一般の閉曲面をファイバーとする2次元ブレイドについて

石地　知興　(東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻修士2年)

概　　要

ブレイド (組みひも) を2次元に拡張した概念として, 2次元ブレイドがある. 通常2次元ブレイドというと $D^2 \times D^2$ に埋め込まれた曲面を指す. 一方で私が研究しているのは, ファイバーがコンパクト曲面の2次元ブレイドである. 言い換えれば Σ をコンパクト曲面としたとき $\Sigma \times D^2$ に埋め込まれた曲面である. 本稿では, その2次元ブレイドについて明らかになったことについて報告する.

1. お断り

「一般の閉曲面をファイバーとする2次元ブレイドについて」というタイトルで講演を申し込んだ. しかしその後境界を持つコンパクト曲面に関しても同様のことが成立することが分かった. したがって, 講演は後者の内容で行った. 「一般のコンパクト曲面をファイバーとする2次元ブレイドについて」や「2次元ブレイドの一般化」などをタイトルとするのがふさわしい内容である.

2. ブレイド

ブレイドを定義する方法はいくつかあるが, ここでは次のように定義する.
D^2 を2次元円盤とし,$I = [0,1]$ とする. また、$pr_2 : D^2 \times I \longrightarrow I$ を第二成分への射影とする. $Q_m = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\} \subset \mathrm{Int}D^2$ とする.

定義 2.1. 幾何的 m-ブレイドとは, $D^2 \times I$ にプロパーに埋め込まれた1次元多様体 b で, 次の条件を満たすものである.
(1) $pr_2|_b : b \longrightarrow I$ は次数 m の被覆写像である.
(2) $\partial b = Q_m \times \partial I$.

二つの幾何的 m-ブレイドをつなぐ, ファイバーを保つアンビエントアイソトピーが存在するとき,それらは同値であるという. その同値類を m-ブレイドということとする. m-ブレイド全体の集合を B_m で表す. よく知られているとおり, B_m には積が定義でき, この積に関して群になる. $B_m \cong \langle \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{m-1} | \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i(|i-j| > 1), \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j(|i-j| = 1)\rangle$ である.

同様に, 他のコンパクト曲面上のブレイドを定義できる. Σ を Σ_g^b $(g \geq 0, b \geq 0)$ または N_g^b $(g \geq 1, b \geq 0)$ とする. ただし, Σ_g^b は種数 g, 境界成分数 b の向きづけ可能曲面である. N_g^b は種数 g, 境界成分数 b の向きづけ不可能曲面である. $Q_m = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\} \subset \mathrm{Int}\Sigma$ とする.

定義 2.2. Σ 上の幾何的 m-ブレイドとは, $\Sigma \times I$ にプロパーに埋め込まれた1次元多様体 b で, 次の条件を満たすものである.
(1) $pr_2|_b : b \longrightarrow I$ は次数 m の被覆写像である.
(2) $\partial b = Q_m \times \partial I$.

二つのΣ上の幾何的m-ブレイドをつなぐ, ファイバーを保つアンビエントアイソトピーが存在するとき, それらは同値であるという．その同値類をΣ上のm-ブレイドということとする．Σ上のm-ブレイド全体の集合を$B_m(\Sigma)$で表す．$B_m(\Sigma)$には積が定義でき，この積に関して群になる．$B_m(S^2)\cong\langle\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{m-1}|\sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i(|i-j|>1),\sigma_i\sigma_j\sigma_i=\sigma_j\sigma_i\sigma_j(|i-j|=1),\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{m-1}\sigma_{m-1}\cdots\sigma_2\sigma_1=1\rangle$である．

3. 2次元ブレイド

前節でブレイドを定義した. この節では, ブレイドを2次元へ拡張する．([1])
D_1^2とD_2^2を2次元円盤とし, $pr_2:D_1^2\times D_2^2\longrightarrow D_2^2$を第二成分への射影とする．$X_m=\{z_1,z_2,\ldots,z_m\}\subset\mathrm{Int}D_1^2$とする．

定義 3.1. 次数mの2次元ブレイドとは$D_1^2\times D_2^2$にプロパーに埋め込まれたコンパクト有向2次元多様体Sで次の条件を満たすものである．
(1) $pr_2|_S:S\longrightarrow D_2^2$は次数$m$の単純分岐被覆写像である．
(2) $\partial S=X_m\times\partial D_2^2$.

