


図 6: 例

$A = \{\emptyset, 1, 11, \ldots, 1^{k_0}\}$ と定める．図6の例では $A = \{\emptyset, 1\}$ である．

(Step2.0**)**

$A_0 = A, B_0 = \{w \in A_0 \mid l_w$ または r_w の片方の端点に語がまだふられていない $\}$ と定める．

$B_0 = \emptyset$ のとき，step3 に移る．そうでないとき，step2.1 に移る．

(Step2.k**)**

$0 < 1$ とした辞書式順序で L の交差にふられる語には大小関係が与えられる．

$w = \min B_{k-1}$ とおき，もし r_w の片方の端点にまだ語がふられていないなら，その交差に $w0$ と語をふる．また r_w から見て左に伸びる方向を l_{w0}，右を r_{w0}，まっすぐを s_{w0} とおく．$w_k = w0$ と定める．もし r_w の両端点にすでに語がふられていたなら l_w のまだ語がふられていない端点の交差に $w1$ とふり，同様に l_{w1}，r_{w1}，s_{w1} を定める．$w_k = w1$ と定める．

$A_k = A_{k-1} \cup \{w_k\}$, $B_k = \{w \in A_k \mid l_w$ または r_w の片方の端点に語がまだふられていない$\}$ と定める．

$B_k = \emptyset$ のとき，step3 に移る．そうでないとき，step2.$k+1$ に移る．

Proposition 4.2. Step2.k で終了したとする．このとき L の全ての交差に語がふられている．

(Step3**)**

文章で書くと非常に冗長になってしまうので図を用いて説明する，

まず step2 終了時点で全ての交差に語がふられる．図6の例の結び目は次の図のように語がふられる．

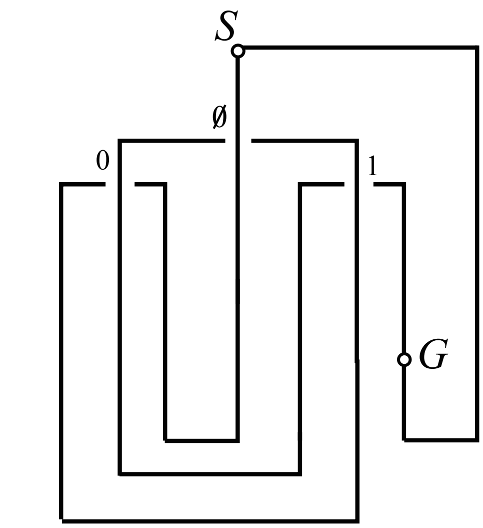


図 7: 例

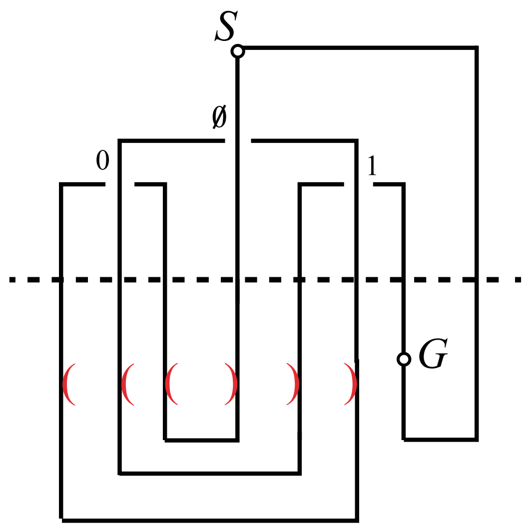


図 8: 例

図8のように上下に分けて考えると，下半分には交差が1つもないことから，下半分のひも達は括弧の並べ方に対応する．図8の場合は((())) である．この括弧の対応を用いて下半分のひも達に次のように順序をつける．”内側にある括弧よりも外側の括弧の方が小さく，右にある括弧の方が左にある括弧より小さい.” 図9を見るとわかりやすいと思う．

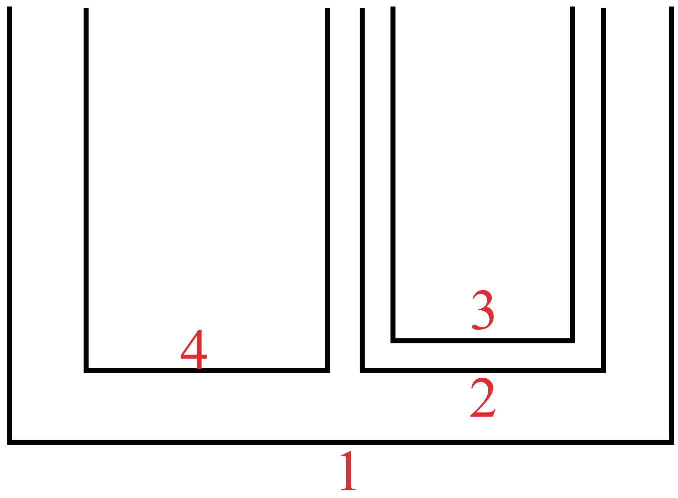


図 9: ひもの順序の例

あとはこの順序の通りにライデマイスター移動の I と II を使って”ループを作って隣のひもに乗せる”操作を繰り返せば F の元が得られる.

