An obstruction to the existence between right-angled Artin groups

片山 拓弥　(広島大学)*

1. 導入

本稿では，グラフと言えば単純グラフを指すものとする．Γを有限グラフとする．$V(\Gamma) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$を$\Gamma$の頂点集合，$E(\Gamma)$を辺集合とする．このとき，$\Gamma$上の**right-angled Artin 群**とは，次の群表示により与えられる群のことである．

$$A(\Gamma) = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \mid v_i v_j v_i^{-1} v_j^{-1} = 1 \text{ if } \{v_i, v_j\} \in E(\Gamma) \rangle.$$

与えられた2つのright-angled Artin群の間に埋め込みがあるか否かという素朴な問題は，はじめCrisp–Sageev–Sapir [2] により提起された．

問題 1.1. Λ，Γを有限グラフとする．$A(\Lambda)$が$A(\Gamma)$に埋め込まれるか否か決定せよ．

現状，問題1.1の完全解決にはまだ長い道のりがあると思われる．しかし近年，Kim–Koberda [7] を中心とした研究者たちにより，問題1.1の解決に向けて着々と成果が報告され始めている．本稿では研究集会「結び目の数学 IX」において発表した，拙著[4]の主定理を紹介する．主定理を述べる前に，主定理の主張に現れるグラフ理論の用語を準備しておこう．

Λ，Γを有限グラフとする．Γの部分グラフΛがΓの**誘導部分グラフ**であるとは，両端点が2つともΛの頂点であるようなΓの辺は全てΛの辺であるときをいう．ΛがΓの誘導部分グラフとして実現できるとき，$\Lambda \leq \Gamma$と記す．Λの各連結成分が単連結のときΛを**forest**といい，さらに各連結成分が単位区間に同相のときにはΛを**linear forest**という．Λの**補グラフ**Λ^cとは，頂点集合を$V(\Lambda)$とし辺集合を$\{\{u, v\} \mid u, v \in V(\Lambda),\ \{u, v\} \notin E(\Lambda)\}$とするグラフのことである．以上の設定のもと，本稿で紹介する主定理は次である．

主定理 1.2. Λを有限グラフとする．

(1) もしΛがlinear forestの補グラフであるならば，$A(\Lambda) \hookrightarrow A(\Gamma)$が成立する任意の有限グラフ$\Gamma$に対して$\Lambda \leq \Gamma$が成立する．

(2) もしΛがlinear forestの補グラフでないならば，有限グラフΓであって$A(\Lambda) \hookrightarrow A(\Gamma)$と$\Lambda \not\leq \Gamma$を同時に満たすものが存在する．

主定理1.2自体は，“$A(\Lambda) \hookrightarrow A(\Gamma)$が成立する任意の有限グラフ$\Gamma$に対して$\Lambda \leq \Gamma$が成立するような有限グラフ$\Lambda$”を全て求めよ，という問題への完全な解答であるが，主定理1.2(1)は障害定理として利用することができる．現状ではright-angled Artin群の間の埋め込みを構成する研究は活発になされているが，埋め込みが存在しないことを導く手法はまだ少なく，主定理1.2(1)はその観点からも価値のあるものと思われる．埋

キーワード：Right-angled Artin 群，埋め込み，誘導部分グラフ
* 〒739-8526 東広島市鏡山1-3-1　広島大学大学院理学研究科
e-mail: tkatayama@hiroshima-u.ac.jp

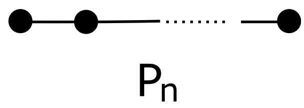

図 1: 道グラフ P_n．添字 n は頂点の数を表す．

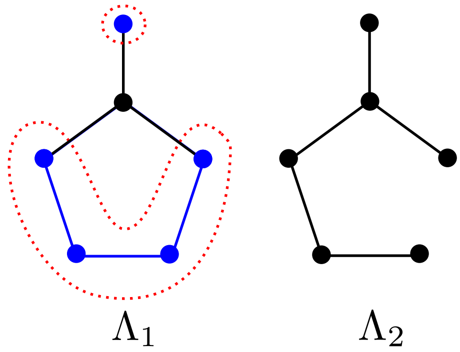

図 2: 左は Λ_1 で右は Λ_2．左の点線で囲まれた領域は Λ_1 の誘導部分グラフ $P_1 \sqcup P_4$ を表している．

め込みの非存在を導く手法の現状について書かれたものはまだ拙著 [6] しかないが，興味のある方はこれを参照して頂きたい．また，研究集会「結び目の数学 IX」における著者の講演では，right-angled Artin 群から写像類群への埋め込みの問題への応用についても話した．それについては [4] または講演スライド [5] を参照して頂きたい．

本稿は，次のように構成されている．2 章では，主定理 1.2(1) を具体的な埋め込みの問題に適用し，実際に埋め込みの障害として使えるところを見る．3 章では，主定理 1.2 を Salvetti 複体を用いて書き直すことを試みる．

