ハンドル体結び目とpartially multiplicative biquandleについて

岩切 雅英　(佐賀大学大学院工学系研究科)

1. はじめに

本稿では，multiple conjugation biquandleを導入し, それがhandlebody-linkのsemi-arc coloring不変量を定義するための普遍な代数系になっていることを紹介する．multiple conjugation biquandleは, 石井敦氏とSam Nelson氏によって導入されたpartially multiplicative biquandle[6]の本質的な部分であり, multiple conjugation quandle[3]の一般化になっている．また，いくつかのmultiple conjugation biquandleの例を紹介する．本研究は, 石井 敦氏，鎌田 聖一氏，Jieon Kim氏，松崎 尚作氏，大城 佳奈子氏との共同研究である. 詳細については[5]にて記述する.

2. Biquandle

Definition 2.1 ([1, 2, 7])**.** 空でない集合 X 上に以下の公理を満たす 2 つの 2 項演算 $\underline{*}, \overline{*} : X \times X \to X$ を持つとき, $(X; \underline{*}, \overline{*})$ を *biquandle* という．簡単のため $(X, \underline{*}, \overline{*})$ を X とも書く.

(B1) 任意の $x \in X$ に対して, $x \,\underline{*}\, x = x \,\overline{*}\, x$.

(B2) 任意の $a \in X$ に対して, x を $x \,\underline{*}\, a$ に対応させる写像 $\underline{*}a : X \to X$ は全単射.

任意の $a \in X$ に対して, x を $x \,\overline{*}\, a$ に対応させる写像 $\overline{*}a : X \to X$ は全単射.

写像 $S : X \times X \to X \times X$ を $S(x, y) = (y \,\overline{*}\, x, x \,\underline{*}\, y)$ により定義するとき, S は全単射.

(B3) 任意の $x, y, z \in X$ に対して,

$$
\begin{aligned}
(x \,\underline{*}\, y) \,\underline{*}\, (z \,\underline{*}\, y) &= (x \,\underline{*}\, z) \,\underline{*}\, (y \,\overline{*}\, z), \\
(x \,\underline{*}\, y) \,\overline{*}\, (z \,\underline{*}\, y) &= (x \,\overline{*}\, z) \,\underline{*}\, (y \,\overline{*}\, z), \\
(x \,\overline{*}\, y) \,\overline{*}\, (z \,\overline{*}\, y) &= (x \,\overline{*}\, z) \,\overline{*}\, (y \,\underline{*}\, z).
\end{aligned}
$$

$(X, *)$ がquandleであることと $(X, *, \overline{*})$ が $x \,\overline{*}\, y = x$ を満たすようなbiquandleであることは同値である．biquandleの例を以下紹介する.

Example 2.2. 群 G と以下を満たす 2 項演算 $\overline{*} : G \times G \to G$ を考える.

- 任意の $a \in G$ に対して, 写像 $\overline{*}a : G \to G$ は群準同型.
- 任意の $a, b, x \in G$ に対して, $x \,\overline{*}\, (ab) = (x \,\overline{*}\, a) \,\overline{*}\, (b \,\overline{*}\, a)$.

ここで, $a \,\underline{*}\, b := (b^{-1}ab) \,\overline{*}\, b$ とすると, $(G, \underline{*}, \overline{*})$ は biquandle となり, $\overline{*}$-*conjugation biquandle* もしくは *conjugation biquandle* という.

Example 2.3. R を可換環, X を $R[s^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$-module とする．X 上の 2 項演算を $a \underline{*} b = ta+(s-t)b$, $a \overline{*} b = sa$ と定義する．このとき X は biquandle となり, *Alexander biquandle* という．

本稿では, 括弧をしばしば省略する．その場合には, 群の積を優先して行い, それ以外は左から順番に 2 項演算を行う．例えば $a *_1 b *_2 cd *_3 (e *_4 f *_5 g)$ は $((a *_1 b) *_2 (cd)) *_3 ((e *_4 f) *_5 g)$ ということである．ここで, $*_i$ はある 2 項演算である．次に, $n \in \mathbb{Z}$ に対する n-parallel biquandle operation $\underline{*}^{[n]}, \overline{*}^{[n]}$ の定義を紹介する．これらは $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のときは [6] で定義されていた.