4. Σ-2次元ブレイド

ファイバーがコンパクト曲面の2次元ブレイドを定義する．
ΣをΣ_g^b $(g\geq 0,b\geq 0)$またはN_g^b $(g\geq 1,b\geq 0)$としD^2を2次元円盤とする．$pr_2:\Sigma\times D^2\longrightarrow D^2$を第二成分への射影とする．$X_m=\{z_1,z_2,\ldots,z_m\}\subset\mathrm{Int}\Sigma$とする．

定義 4.1. 次数mのΣ-*2*次元ブレイドとは, $\Sigma\times D^2$にプロパーに埋め込まれたコンパクト有向2次元多様体Sで次の条件を満たすものである．
(1) $pr_2|_S:S\longrightarrow D^2$は次数$m$の単純分岐被覆写像である．
(2) $\partial S=X_m\times\partial D^2$.

Σ-2次元ブレイド全体の集合に同値関係を定義する．

定義 4.2. 次数mの Σ-*2*次元ブレイド S, S'が同値*(equivalent)*とは次の条件を満たすアンビエントアイソトピー $\{h_u:\Sigma\times D^2\longrightarrow\Sigma\times D^2\}_{u\in[0,1]}$が存在するときに言う*:*
(1) $h_0=id_{\Sigma\times D^2}$, $h_1(S)=S'$.
(2) $\{h_u\}_{u\in[0,1]}$はファイバーを保つ, つまり,
$\underline{h}_u\circ pr_2=pr_2\circ h_u$ $(\forall u\in[0,1])$を満たすようなアンビエントアイソトピー$\{\underline{h}_u:D^2\longrightarrow D^2\}_{u\in[0,1]}$が存在する．
(3) 全ての $u\in[0,1]$に対して, $h_u|_{\Sigma\times\partial D^2}=id_{\Sigma\times\partial D^2}$.

Σ-2次元ブレイドSの同値類を$[S]$と書くことにする．

Σ-2次元ブレイドには積が定義できる．
$S_1\subset\Sigma\times D^2$, $S_2\subset\Sigma\times D^2$を次数$m$の$\Sigma$-2次元ブレイドとする．$D^2$をプロパーな弧によって二つの2次元円盤に分けることを考える．これを$D^2=E_1\cup E_2$とする．そして, D^2とE_1を微分同相写像$f_1:D^2\longrightarrow E_1$によって, D^2とE_2を微分同相写像$f_2:D^2\longrightarrow E_2$によって同一視する．これによって, $S_1\subset\Sigma\times E_1$, $S_2\subset\Sigma\times E_2$と思える．そこで曲面$S_1\cup S_2$を考えるとこれは$\Sigma$-2次元ブレイドになっている．

定義 4.3. このΣ-*2*次元ブレイドは$S_1 \cdot S_2$と書かれ, S_1とS_2の積と呼ばれる. そして, $[S_1]\cdot[S_2] = [S_1 \cdot S_2]$と定義するとこれは*well-defined*である.

$C_m(\mathrm{Int}\Sigma)$を順序のない$\mathrm{Int}\Sigma$のm点配置空間とする.

定理 4.4. 次数mの非分岐Σ-*2*次元ブレイド全体は積に関して群をなし, それは$\pi_2(C_m(Int\Sigma))$と同型である.

証明の概略
次数mの非分岐Σ-2次元ブレイドSに対して, $\varphi_S : (D^2, \partial D^2) \longrightarrow (C_m(\mathrm{Int}\Sigma), X_m) \in \pi_2(C_m(\mathrm{Int}\Sigma), X_m)$ $(\varphi_S(x) = pr_1(S \cap pr_2^{-1}(x)))$が定まる. 逆に$[\varphi] \in \pi_2(C_m(\mathrm{Int}\Sigma), X_m))$に対して次数$m$の非分岐$\Sigma$-2次元ブレイド$S_\varphi := \bigcup_{x\in D^2}(\varphi(x) \times \{x\})$が定まる.

系 4.5. $\mathcal{B}_m(\Sigma_0) \cong \mathcal{B}_m(S^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (m = 1, 2) \\ \{0\} & (m \geq 3), \end{cases}$
$\mathcal{B}_m(\Sigma_g) \cong \{0\} (\forall m, g \geq 1)$,
$\mathcal{B}_m(N_1) \cong \mathcal{B}_m(\mathbb{R}P^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (m = 1) \\ \{0\} & (m \geq 2), \end{cases}$ $\mathcal{B}_m(N_g) \cong \{0\} (\forall g \geq 2, \forall m \geq 1)$,
$\mathcal{B}_m(\Sigma_g^p) \cong \{0\} (\forall m \geq 1, \forall g \geq 0, \forall p \geq 1)$,
$\mathcal{B}_m(N_g^p) \cong \{0\} (\forall m \geq 1, \forall g \geq 1, \forall p \geq 1)$.

