

Extension of the interior polynomial to signed bipartite graphs

嘉藤 桂樹 (東京工業大学)*

概要

グラフから構成される結び目の多項式不変量をグラフの多項式不変量から求めることがいままでに研究されてきた。二部グラフから構成される特殊交代結び目の HOMFLY 多項式の z の最高次数の多項式が二部グラフの不変量である内部多項式で求められることが知られている。本稿では、符号付き二部グラフの内部多項式を定義し、符号付き二部グラフから構成される特殊図式で描かれる結び目の HOMFLY 多項式のある部分と係数が一致することを示す。

1. 研究動機

1.1. Tutte 多項式

$G = (V, E)$ をグラフとする。 V は G の頂点集合で、 E は G の辺集合とする。このグラフの多項式不変量として、Tutte が導入した Tutte 不変量がある。

定義 1.1 (Tutte polynomial).

$$T_G(x, y) = \sum_{S \subseteq E} (x - 1)^{k(S) - k(G)} (y - 1)^{k(S) + |S| - |V|}.$$

ここで、 $k(G)$ はグラフ G の連結成分の個数で、 $k(S)$ はグラフ (V, S) の連結成分の個数とする。また、 $k(S) + |S| - |V|$ はグラフ (V, S) の第 1 Betti 数に等しい。

さらに、この Tutte 多項式は、spanning tree を用いた定義がある。

定理 1.2. 辺集合 E の元に任意の順序を入れる。このとき、spanning tree T について、ある辺 $e \in T$ を取り外し、 e より小さい G の辺を T に付け加えて違う spanning tree が構成できないとき、その辺 $e \in E$ は *internally active* であるといい、 T の *internally active* な辺の個数を $I(T)$ と書く。また、spanning tree T について、ある辺 $e \notin T$ を付け加え、 e より小さい G の辺を T から取り外して違う spanning tree が構成できないとき、その辺 $e \notin E$ は *externally active* であるといい、 T の *externally active* な辺の個数を $E(T)$ と書く。このとき、

$$T_G(x, y) = \sum_{\substack{T \subset G \\ T : \text{spanning tree}}} x^{I(T)} y^{E(T)}.$$

この定理により、spanning tree を用いた定義は、辺の順序によらないことがわかる。

1.2. HOMFLY 多項式

HOMFLY 多項式は以下のように結び目に定義された二変数多項式不変量である [3]。

* 〒 152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1 東京工業大学 理工学研究科
e-mail: kato.k.at@m.titech.ac.jp

定義 1.3. HOMFLY 多項式 $P_L(v, z)$ は以下のようにして帰納的に定義する。

- (i) $P_{\text{自明な結び目}} = 1$
- (ii) 3つの図式、 D_+ , D_- , D_0 はある一部分だけが下図のように異なっており、それ以外の部分は一致しているものとする。このとき、 $v^{-1}P_{D_+} - vP_{D_-} = zP_{D_0}$

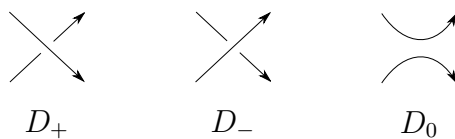
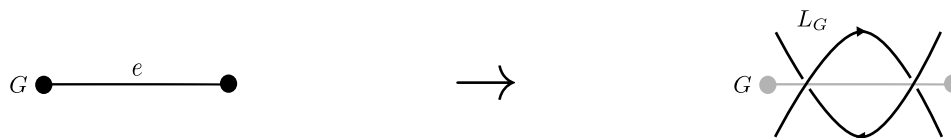


図 1: スケイントリプル

HOMFLY 多項式は Alexander 多項式 $\Delta(t)$ と Jones 多項式 $V(t)$ の両方の情報を含んでいる。実際、 $\Delta(t) = P(1, t^{1/2} - t^{-1/2})$ と $V(t) = P(t, t^{1/2} - t^{-1/2})$ という関係式が成り立っている。

1.3. Jaeger の結果

結び目多項式と Tutte 多項式には、関係があることが知られている。Thistlethwaite 氏による、Jones 多項式との関係 [10]、Kauffman 多項式との関係 [11] が知られている。今回は特に、Jaeger 氏による HOMFLY 多項式との関係について述べる。まず、グラフ G の各辺について、2つの交点を交代図式になるように与え、できた結び目図式で表させる結び目を L_G と書くことにする。



定理 1.4 (F. Jaeger, [4]). 結び目 L_G は前述の構成方法によって、 G から得られる結び目とする。このとき、

$$P_{L_G}(v, z) = \left(\frac{v}{z}\right)^{|V|-1} (vz)^{|E|} T_G\left(\frac{1}{v^2}, \frac{z^2 - v^2 + 1}{z^2}\right).$$

この定義から構成される結び目は各成分に関しては、自明な結び目になり、あまり一般的な結び目とは言えない。より一般的な結び目に対して、HOMFLY 多項式 (あるいはその一部) をグラフから求めることができないかと考えたのが研究の動機である。より具体的には、辺の中心から見ると、交点が2つあるが、これを3つや4つに増やして、Tutte 多項式を定義できないかと考えたのが、2.1 で示す Kálmán 氏の内部多項式である。

2. 内部多項式と Ehrhart 多項式

2.1. 内部多項式

連結二部グラフを $G = (V, E, \mathcal{E})$ とかき、 V, E は頂点集合のカラークラス、 \mathcal{E} は辺集合とする。頂点集合のうち一方を hyperedge 集合とする。ここでは、 E を hyperedge 集合として、順序を入れる。

