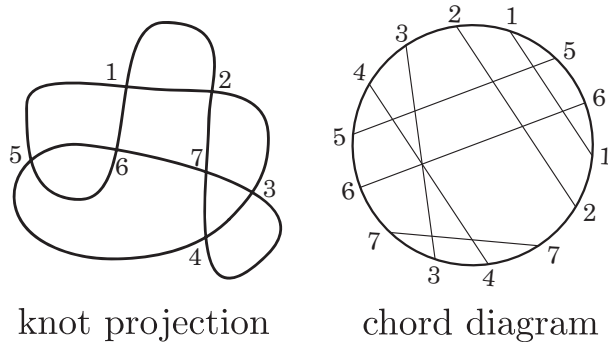


Any nontrivial knot projection with no triple chord has a monogon or a bigon

伊藤 昇 (東京大学大学院数理科学研究科)*¹
 瀧村 祐介 (学習院中等科)*²

円周上の偶数点配置を考える。このとき、点配置が2点ずつペアとなったものこのことを chord diagram (コード図) と呼ぶことにする。chord diagram は up to ambient isotopy および、reflection で同一視する。慣例上、ペアはコード (弦) で表示される。knot projection (結び目の影) とは、球面上の knot diagram の交点の上下の情報を明示しないものこのこととする。球面上の knot projection P において、各交点の逆像をペアとおもえば chord diagram CD_P が与えられる。本講演では、triple chord という、3本のコードからなる、特別な chord diagram に着目した。 CD_P から幾つかのコードを忘れたときに、triple chord が存在するならば、 CD_P は triple chord を含む、ということにする。本講演では、knot projection の chord diagram が、triple chord を含むための十分条件が、1 辺形と (あるタイプの) 2 辺形を持たないことであることを示した [1]。このことにより、1 辺形と 2 辺形を持つことと、triple chord をもたないことの直接の関係を導いた。



Definition 1 chord diagram のペアリングを自然数で表すとき、 $ijkijk$ ($i, j, k \in \mathbb{N}$) となる chord diagram を triple chord という。すなわち、triple chord とは下図 (右) の chord diagram である。同じように、 $ijij$ ($i, j \in \mathbb{N}$) となる chord diagram を cross chord (下図 (左))、 $ijkjik$ ($i, j, k \in \mathbb{N}$) となる chord diagram を H chord (下図 (中)) という。

伊藤昇は日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究 (S) 研究課題番号 24224002 「無限群と幾何学の新展開」 (研究代表者 坪井俊) の補助を受けて研究をしている。また、この研究集会における研究活動は住友財団基礎科学研究助成 (助成番号 160556、研究代表者 伊藤昇) の補助を受けている。

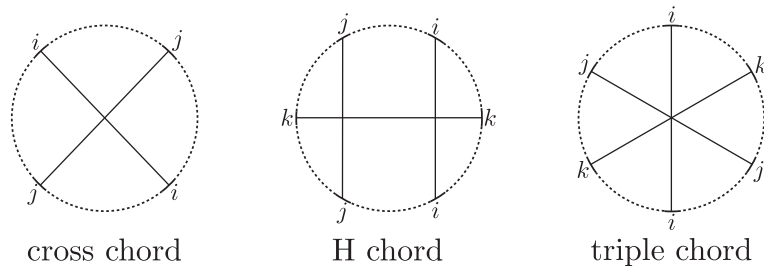
*¹ 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科

e-mail: noboru@ms.u-tokyo.ac.jp

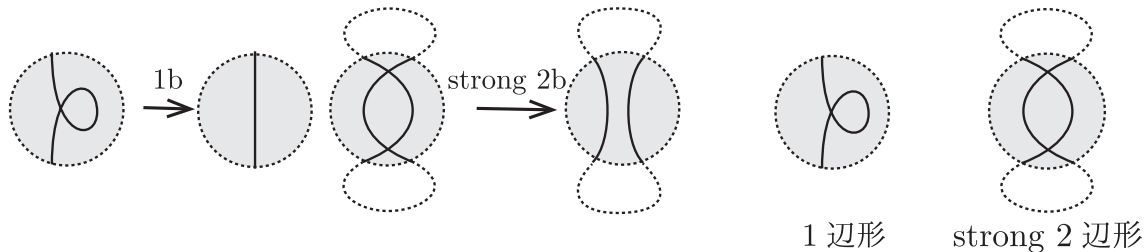
web: <http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~noboru/index.html>