Σ-2次元ブレイドに対して, ブレイドモノドロミーと呼ばれる基本群からブレイド群への準同型写像を考えることができる.
Sを次数mのΣ-2次元ブレイドとし, $\Delta(S) \subset \mathrm{Int}D^2$を分岐点集合とする. 基点$q_0 \in \partial D^2$をとる. $\gamma : (I, \{0, 1\}) \longrightarrow (D^2 - \Delta(S), q_0)$を$q_0$を基点とするループとする. すると, 次の$C_m(\mathrm{Int}\Sigma)$のループ$l_\gamma : (I, \{0, 1\}) \longrightarrow (C_m(\mathrm{Int}\Sigma), X_m)$を考えることができる.

$$l_\gamma(x) = pr_1(S \cap pr_2^{-1}(x)).$$

これによって, 次の対応$\rho_S : \pi_1(D^2 - \Delta(S), q_0) \longrightarrow \pi_1(C_m(\mathrm{Int}\Sigma), X_m)(\cong B_m(\Sigma))$

$$\rho_S([l]) = [l_\gamma]$$

を考えることができる. ρ_Sはwell-definedで, 準同型写像となる.

定義 4.6. 準同型ρ_SをSのブレイドモノドロミーという.

以下では$\Sigma = S^2$の場合に焦点をあてていく.

定義 4.7. 次数$m \geq 3$のS^2-*2*次元ブレイドチャートとは有限グラフ$\Gamma \subset IntD^2$で次の条件を満たすものをいう*:*
(1) 全ての辺は向きづけられ, 整数$\{1, 2, \cdots, m-1\}$でラベルづけされている.
(2) 1価, 4価, 6価, $2(m-1)$価の頂点がある. 1価頂点を黒頂点という. 6価頂点と$2(m-1)$価頂点を白頂点という.
(3) 各6価頂点に対して*3*本の連続した辺はその頂点に向かう向きである. そして他の*3*本の辺は頂点から出る向きである. そして, *6*本の辺は$|i-j| = 1$を満たすi, jによって交互にラベルづけされている.
(4) 各4価頂点に対して,対角の位置にある辺は同じ数字でラベルづけされている. そ

して, 並行な向きをもつ. ただし, ラベル i, j は $|i-j|>1$ を満たす.
(5) 各 $2(m-1)$ 価頂点に対して, 辺は順番に $1, 2, \cdots, m-1, m-1, \cdots, 2, 1$ とラベルづけされている. 辺の向きはすべて頂点に向かう向きか, 全て頂点から出る向きのいずれかである.