Definition 2.4. $(X, \underline{*}, \overline{*})$ を biquandle とする．2 項演算の族 $\underline{*}^{[n]}, \overline{*}^{[n]} : X \times X \to X$ $(n \in \mathbb{Z})$ を以下の等式により定義する．任意の $i, j \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$\begin{aligned} &a \,\underline{*}^{[0]}\, b = a, && a \,\underline{*}^{[1]}\, b = a \,\underline{*}\, b, && a \,\underline{*}^{[i+j]}\, b = (a \,\underline{*}^{[i]}\, b) \,\underline{*}^{[j]}\, (b \,\underline{*}^{[i]}\, b), \\ &a \,\overline{*}^{[0]}\, b = a, && a \,\overline{*}^{[1]}\, b = a \,\overline{*}\, b, && a \,\overline{*}^{[i+j]}\, b = (a \,\overline{*}^{[i]}\, b) \,\overline{*}^{[j]}\, (b \,\overline{*}^{[i]}\, b). \end{aligned}$$

Remark 2.5. (1) $\underline{*}^{[n]}, \overline{*}^{[n]}$ は, いずれも well-defined.
(2) 定義から次を得る．

$$\begin{aligned} a \,\underline{*}^{[1]}\, b = a \,\underline{*}\, b, &\quad a \,\underline{*}^{[2]}\, b = (a \,\underline{*}\, b) \,\underline{*}\, (b \,\underline{*}\, b), \\ a \,\underline{*}^{[-1]}\, b = a \,\underline{*}^{-1}\, (b \,\underline{*}^{[-1]}\, b), &\quad a \,\underline{*}^{[-2]}\, b = (a \,\underline{*}^{[-1]}\, b) \,\underline{*}^{[-1]}\, (b \,\underline{*}^{[-1]}\, b). \end{aligned}$$

Example 2.6. $(X, \underline{*}, \overline{*})$ が Alexander biquandle とする．このとき, $a \underline{*}^{[n]} b = t^n a + (s^n - t^n)b$, $a \,\overline{*}^{[n]}\, b = s^n a$.

3. multiple conjugation biquandle について

X を群 G_λ $(\lambda \in \Lambda)$ の非交和とする．$a \in X$ のとき G_λ を G_a とも表す．また, G_λ の単位元を e_λ と表す．$a \in G_\lambda$ ならば e_a とも表す．次に, multiple conjugation biquandle(MCB) の 2 つの定義を与える．これらの定義は同値である (Proposition 3.4).

Definition 3.1. X を群 G_λ $(\lambda \in \Lambda)$ の非交和とする．以下の公理を満たす biquandle $(X, \underline{*}, \overline{*})$ を *multiple conjugation biquandle* という．

- 任意の $a, x \in X$ に対して, $\underline{*}x : G_a \to G_{a \underline{*} x}$ と $\overline{*}x : G_a \to G_{a \overline{*} x}$ は群準同型.
- 任意の $a, b \in G_\lambda$ と $x \in X$ に対して,

$$\begin{aligned} &x \,\underline{*}\, ab = (x \,\underline{*}\, a) \,\underline{*}\, (b \,\overline{*}\, a), \\ &x \,\overline{*}\, ab = (x \,\overline{*}\, a) \,\overline{*}\, (b \,\overline{*}\, a), \\ &a^{-1}b \,\overline{*}\, a = ba^{-1} \,\underline{*}\, a. \end{aligned}$$

Definition 3.2. X を群 G_λ $(\lambda \in \Lambda)$ の非交和とする．X が以下の公理を満たす 2 項演算 $\underline{*}, \overline{*} : X \times X \to X$ をもつとき, *multiple conjugation biquandle* という．