*² 〒171-0031 東京都豊島区目白 1-5-1 学習院中等科

e-mail: Yusuke.Takimura@gakushuin.ac.jp



Definition 2 knot diagram は Reidemeister move という 3 種類の局所円盤の取り替えによる変形がよく知られている。これは滑らかな knot projection に対しては 1 つ目はカスパ、2 つ目は接点、3 つ目は 3 重点を通過するホモトピーに対応するものである。knot projection についても交点の上下の情報を書かないことにより、対応する局所変形が導入される。誤解が生じないとおもわれるので、同じ名前で Reidemeister move と呼ぶことにする。Reidemeister moves 1, 2 の方向を呼び分けるため、Reidemeister move 1b, Reidemeister move strong 2b を図のように定義する (以下、単に 1b, strong 2b と呼ぶ)。ただし、strong 2b の局所円盤の外側の点線は knot projection の円盤外のつながり方を表している。同様の表記法により、1 辺形、strong 2 辺形を図のように定義する。



CD_P が cross chord、または H chord を含まない P の集合については、決定されている [5, Theorem 3.1, Theorem 3.2] (implicit に [7] で示されている)。本研究はその続きと位置付けられる。その他の文脈については本講演スライド [2] か、論文 [1] を参照されたい。

任意の knot projection は、いくつかの reduced knot projection 達に分解されるので、reduced knot projection に限定して研究されることも多い。ここで、reduced knot projection の定義を確認しておく。

Definition 3 knot projection と 1 交点のみで交差し、他では交わらない、球面上の単純閉曲線が存在するとき、その knot projection を reducible と呼ぶことにする。reducible ではない knot projection を reduced と呼ぶことにする。

次の定義もしておく。

Definition 4 交点を一つも持たない knot projection を trivial knot projection とし、trivial knot projection ではない knot projection を nontrivial knot projection と呼ぶことにする。

今回、triple chord について、次の結果を得た [1]。

Theorem 1 P を nontrivial knot projection とする。

(1) CD_P が triple chord を含まないならば、 P は 1 辺形か strong 2 辺形を少なくとも 1 つ持つ。

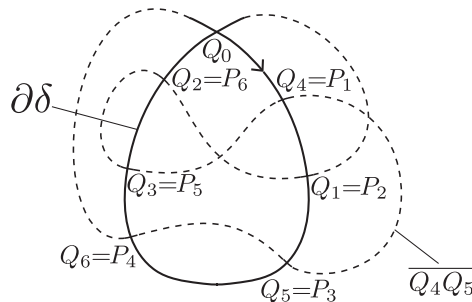
(2) P が reduced かつ CD_P が triple chord を持たないならば、 P は strong 2 辺形を少なくとも 2 つ持つ。

Theorem 1 から直ちに次が導かれる。

Corollary 1 CD_P が triple chord を含まないならば、 P から trivial knot projection までの 1b, strong 2b のみからなる有限列が存在する。

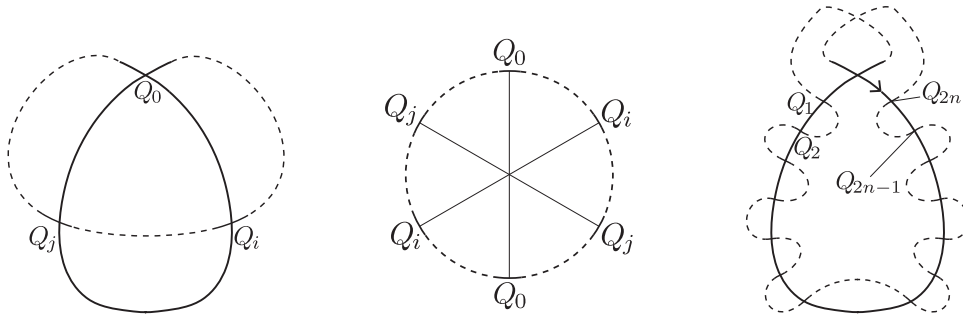
Proof of Theorem 1. ((1) についての証明) 証明には、teardrop disk に対する谷山公規の記法 [7] を用いる。 P の teardrop disk とは、コード図 CD_P において、outermost にあるコードに対応する交点がなす、1 辺形領域のことである。 P の teardrop disk を 1 つ取り、teardrop disk 内に別の teardrop disk が完全に含まれるならば、さらにその teardrop disk を取り直すということを繰り返せば、一番内側 (innermost) の teardrop disk をとることができる。したがって teardrop disk を通過する部分曲線は teardrop disk に入ってから初めて出るまでに自己交差がない、すなわち arc として考えることができる。ただし、teardrop disk 内で他の arc と交差することは許されている。以下、 $\partial\delta$ には交点は $2n + 1$ ($n \geq 0$) 個あると仮定する。