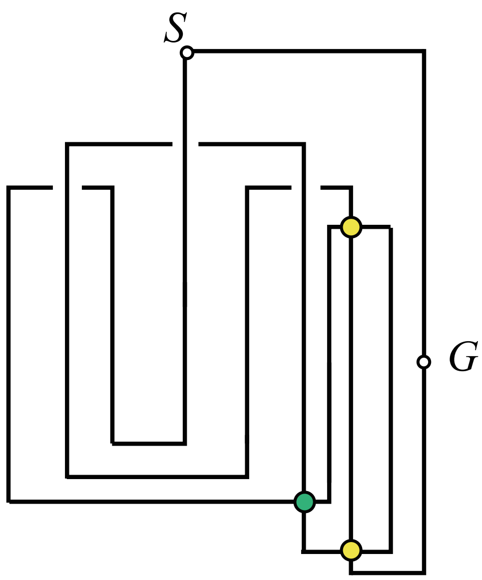


図 10: 1 番のひもを動かす

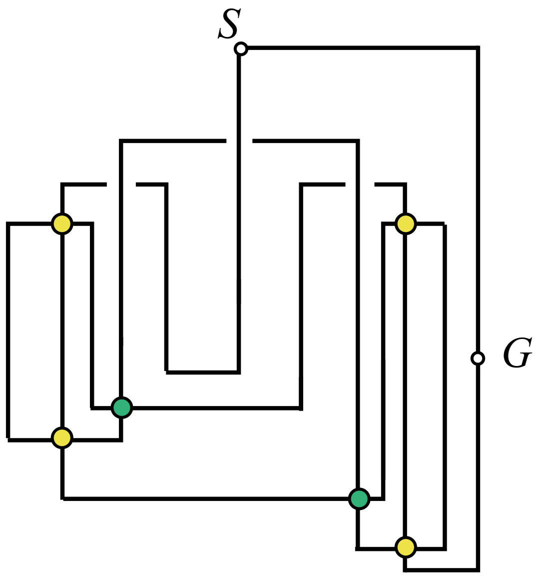


図 11: 2 番のひもを動かす

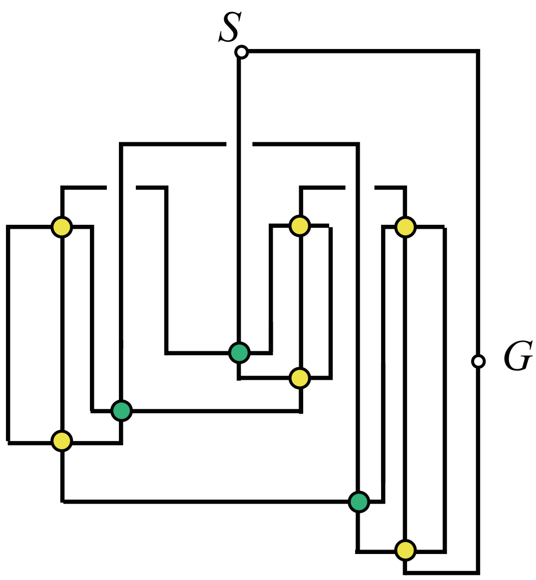


図 12: 3 番のひもを動かす

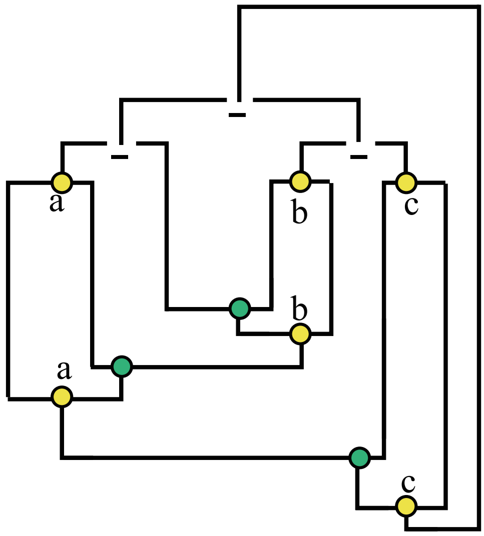


図 13: 完成

a, b, c と緑の点の頂点には自由に符号を入れることができる.

参考文献

[1] K. Appel and W. Haken. “Every map is four colourable”. Bulletin of the American Mathematical Society 82 (1976) 711–712.

[2] Garry Bowlin, Matthew G. Brin. “Coloring planar graphs via colored paths in the associahedra.” Internat. J. Algebra Comput. 23 (2013), no. 6, 1337–1418.

[3] V.F.R. Jones. ”Some unitary representations of Thompson ’s groups F and T”. arXiv:1412.7740.