- 任意の $x, y, z \in X$ に対して,

$$
\begin{aligned}
(x \underline{*} y) \underline{*} (z \underline{*} y) &= (x \underline{*} z) \underline{*} (y \overline{*} z),\\
(x \underline{*} y) \overline{*} (z \underline{*} y) &= (x \overline{*} z) \underline{*} (y \overline{*} z),\\
(x \overline{*} y) \overline{*} (z \overline{*} y) &= (x \overline{*} z) \overline{*} (y \underline{*} z).
\end{aligned}
$$

- 任意の $a, x \in X$ に対して, $\underline{*}x : G_a \to G_{a \underline{*} x}$ と $\overline{*}x : G_a \to G_{a \overline{*} x}$ は群準同型.

- 任意の $a, b \in G_\lambda$ と $x \in X$ に対して,

$$
\begin{aligned}
&x \underline{*} ab = (x \underline{*} a) \underline{*} (b \overline{*} a), \quad x \underline{*} e_\lambda = x,\\
&x \overline{*} ab = (x \overline{*} a) \overline{*} (b \overline{*} a), \quad x \overline{*} e_\lambda = x,\\
&a^{-1}b \overline{*} a = ba^{-1} \underline{*} a.
\end{aligned}
$$

Remark 3.3. 講演では, 本稿での multiple conjugation biquandle も partially multiplicative biquandle と呼ぶことにしていたが, 用語の混同を防ぐために変更した.

Proposition 3.4. X を 2 項演算 $\underline{*}, \overline{*} : X \times X \to X$ 付きの群 G_λ $(\lambda \in \Lambda)$ の非交和とする. そのとき X が Definition 3.1 の意味で MCB であることと Definition 3.2 の意味で MCB であることは同値である.

次に G-family of biquandles の定義を紹介する ([6]).

Definition 3.5. G を群, その単位元を e とする. 空でない集合 X 上に以下の公理を満たす 2 項演算の族 $\underline{*}^g, \overline{*}^g : X \times X \to X$ $(g \in G)$ が与えられたとき, X を *G-family of biquandles* という.

- 任意の $x, y, z \in X$ と $g, h \in G$ に対して,

$$
\begin{aligned}
(x \underline{*}^g y) \underline{*}^h (z \overline{*}^g y) &= (x \underline{*}^h z) \underline{*}^{h^{-1}gh} (y \underline{*}^h z),\\
(x \overline{*}^g y) \underline{*}^h (z \overline{*}^g y) &= (x \underline{*}^h z) \overline{*}^{h^{-1}gh} (y \underline{*}^h z),\\
(x \overline{*}^g y) \overline{*}^h (z \overline{*}^g y) &= (x \overline{*}^h z) \overline{*}^{h^{-1}gh} (y \underline{*}^h z).
\end{aligned}
$$

- 任意の $x, y \in X$ と $g, h \in G$ に対して,

$$
\begin{aligned}
&x \underline{*}^{gh} y = (x \underline{*}^g y) \underline{*}^h (y \underline{*}^g y), \quad x \underline{*}^e y = x,\\
&x \overline{*}^{gh} y = (x \overline{*}^g y) \overline{*}^h (y \overline{*}^g y), \quad x \overline{*}^e y = x,\\
&x \underline{*}^g x = x \overline{*}^g x.
\end{aligned}
$$

Definition 3.5 では, [6] の公理における全単射性を $x \underline{*}^e y = x \overline{*}^e y = x$ に置き換えている. この改良は MCB の 2 つの定義の同値性から導かれる.