2. 埋め込みの障害としての主定理 1.2(1)

この章では主定理 1.2(1) を 2 つの具体的な埋め込みの問題に適用する．まず，この章で使うグラフの記号を導入しておく．P_n を n 頂点からなる**道グラフ**とする，すなわち，P_n は n 個の頂点をもち，かつ単位区間と同相なグラフである (図 1)．

命題 2.1. 階数 2 の自由アーベル群と無限巡回群の自由積 $\mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}$ は階数 2 の自由群の直積 $F_2 \times F_2 \times \cdots \times F_2$ には埋め込まれない．

証明. $\mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}$ が $F_2 \times F_2 \times \cdots \times F_2$ に埋め込まれると仮定して矛盾を導く．$\mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z} \cong A(P_3^c)$，$F_2 \times \cdots \times F_2 \cong A((P_2 \sqcup P_2 \sqcup \cdots \sqcup P_2)^c)$ と書けることに注意する．仮定より，$A(P_3^c) \hookrightarrow A((P_2 \sqcup P_2 \sqcup \cdots \sqcup P_2)^c)$ であるが，P_3^c は linear forest の補グラフであるから，$P_3^c \leq (P_2 \sqcup P_2 \sqcup \cdots \sqcup P_2)^c$ が主定理 1.2(1) から従う．これは $P_3 \leq P_2 \sqcup P_2 \sqcup \cdots \sqcup P_2$ を意味するが，あり得ないので矛盾． □

命題 2.2. Λ_1，Λ_2 を図 2 に描かれたグラフとする．このとき，$A(\Lambda_1^c)$ は $A(\Lambda_2^c)$ に埋め込まれない．

証明. $A(\Lambda_1^c) \hookrightarrow A(\Lambda_2^c)$ と仮定して矛盾を導く．$P_1 \sqcup P_4 \leq \Lambda_1$ なので $(P_1 \sqcup P_4)^c \leq \Lambda_1^c$ であり，よって $A((P_1 \sqcup P_4)^c) \hookrightarrow A(\Lambda_1^c)$．これと仮定を合わせて $A((P_1 \sqcup P_4)^c) \hookrightarrow A(\Lambda_2^c)$ を得る．ところが $(P_1 \sqcup P_4)^c$ は linear forest の補グラフであるから主定理 1.2(1) より $(P_1 \sqcup P_4)^c \leq \Lambda_2^c$，すなわち，$P_1 \sqcup P_4 \leq \Lambda_2$ を得るが，これはあり得ない． □

3. Salvetti 複体と主定理

この節では，right-angled Artin 群 $A(\Gamma)$ の $K(A(\Gamma),1)$ 空間としてよく知られている "Salvetti 複体"を用いて主定理を書き直す．

有限グラフ Γ 上の right-angled Artin 群に付随する **Salvetti 複体** $S(\Gamma)$ とは，次のようなセル複体，特に立方複体である．まず，セルとして Euclid 空間の単位立方体を用意しておく．0-骨格 $S^{(0)}(\Gamma)$ は一点のみからなるとする．1-骨格 $S^{(1)}(\Gamma)$ は Γ の頂点に対応する $\#V(\Gamma)$ 個の向きのついた S^1 からなるブーケである．次に Γ の各辺に対して "両端点の交換子が群の元として消えるように" $S^{(1)}(\Gamma)$ に 2 次元トーラスを貼りつけることで 2-骨格 $S^{(2)}(\Gamma)$ を作る．$S(\Gamma)$ は Γ の各完全部分グラフに対応して，さらに高次のトーラスを貼りつけていくことによってできる．このとき，Salvetti 複体には自然に局所 CAT(0) な立方複体としての距離構造が入り，基本群 $\pi_1(S(\Gamma))$ は $A(\Gamma)$ に同型である．また，完全グラフ上の right-angled Artin 群に付随する Salvetti 複体はトーラスであるから，一般の有限グラフ Γ から得られる $S(\Gamma)$ は，完全部分グラフを誘導しない頂点の組に対応する部分トーラスを $(\#V(\Gamma))$–次元トーラスからを削除していき得られると言ってもよい．以上のところで分からない用語があれば，Crisp–Wiest [3] を参照してほしい．

距離空間 X から距離空間 Y への写像が X の各点に対してその点のある近傍で等長的になっているとき，この写像は**局所等長的**であるという．よく知られていることであるが，有限次元局所 CAT(0) 立方複体の間の局所等長な複体の写像は，π_1-injective な連続写像である [3, Theorem 1] ことに注意しておく．

次の補題が成立する．

補題 3.1. Λ，Γ を有限グラフとする．

(1) $A(\Lambda) \hookrightarrow A(\Gamma)$ であることと，$S(\Lambda)$ から $S(\Gamma)$ へ π_1-injective な連続写像が存在することは同値である．