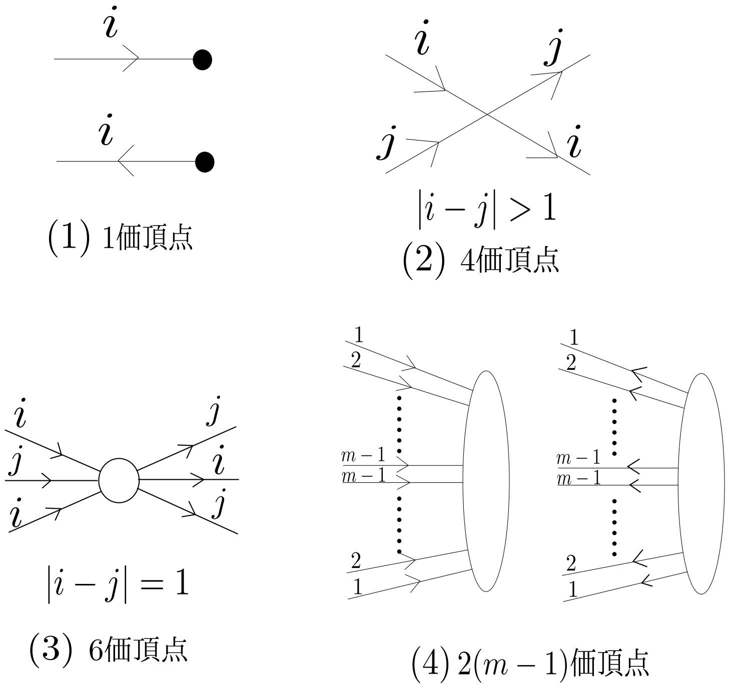


図 1: S^2-2次元ブレイドチャートの頂点

次数 $m \geq 3$ の S^2-2次元ブレイドチャート Γ に対してブレイドモノドロミー ρ_Γ を考えることができる. そのためにまず, 曲線 $\alpha : [0,1] \longrightarrow D^2$ が Γ に関して一般の位置にあることを次で定義する:
(1) $\alpha([0,1]) \cap V(\Gamma) = \phi$. ただし $V(\Gamma)$ は Γ の頂点集合である.
(2) $\alpha^{-1}(\Gamma) = \{t_1, \cdots, t_s\} \subset \mathrm{Int}[0,1]$. ただし $\alpha^{-1}(\Gamma) = \phi$ も認める.
(3) 各 $j \in \{1, \cdots, s\}$ に対して, t_j の開近傍 $U(t_j)$ が存在して, $\alpha|_{U(t_j)}$ ははめ込みとなり, Γ の辺と $\alpha(t_j)$ にて横断的に交わる.

$\alpha : [0,1] \longrightarrow D^2$ が Γ に関して一般の位置にあるとき, 交叉語 $w_\Gamma(\alpha)$ を次のように定義できる. α に沿って進んだとき,$\alpha(t_j)$ にてラベル i の辺が右から左へ突き抜けていたとき, 交点 $\alpha(t_j)$ に対して σ_i を対応付ける (図 2 左). 左から右へ突き抜けている場合には σ_i^{-1} を対応付ける (図 2 右). α に沿って上の規則で読んでいくと語ができる. これを Γ に関する α の交叉語という. $w_\Gamma(\alpha)$ で表す.

$\Delta(\Gamma)$ で黒頂点集合を表すこととする. $l : [0,1] \longrightarrow (D^2 - \Delta(\Gamma), q_0)$ を Γ に関して一般の位置にあるループとする.

定義 4.8. 準同型写像 $\rho_\Gamma : \pi_1(D^2 - \Delta(\Gamma), q_0) \longrightarrow B_m(S^2)$ $(\rho_\Gamma([l]) = w_\Gamma(l))$ を S^2-*2*次元ブレイドチャート Γ のブレイドモノドロミーという.

定理 4.9. 任意の次数 3 以上の S^2-*2*次元ブレイド S に対して,S^2-*2*次元ブレイドチャート Γ が存在して $\rho_\Gamma = \rho_S$ となる. 逆に任意の S^2-*2*次元ブレイドチャート Γ に対して,

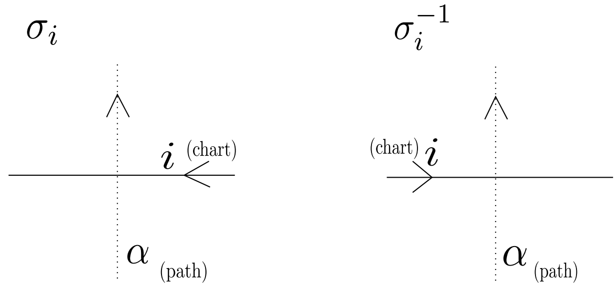


図 2: 交叉語

S^2-*2*次元ブレイド S が存在して, $\rho_S = \rho_\Gamma$ となる.

普通の 2 次元ブレイドに関してもチャートを考えることができる.

定義 4.10. 次数 m の *2*次元ブレイドチャートとは有限グラフ $\Gamma \subset IntD^2$ で次の条件を満たすものをいう:
(1) 全ての辺は向きづけられ, 整数 $\{1, 2, \cdots, m-1\}$ でラベルづけされている.
(2) 1 価, 4 価, 6 価, $2(m-1)$ 価の頂点がある. 1 価頂点を黒頂点という. 6 価頂点と $2(m-1)$ 価頂点を白頂点という.
(3) 各 6 価頂点に対して *3*本の連続した辺はその頂点に向かう向きである. そして他の *3*本の辺は頂点から出る向きである. そして, *6*本の辺は $|i-j| = 1$ を満たす i, j によって交互にラベルづけされている.
(4) 各 4 価頂点に対して, 対角の位置にある辺は同じ数字でラベルづけされている. そして, 並行な向きをもつ. ただし, ラベル i, j は $|i-j| > 1$ を満たす.