Proposition 3.6 ([6])**.** $(X, (\underline{*}^g)_{g \in G}, (\overline{*}^g)_{g \in G})$ が G-family of biquandles とする. そのとき, $X \times G = \bigsqcup_{x \in X} \{x\} \times G$ は以下で定義される 2 項演算 $\underline{*}, \overline{*} : (X \times G) \times (X \times G) \to X \times G$ 付きの multiple conjugation biquandle である.

$$
(x, g) \underline{*} (y, h) = (x \underline{*}^h y, h^{-1}gh), \qquad (x, g) \overline{*} (y, h) = (x \overline{*}^h y, g).
$$

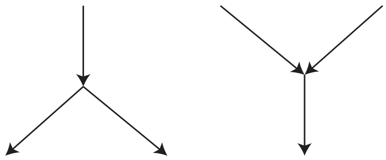

図 1: Y-orientation

以下G-family of biquandlesの例を紹介する．Proposition 3.6より，これらの例からmultiple conjugation biquandleの例を得る．

Proposition 3.7. $(X, \underline{*}, \overline{*})$をbiquandleとする．そのとき，$(X, (\underline{*}^{[n]})_{n\in\mathbb{Z}}, (\overline{*}^{[n]})_{n\in\mathbb{Z}})$は$\mathbb{Z}$-family of biquandlesである．

Proposition 3.8. Gを群，その単位元をeとし，$\varphi : G \to Z(G)$をGの中心$Z(G)$への準同型とする．Rを環，$R[G]$を群環，Xを右$R[G]$加群とする．2項演算$\underline{*}^g, \overline{*}^g : X \times X \to X$を$x \,\underline{*}^g\, y = xg + y(\varphi(g) - g)$, $x \,\overline{*}^g\, y = x\varphi(g)$により定義する．そのとき，$X$は$G$-family of biquandlesであり，*G-family of Alexander biquandles*という．

4. handlebody-linkのMCB coloring

*handlebody-link*とは3次元球面S^3に埋め込まれたhandlebodyの非交和のことをいう．本稿では，handlebody-linkの各成分の種数が1以上であることを仮定する．handlebody-linkのS^1*-orientation*とは全ての種数1成分のcoreの向きの集まりことをいう．2つのS^1-oriented handlebody-link H, H'が*equivalent*とは，S^1-orientationが合うようにHをH'に写す向きを保つS^3の自己同相写像が存在するときをいう．

trivalent graph Gの*Y-orientation*とは，全ての辺に向きを与えたもので，各頂点において図1のいずれかを満たしたもののことをいう．本稿では，trivalent graphは(頂点を持たない）S^1成分を含んでもよいこととする．

Y-oriented spatial trivalent graph KとS^1-oriented handlebody-link Hに対して，HがKの正則近傍でHのS^1-orientationとKのY-orientationが合うとき，KはHを表すという．任意のS^1-oriented handlebody-linkはあるY-oriented spatial trivalent graphで表わすことができる．S^1-oriented handlebody-link Hの*diagram*とは，Hを表すY-oriented spatial trivalent graph Kのdiagramのことをいう．

Theorem 4.1 ([4])**.** Y-oriented spatial trivalent graph K_i $(i = 1, 2)$のdiagram D_iに対して，K_1とK_2がequivalentなS^1-oriented handlebody-linkを表すこととD_1とD_2がY-orientationを保つR1–R6 moveの有限列で移りあうことは必要十分条件である．ここでR1–R6 moveとは図2の変形である．

Y-oriented spatial trivalent graphのdiagram Dに対して，Dのsemi-arc全体の集合を$\mathcal{SA}(D)$と表す．ここでsemi-arcとはDから頂点と交点を除いたものの連結成分のことをいう．

Definition 4.2. $X = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$をmultiple conjugation biquandleとする．任意の$a, b \in G_\lambda$に対して，$a \triangle b := b^{-1} a \,\overline{*}\, b$と定義する．$D$を$S^1$-oriented handlebody-link Hのdiagramとする．各交点で図3を満たすような写像$C : \mathcal{SA}(D) \to X$を$D$の$X$*-coloring*という．図3のnormal orientationはD上の辺のorientationを$\pi/2$反時計回りに回転させて得られる．DのX-coloring全体の集合を$\mathrm{Col}_X(D)$と表す．