はじめに teardrop disk δ に時計回りに向きをつける (このことで P 全体に向きが入る)。境界 $\partial\delta$ に現れる順番に $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{2n}$ といったように交点にラベルをつけ、 P_0 に戻った後、続けて P をたどりながら、交点達 $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{2n}$ の名前をつけ直すことを考える。交点 P_k ($k \in \{0, 1, 2, \dots, 2n\}$) が現れた順に $Q_0 = P_0$ から Q_1, Q_2, \dots, Q_{2n} と名前をつけ直す。名前をつけ直した後、 $Q_{\sigma(i)} = P_i$ ($i \in \{1, 2, \dots, 2n\}$) として、置換 $\sigma = \{1, 2, \dots, 2n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 2n\}$ を定義する。このことにより、 $\{\sigma(i) \mid i \in \{1, 2, \dots, 2n\}\}$ には、自然数による大小関係が入る。以下、 Q_i から Q_j までの部分曲線を $\overline{Q_i Q_j}$ ($i < j$) と表す。谷山公規の記法 (σ, Q_i ($i = 1, 2, \dots$), $\overline{Q_i Q_j}$ など) について、一例を挙げておく (下図)。



$$\sigma(4) < \sigma(1) < \sigma(5) < \sigma(6) < \sigma(3) < \sigma(2)$$

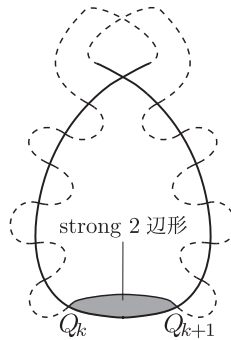
この置換 σ を用いて $\sigma(i) < \sigma(j)$ ($1 \leq i < j \leq 2n$) となる i, j (偶奇は問わない) が存在する場合、 CD_P は triple chord を含んでしまうため、 CD_P が triple chord を含まない場合、 $\sigma(2n) < \sigma(2n - 1) < \dots < \sigma(2) < \sigma(1)$ となる (下図)。



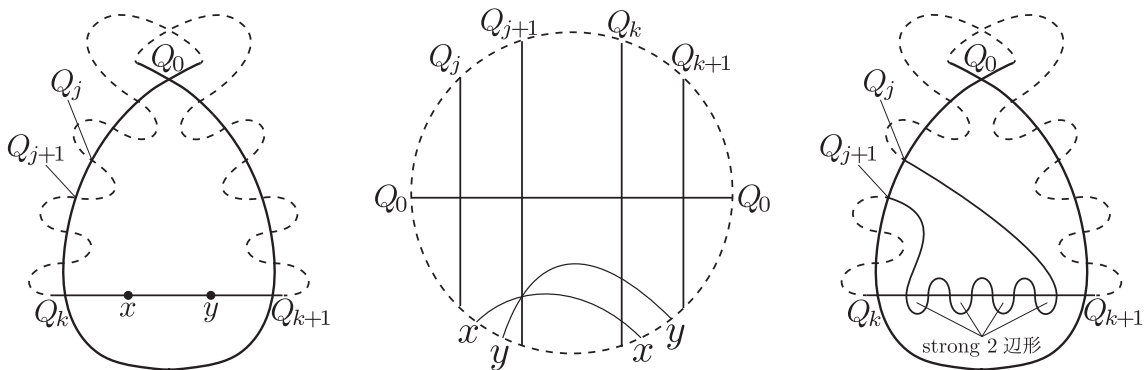
$$\sigma(2n) < \sigma(2n-1) < \dots < \sigma(2) < \sigma(1)$$