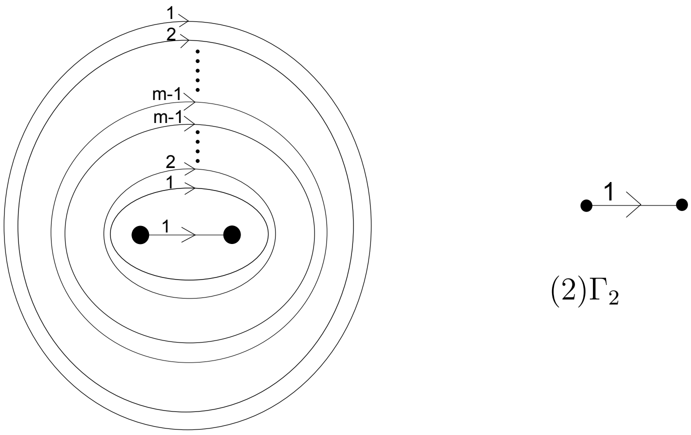
S^2-2 次元ブレイドチャートと 2 次元ブレイドチャートの相違点は $2(m-1)$ 価頂点の有無のみである. 2 次元ブレイドチャートに関してもそのブレイドモノドロミーが定義 4.8 と全く同様に定義される. 定理 4.9 も同様に成立する.

S^2-2 次元ブレイドチャート Γ に対応する S^2-2 次元ブレイドを $S(\Gamma)$ と表すこととする. また, S^2-2 次元ブレイド S に対応する S^2-2 次元ブレイドチャート Γ を S のチャート表示と呼ぶことにする.

次数 $m \geq 3$ の S^2-2 次元ブレイドチャート Γ_1, Γ_2 (図 3) を考える. Γ_1, Γ_2 は 2 次元ブレイドチャートと思うこともできる.

定理 4.11. $S(\Gamma_1)$ と $S(\Gamma_2)$ は *2*次元ブレイドとして同値ではないが, S^2-*2*次元ブレイドとしては同値になる.

Proof. $S(\Gamma_1)$ と $S(\Gamma_2)$ が S^2-2 次元ブレイドとして同値であることはチャートムーブ (図 4) による. $S(\Gamma_1)$ と $S(\Gamma_2)$ が 2 次元ブレイドとして同値でないことは, それぞれのブレイドシステムを取り, それらがスライド同値でないことを示すことにより証明される. □



(1)Γ_1　　　　(2)Γ_2

図 3: Γ_1, Γ_2

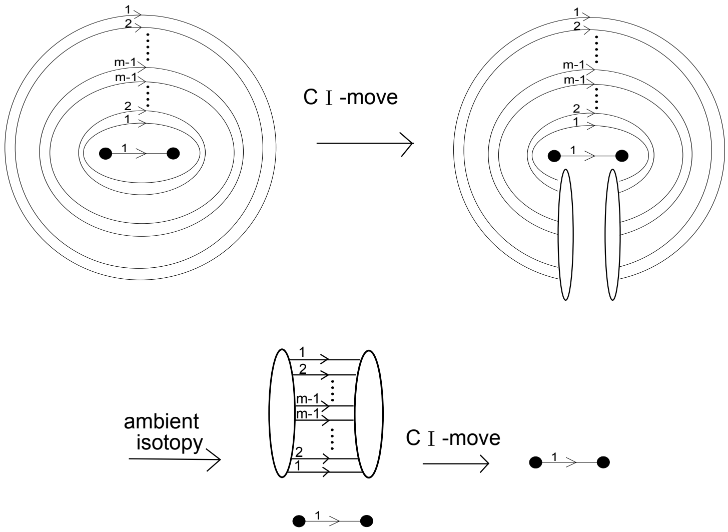


図 4: チャートムーブ

5. Lefschetz fibration との結びつき

Σ_g を種数 g の有向閉曲面とする．$\mathcal{M}_g$ を Σ_g の写像類群とする．$\iota \in \mathcal{M}_g$ を hyperelliptic involution とする．

定義 5.1. *M と B をそれぞれコンパクト有向 4 次元多様体, 2 次元多様体とする．全射 $f : M \longrightarrow B$ が Lefschetz fibration であるとは, 次の条件を満たすときに言う:*
(1) $f^{-1}(\partial B) = \partial M$,
(2) f の任意の臨界点 $p \in intM$ に対して, p の座標近傍 (U, φ) と $f(p)$ の座標近傍 (V, ψ) が存在して $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$ となる.
(3) どのファイバーも (± 1) 球面を含まない.
M を全空間, B を底空間, f を射影という.