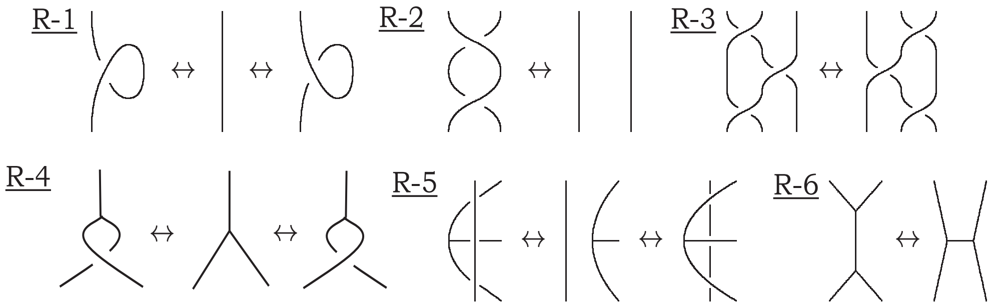

図 2: R1-R6moves

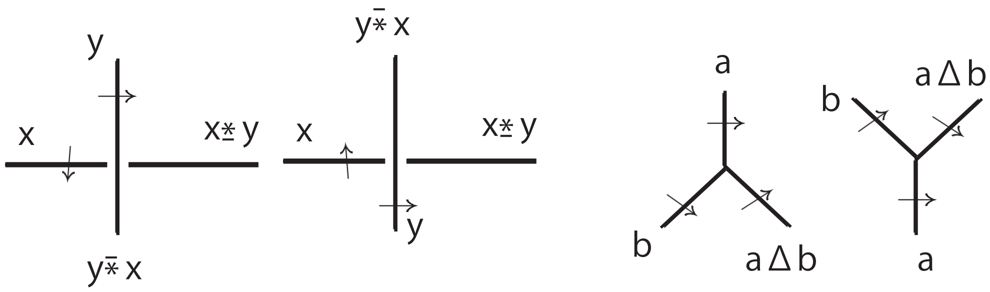

図 3: X-coloring

Theorem 4.3. $X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ を multiple conjugation biquandle とする．D を S^1-oriented handlebody-link H の diagram とする．D' を 1 回の Y-oriented R1–R6 move により得られた diagram とする．任意の D の X-coloring C に対して, その変形の外側の color が一致するような D' の X-coloring C' が一意的に存在する．

5. Primitive conditions と MCB の普遍性

X を biquandle, P を $X \times X$ の部分集合, 写像 $\triangle : P \to X$ をとる．$(a, b) \in P$ のとき $a \sim b$ と表す．写像 $C : \mathcal{SA}(D) \to X$ が Definition 4.2 の交点と頂点での条件を満たすとき, C を $(X, P, \triangle)$-coloring という．以下の条件を $(X, P, \triangle)$ 上の *primitive conditions* といい, それらは R4–R6 move を施した時に $(X, P, \triangle)$-coloring 全体の集合の間に 1 対 1 対応を与えるような条件である (R4 については図 4).

(R4) 任意の $a, b, x \in X$ に対して,

$$a \sim b, x = a \triangle b \Leftrightarrow a \,\underline{*}\, b \sim x, (a \,\underline{*}\, b) \triangle x = b \,\overline{*}\, a,$$
$$a \sim b, x = a \triangle b \Leftrightarrow a \,\overline{*}\, b \sim x, (a \,\overline{*}\, b) \triangle x = b \,\underline{*}\, a.$$

(R5) 任意の $a, b, x \in X$ に対して,

$$\begin{aligned} &a \sim b \Leftrightarrow a \,\underline{*}\, x \sim b \,\underline{*}\, x \\ &\qquad \Rightarrow (x \,\overline{*}\, b) \,\overline{*}\, (a \triangle b) = x \,\overline{*}\, a, (a \triangle b) \,\underline{*}\, (x \,\overline{*}\, b) = (a \,\underline{*}\, x) \triangle (b \,\underline{*}\, x), \\ &a \sim b \Leftrightarrow a \,\overline{*}\, x \sim b \,\overline{*}\, x \\ &\qquad \Rightarrow (x \,\underline{*}\, b) \,\underline{*}\, (a \triangle b) = x \,\underline{*}\, a, (a \triangle b) \,\overline{*}\, (x \,\underline{*}\, b) = (a \,\overline{*}\, x) \triangle (b \,\overline{*}\, x). \end{aligned}$$