(2) $\Lambda \leq \Gamma$ であることと，$S(\Lambda)$ が $S(\Gamma)$ に部分複体として局所等長に埋め込まれることは同値である．

証明. (2) Λ が Γ の部分グラフであることから，$S(\Lambda)$ が $S(\Gamma)$ に部分複体として埋め込まれることが従う．逆に，$S(\Lambda)$ が $S(\Gamma)$ に部分複体として埋め込まれるならば，1-骨格の間の包含写像が $V(\Lambda)$ から $V(\Gamma)$ への単射を与え，2-骨格の間の包含写像が Λ から Γ への部分グラフとしての単射を与える．部分グラフが誘導であることと，この写像が局所等長であることは同値であることが Crisp–Wiest [3, Theorem 1] を使えば分かる． □

さて，補題 3.1 を用いて，Salvetti 複体の言葉で定理 1.2(1) を表現すると次のようになる．

命題 3.2. Λ を linear forest の補グラフとし，Γ を有限グラフとする．もし π_1-injective な連続写像 $S(\Lambda) \to S(\Gamma)$ が存在するならば，$S(\Lambda)$ は $S(\Gamma)$ の局所等長に埋め込まれた部分複体として実現できる．

この命題の原型である定理 1.2(1) の証明は，次の定理 3.3 と補題 3.4 による．

定理 3.3. Λ を forest の補グラフとし，Γ を有限グラフとする．もし $A(\Lambda) \hookrightarrow A(\Gamma)$ ならば，$\Lambda \leq \Gamma^e$.

補題 3.4. Λ を linear forest の補グラフとし，Γ を有限グラフとする．もし $\Lambda \leq \Gamma^e$ ならば，$\Lambda \leq \Gamma$.

ここで上の主張に出てくる Γ^e は Γ の "extension graph" と呼ばれるグラフである (cf. [1], [4])．定理 3.3 及び補題 3.4 にも Salvetti 複体を用いて (煩雑ではあるが) 幾何学的な説明を与えることができる．しかし著者は現時点ではすっきりとした説明を持たないため，省略する．定理 3.3 の証明については Casals-Ruiz [1]，補題 3.4 の証明については Katayama [4] を参照してほしい．

また，主定理 1.2(2) を Salvetti 複体を用いて表現すると，次のようになる．

命題 3.5. もし Λ が linear forest の補グラフでないならば，次のような有限グラフ Γ が存在する: π_1-injective な写像 $S(\Lambda) \to S(\Gamma)$ が存在する一方，$S(\Lambda)$ は $S(\Gamma)$ に局所等長に埋め込まれない．

論文 [4] では，命題 3.5 の主張にある Γ は次の要求を満たすように構成されている: $S(\Gamma)$ のある 2 重被覆 $\tilde{S}(\Gamma)$ について，$S(\Lambda)$ にホモトピー同値な部分複体が $\tilde{S}(\Gamma)$ に局所等長に埋め込まれている．従って，これら局所等長的な包含写像と被覆写像（とホモトピー同値写像）が $S(\Lambda)$ から $S(\Gamma)$ への π_1-injective な連続写像を与える，という寸法になっている．

Right-angled Artin 群と Salvetti 複体の性質がよく調べられた暁には，主定理は定理 3.3 や補題 3.4 のような証明の大変な事実を経由せずに証明できるのかもしれない．

4. 謝辞

研究集会「結び目の数学 IX」のお世話をしてくださり，また著者に講演の機会をくださった市原一裕先生，茂手木公彦先生に厚くお礼申し上げます．

参考文献

[1] M Casals-Ruiz, "Embeddability and universal equivalence of partially commutative groups", *Int. Math. Res. Not.* (2015) 13575–13622.

[2] J Crisp, M Sageev, M Sapir, "Surface subgroups of right-angled Artin groups", *Internat. J. Algebra Comput.* 18 (2008) 443–491.

[3] J Crisp, B Wiest, "Embeddings of graph braid and surface groups in right-angled Artin groups and braid groups", *Algebr. Geom. Topol.* 4 (2004) 439–472.

[4] T Katayama, "Right-angled Artin groups and full subgraphs of graphs", preprint, available at arXiv:1612.01732.

[5] 片山 拓弥, 研究集会「結び目の数学 IX」講演スライド, http://www.math.chs.nihon-u.ac.jp/ ichihara/Knots2016/Slides/215.pdf.

[6] 片山 拓弥, "Right-angled Artin 群の間の埋め込みに関する障害について", 京都大学数理解析研究所講究録, to appear.

[7] S Kim, T Koberda, "Embedability between right-angled Artin groups", *Geom. Topol.* 17 (2013) 493–530.