この場合において、teardrop disk 内の $\overline{Q_k Q_{k+1}}$ ($1 \leq k \leq 2n-1, k$ は奇数) において、次の3つ場合を考える。

(Case 1) $\overline{Q_k Q_{k+1}}$ が他の arc と交わらないとき。この場合は、 $\overline{Q_k Q_{k+1}}$ による領域で teardrop disk 内に strong 2 辺形が現れる。

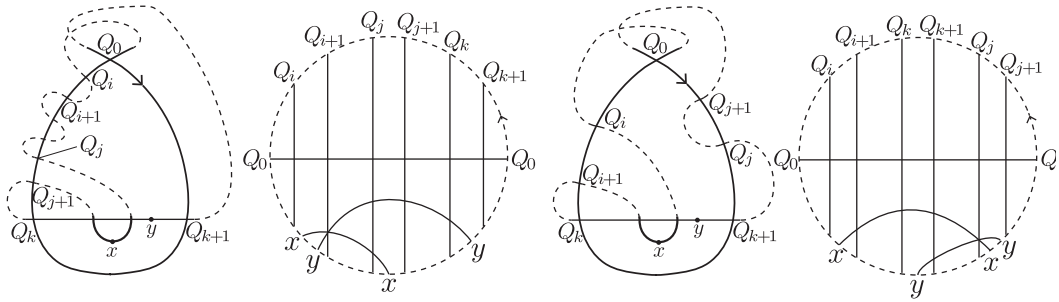


(Case 2) $\overline{Q_k Q_{k+1}}$ が他の arc 1つ だけと交わる時。交わる arc を $\overline{Q_j Q_{j+1}}$ ($1 \leq j < k \leq 2n-1, j$ は奇数) とする。図のように $\overline{Q_k Q_{k+1}}$ 上の 2点 x, y を、 $\overline{Q_j Q_{j+1}}$ が Q_j, x, y, Q_{j+1} の順番で通ると、 CD_P は triple chord を含む。よって、実際は右図のようになり、teardrop disk 内に strong 2 辺形を含む。($1 \leq k < j \leq 2n-1, j$ は奇数) の場合でも同様である。



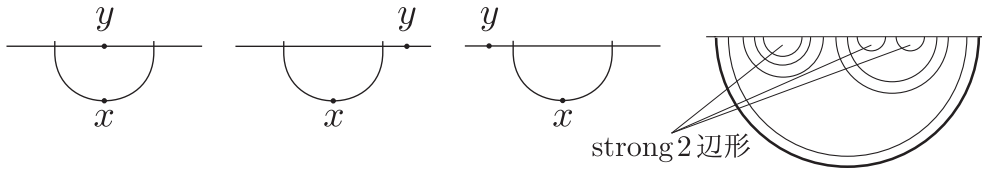
(Case 3) $\overline{Q_k Q_{k+1}}$ が他の arc 2つ 以上交わる時。(Case 2) において、さらに $\overline{Q_i Q_{i+1}}$ が交わる場合を考える。以下、 i, j, k を奇数とする。 $1 \leq i < j < k < 2n$ (右の図では $1 \leq i < k < j < 2n$) において3つの arcs $\overline{Q_i Q_{i+1}}, \overline{Q_j Q_{j+1}}, \overline{Q_k Q_{k+1}}$ の交わり方を考える。最初に考える2つの arcs、 $\overline{Q_j Q_{j+1}}$ と $\overline{Q_k Q_{k+1}}$ (右の図では $\overline{Q_i Q_{i+1}}$ と $\overline{Q_k Q_{k+1}}$) は Q_1, Q_2, \dots, Q_{2n} の定義に関する上記の考察から、2 辺形領域をなすように交わるしかない (ただし、2 辺領域には3つのうち、残された arc が入るとする。下図参照)。

3つの内、残された最後の arc がこの2辺形領域に交わると仮定する。 $\overline{Q_i Q_{i+1}}$ (右の図では $\overline{Q_j Q_{j+1}}$) が太線の部分に、 Q_i (右の図では Q_j) から最初に交わる点を x 、その後 $\overline{Q_k Q_{k+1}}$ と交わる点を y だと定義する。