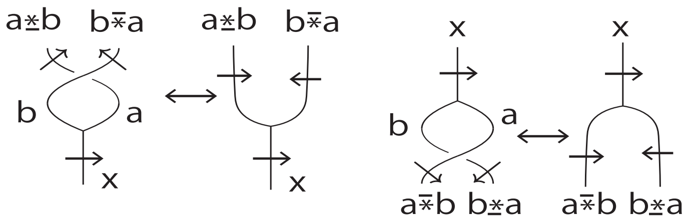

図 4: on R4-moves

(R6) 任意の $a, b, c, x \in X$ に対して,

$a \sim b, b \sim c, x = b\triangle c \Rightarrow a \sim c, a\triangle c \sim x, (a\triangle c)\triangle x = a\triangle b,$
$a \sim b, b \sim c, x = b\triangle c, (a\triangle c)\triangle x = a\triangle b$ となる $b \in X$ が一意的に存在する $\Leftarrow a \sim c, a\triangle c \sim x,$
$a \sim b, a \sim c, x = a\triangle c \Rightarrow b \sim c, x \sim b\triangle c, x\triangle(b\triangle c) = a\triangle b,$
$a \sim b, a \sim c, x = a\triangle c, x\triangle(b\triangle c) = a\triangle b$ となる $a \in X$ が一意的に存在する $\Leftarrow b \sim c, x \sim b\triangle c.$

Theorem 5.1. $(X, P, \triangle)$ 上の primitive conditions を満たすと仮定する.

(1) X の部分集合 $X_1 := \{b \in X \mid a \sim b$ は $a \in X$ が存在する$\}$, $X_2 := X - X_1$ をとる. そのとき X_1, X_2 は X の subbiquandle で以下を満たす. 任意の $a \in X$ に対して,

$$X_1 \mathbin{\underline{*}} a = X_1 \mathbin{\overline{*}} a = X_1, \qquad X_2 \mathbin{\underline{*}} a = X_2 \mathbin{\overline{*}} a = X_2.$$

ここで, $X_i \mathbin{\underline{*}} a = \{x \mathbin{\underline{*}} a \mid x \in X_i\}$, $X_i \mathbin{\overline{*}} a = \{x \mathbin{\overline{*}} a \mid x \in X_i\}$.

(2) $\sim$ は X_1 上の同値関係.

(3) $X_1 = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ を $\sim$ による同値類分解とする. すなわち $a \sim b$ であることとある $\lambda \in \Lambda$ に対して $a, b \in G_\lambda$ であることが同値である. そのとき X_1 は multiple conjugation biquandle である.

Remark 5.2. 定義から, X_2 の元は頂点周りでの color に使うことができない. また種数 2 以上の handlebody-knot に対して各辺の color に使うことができない. この意味で MCB は S^1-oriented handlebody-link に対して普遍な biquandle である. multiple conjugation quandle (MCQ) [3] は unoriented handlebody-link に対して同じ意味で普遍な symmetric quandle である. MCQ の公理は $x \mathbin{\overline{*}} y = x$ としたときの MCB の公理と一致する.

6. Partially multiplicative biquandle

[6] において, 次のように partially multiplicative biquandle が導入された.

Definition 6.1 ([6])**.** X を biquandle, $\widetilde{P}$ を $X \times X$ の部分集合, 写像 $\bullet : \widetilde{P} \to X$ をとる. X が以下の条件を満たすとき *partially multiplicative biquandle* という. ここで $\bullet(a, b)$ を $a \bullet b$ と表す.

(i) $x \mapsto a \bullet x$, $x \mapsto x \bullet b$ は単射.