注意 5.2. 上で定義した Lefschetz fibration は achiral Lefschetz fibration と呼ばれているものである.

Δ を f の臨界値集合とする．このとき, $f|_{f^{-1}(B-\Delta)} : f^{-1}(B - \Delta) \longrightarrow B - \Delta$ は

ファイバー束になっている．したがって，基点 $b_0 \in B - \Delta$ と向きを保つ微分同相写像 $\Phi_0 : \Sigma_g \longrightarrow f^{-1}(b_0)$ をとるとモノドロミー表現 $\rho_f : \pi_1(B - \Delta, b_0) \longrightarrow \mathcal{M}_g$ を考えることができる．

定義 5.3. $\rho_f : \pi_1(B - \Delta, b_0) \longrightarrow \mathcal{M}_g$ を Φ_0 に関する f のモノドロミー表現という．

定義 5.4. $f : M \longrightarrow B$, $f' : M' \longrightarrow B'$ を *Lefschetz fibration* とする．f と f' が同型 *(isomorphic)* であるとは，向きを保つ微分同相写像 $H : M \longrightarrow M'$, $h : B \longrightarrow B'$ が存在して，$f' \circ H = h \circ f$ となるときにいう．

補題 5.5. 次数が偶数の S^2-2 次元ブレイド S に対して S 上分岐する 2 重分岐被覆 $\alpha : M \longrightarrow S^2 \times D^2$ が存在する．ただしここで M は 4 次元多様体である．さらに，M は微分同相の差を除いて一意である．

命題 5.6 ([2])**.** $pr_2 \circ \alpha : M \longrightarrow D^2$ は Lefschetz fibration である．

補題 5.7. S_1 と S_2 を次数 $2m \geq 6$ の S^2-2 次元ブレイドとする．$f_1 : M_1 \longrightarrow D^2$, $f_2 : M_2 \longrightarrow D^2$ をそれぞれ S_1, S_2 から定理 5.6 のようにして定まる Lefschetz fibration とする．もしも S_1 と S_2 が同値であるならば，f_1 と f_2 は同型になる．

補題 5.8. S を S^2-2 次元ブレイドとする．Γ を S のチャート表示とする．$f : M \longrightarrow D^2$ を S に対して定まる Lefschetz fibration とする．向きを保つ微分同相写像 $\Phi_0 : \Sigma_g \longrightarrow f^{-1}(b_0)$ を適切にとって，Φ_0 に関する f のモノドロミー表現 ρ_f を考える．このとき，Γ が持つ $2(2m-1)$ 価頂点の個数が偶数ならば $\rho_f(\partial D^2) = [id]$ となり，奇数ならば $\rho_f(\partial D^2) = \iota$ となる．

補題 5.7, 補題 5.8 より次の定理が成立する．

定理 5.9. S_1,S_2 を次数 $2m \geq 6$ の S^2-*2*次元ブレイドとする．Γ_1,Γ_2 を S_1, S_2 のチャート表示とする．もしも S_1 と S_2 が同値であるならば，Γ_1 と Γ_2 がもつ $2(2m-1)$ 価頂点の個数の偶奇は等しい．

Proof. S_1 と S_2 が同値であるとする．このとき補題 5.7 より，S_1, S_2 から定まる Lefschetz fibration f_1, f_2 は同型である．もし，Γ_1 と Γ_2 がもつ $2(2m-1)$ 価頂点の偶奇が異なるとすると，(Γ_1 : 偶数, Γ_2 : 奇数とする) 補題 5.8 より $\rho_{f_1}(\partial D^2) = [id]$, $\rho_{f_2}(\partial D^2) = \iota$ である．これは f_1 と f_2 が同型であることに矛盾している．

□

これはすなわち $2(2m-1)$ 価頂点の個数の偶奇が S^2-2 次元ブレイドの不変量になっていることを意味している．

参考文献

[1] S.Kamada, *Braid and knot theory in dimension four*, Math. Surveys Monogr. **95**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[2] A. Loi, R. Piergallini, *Compact Stein surfaces with boundary as branched covers of* B^4, Invent. math. **143** (2001) 325–348