すると x, y の定義から、このような交わり方をする3つの arcs $\overline{Q_i Q_{i+1}}, \overline{Q_j Q_{j+1}}, \overline{Q_k Q_{k+1}}$ は存在しない (もし存在すると triple chord を含む)。尚、交点 y が取りうる位置としては下図のように3通りあるが、いずれの場合も triple chord を含む。

以上から、(Case 1)–(Case 3) いずれにおいても CD_P が triple chord を持たない場合、 $n > 0$ ならば、teardrop disk 内に strong 2辺形が存在する。 $n = 0$ のときは $\partial\delta$ に対応する1辺形が存在する。



((2) についての証明) Lemma 1 が成り立つ (Lemma 1 の証明は最後に回す)。

Lemma 1 P を prime knot projection とする。 CD_P が triple chord を含まないならば、1辺形と strong 2辺形を合わせた個数 n_P に対して $n_P \geq 2$ である。

P と P' の連結和を $P \# P'$ と表すことにする。今、 P を prime 分解する (knot の prime 分解と若干異なる。この様子については [4] を参照) と、ある knot projections の列 $\{P_i\}_{i=1}^l$ が存在して

$$P = (\dots((P_1 \# P_2) \# P_3) \dots P_l)$$

を満たす。

各 CD_{P_i} は triple chord を含まない。Lemma 1 より、 $n_{P_i} \geq 2$ 。まず、 $n_{P_1} + n_{P_2} \geq 4$ である。(1辺形, strong 2辺形)、(1辺形, 1辺形)、(strong 2辺形, strong 2辺形) のどの組み合わせも辺を共有することはない¹。よって連結和では高々2つしか減らない。よって、 $n_{P_1 \# P_2} \geq 2$ 。これを有限回繰り返すと $n_P \geq 2$ 。最後に、reduced ならば1辺形は無いので、 P は strong 2辺形を少なくとも2つ持つ。

(Lemma 1 の証明) もしも $n_P = 1$ であるとする、該当する1辺形もしくは strong 2辺形で連結和 $P \# P$ が考えられて、 $n_{P \# P} = 0$ 。しかし、 $CD_{P \# P}$ は triple chord を含まないので、すでに証明した Theorem 1 (1) により、 $n_{P \# P} \geq 1$ であり、矛盾する。□

最後に、他の研究への応用も述べておく。清水理佳が [6] において導入した既約度 r および、それに引き続く谷山公規による既約度 t への応用である (既約度 t は [3] において紹介されている)。ここでは r や t の定義は述べないが、これらは knot projection に

¹一般に、coherent な多辺形同士は辺を共有しない。

対する整数値関数として知られている（詳しくは講演スライド、正式には[1]をご参照いただきたい）。

Theorem 1 が得られたことにより（他のいくつかの事実を組み合わせると）次のことがわかる。

Proposition 1 P が nontrivial knot projection であり、かつ reduced であるとする。 CD_P が triple chord を含まないならば、 $r(P) = t(P) = 2$ である。

以上、数学的な記述のため、すべての敬称を略しました。

最後に、講演の機会を与えてくださり、かつ、本研究集会の運営にご尽力くださった日本大学の茂手木公彦先生と市原一裕先生に感謝申し上げます。

参考文献

- [1] N. Ito and Y. Takimura, Any nontrivial knot projection with no triple chords has a monogon or a bigon, preprint (submitted).
- [2] 伊藤昇・瀧村祐介、本講演の講演スライド（研究集会「結び目の数学 IX」web ページ内）、<http://www.math.chs.nihon-u.ac.jp/~ichihara/Knots2016/Slides/218.pdf>.
- [3] N. Ito and Y. Takimura, Knot projections with reductivity two, *Topology Appl.* **193** (2015), 290–301.
- [4] N. Ito and Y. Takimura, Strong and weak (1, 2) homotopies on knot projections and new invariants, *Kobe J. Math.* **33** (2016), 13–30.
- [5] M. Sakamoto and K. Taniyama, Plane curves in an immersed graph in \mathbb{R}^2 , *J. Knot Theory Ramifications* **22** (2013), 1350003, 10pp.
- [6] A. Shimizu, The reductivity of spherical curves, *Topology Appl.* **196** (2015), part B, 860–867.
- [7] K. Taniyama, A partial order of knots, *Tokyo J. Math.* **12** (1989), 205–229.