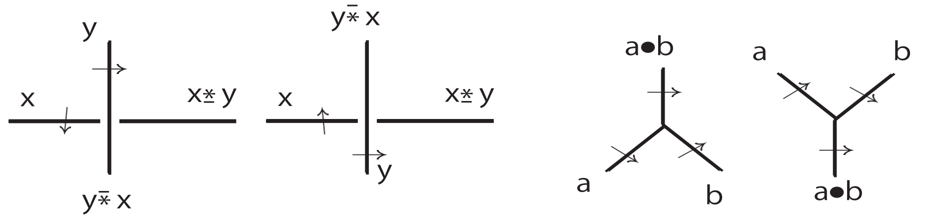

図 5: partially multiplicative biquandle による coloring

(ii) $(a, b \underline{*} a) \in \widetilde{P} \Leftrightarrow (b, a \overline{*} b) \in \widetilde{P} \Rightarrow a \bullet (b \underline{*} a) = b \bullet (a \overline{*} b)$.

(iii) $(a, b) \in \widetilde{P} \Leftrightarrow (a \underline{*} x, b \underline{*} (x \overline{*} a)) \in \widetilde{P} \Leftrightarrow (a \overline{*} x, b \overline{*} (x \underline{*} a)) \in \widetilde{P} \Rightarrow$

$$x \underline{*} (a \bullet b) = (x \underline{*} a) \underline{*} b, \qquad (a \bullet b) \underline{*} x = (a \underline{*} x) \bullet (b \underline{*} (x \overline{*} a)),$$
$$x \overline{*} (a \bullet b) = (x \overline{*} a) \overline{*} b, \qquad (a \bullet b) \overline{*} x = (a \overline{*} x) \bullet (b \overline{*} (x \underline{*} a)).$$

(iv) $(a, b), (a \bullet b, c) \in \widetilde{P} \Leftrightarrow (b, c), (a, b \bullet c) \in \widetilde{P} \Rightarrow (a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$.

(v) $(a, b), (c, d) \in \widetilde{P}, a \bullet b = c \bullet d \Leftrightarrow (a, e), (e, d) \in \widetilde{P}, a \bullet e = c, e \bullet d = b$ を満たす $e \in X$ が存在する.

partially multiplicative biquandle の公理は, coloring を以下の図 5 ように定義したときに primitive conditions のようなものを考えることで得られる.

partially multiplicative biquandle の (i) 以外の公理は,

$$a \bullet b = b \triangle^{-1} a = a(b \overline{*}^{-1} a),$$
$$\widetilde{P} = \{(a, b \triangle a) \mid (b, a) \in P\} = \{(a, a^{-1} b \overline{*} a) \mid (a, b) \in \textstyle\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda^2\},$$

とおくと primitive conditions と一致する. Theorem 5.1 より, partially multiplicative biquandle は multiple conjugation biquandle と biquandle からなる. このとき, 公理 (i) を得ることが示せる.

参考文献

[1] R. Fenn, M. Jordan-Santana and L. H. Kauffman, *Biquandles and virtual links*, Topology Appl. **145** (2004), 157–175.

[2] R. Fenn, C. Rourke and B. Sanderson, *Trunks and classifying spaces*, Appl. Categ. Structures **3** (1995), 321–356.

[3] A. Ishii, *A multiple conjugation quandle and handlebody-knots*, Topology Appl. **196** (2015), 492–500.

[4] A. Ishii, *The Markov theorem for spatial graphs and handlebody-knots with Y-orientations*, Internat. J. Math. 26 (2015), 1550116, 23 pp.

[5] A. Ishii, M. Iwakiri, S. Kamada, J. Kim, S. Matsuzaki and K. Oshiro, *A multiple conjugation biquandle and handlebody-links*, preprint.

[6] A. Ishii and S. Nelson, *Partially multiplicative biquandles and handlebody-knots*, preprint.

[7] L. H. Kauffman and D. E. Radford, *Bi-oriented quantum algebras, and generalized Alexander polynomial for virtual links*, Contemp. Math., **318** (2003), 113–140.