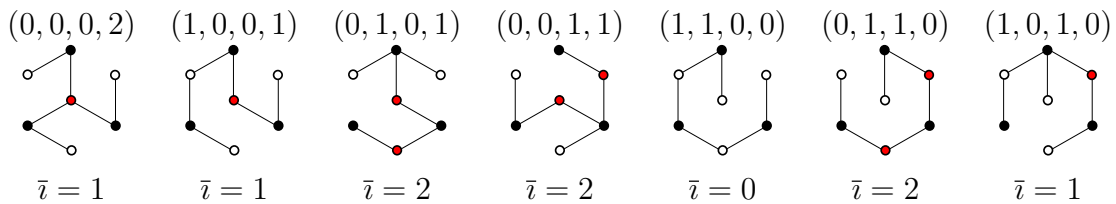
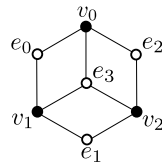
定義 2.1. 関数 (もしくはベクトル) $f: E \rightarrow \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ について、 f が G の hypertree であるとは、 $e \in E$ に $f(e) + 1$ 本の辺を隣接させることで G の spanning tree が見つけれられるものであるとする。また、 G のすべての hypertree の集合を Q_G と書く。

定義 2.2. hypertree \mathbf{f} について、 $\mathbf{f}(e)$ を 1 だけ減少させて、 e より小さい hyperedge の \mathbf{f} を 1 だけ増加させても、別の hypertree が構成できるとき、hyperedge $e \in E$ は internally inactive であるという。

定義 2.3. $G = (V, E, \mathcal{E})$ の hyperedge に順序が与えられているとき、 $\bar{i}(\mathbf{f})$ を internally inactive である hyperedge の個数とする。このとき、 G の内部多項式を以下で定義する。

$$I_G(x) = \sum_{\mathbf{f} \in Q_G} x^{\bar{i}(\mathbf{f})}.$$

例 2.4. 以下のような二部グラフ G を考え、hyperedge 集合 E に $e_0 \prec e_1 \prec e_2 \prec e_3$ という順序を入れる。このとき、hypertree は以下の 7 つであり、internal inactive な辺は赤で塗られた辺である。よって、この二部グラフの内部多項式は $I_G(x) = 1x^0 + 3x^1 + 3x^2$ となる。



この内部多項式は、Kálmán 氏によって導入され、以下が示された。

定理 2.5 (T. Kálmán, [5]). $I_G(x)$ は hyperedge の順序によらない。

また、hyperedge をもう一方の頂点集合にした場合でも、内部多項式は同じになることが示された。

定理 2.6 (T. Kálmán and A. Postnikov, [7]). $\bar{G} = (E, V, \mathcal{E})$ を二部グラフ G で hyperedge 集合を V としたものとする。このとき、 $I_G = I_{\bar{G}}$ が成り立つ。

以上から、内部多項式は、二部グラフの多項式不変量となる。また、内部多項式は、Tutte 多項式 $T(1/x, 1)$ のある種の一般化になっている。

注意 2.7. グラフ $G = (V, E)$ に対して、 G の辺に新しい頂点を置き、その頂点集合を V' とし、二部グラフ $\tilde{G} = (V, V', E)$ を定義する。このとき、 $I_{\tilde{G}}(x) = x^{|V|-1} T_G(1/x, 1)$ 。

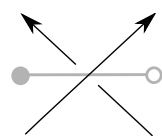


図 2: G から得られる L_G の交点

次に、二部グラフ $G = (V, E, \mathcal{E})$ の辺に下図のような交点を対応させることで特殊交代結び目 L_G が得られる。

このとき、以下の2つの定理より、HOMFLY多項式の z の最高次数の項の係数は内部多項式と等しくなることがわかる。

定理 2.8 (T. Kálmán and H. Murakami, [6]). HOMFLY多項式 $P_{L_G}(v, z)$ の z の最高次数の係数は $v^{|\mathcal{E}|+(|V|+|E|)-1}h_{Q_G}(v^{-2})$ となる、ただし、 h_{Q_G} は root polytope Q_G の h -vector とする。

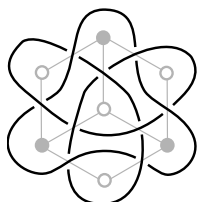
定理 2.9 (T. Kálmán and A. Postnikov, [7]). 根多面体 Q_G の h -vector を $h_{Q_G}(x)$ とおくと、 $I_G(x) = x^{|V|+|E|-1}h_{Q_G}(x^{-1})$ が成り立つ。

h -vector については、[6][7] を参照されたい。以上の2つの定理から、以下が成立する。

定理 2.10. 任意の平面二部グラフ $G = (V, E, \mathcal{E})$ に対して、HOMFLY多項式 $P_{L_G}(v, z)$ の z の最高次数の係数は $v^{|\mathcal{E}|-(|V|+|E|)+1}I_G(v^2)$ となる。

以降、 $T_{L_G}(v)$ を L_G の HOMFLY 多項式の項のうち、 z の指数が $|\mathcal{E}_+| + |\mathcal{E}_-| - (|V| + |E|) + 1$ である部分を抽出してできる v の多項式とする。この項は、特殊交代図式では、HOMFLY多項式での z の最高次数であることが知られている(後述 定理3.5)。よって、 T_{L_G} を HOMFLY多項式 $P_{L_G}(v, z)$ の z の最高次数の部分として良い。

例 2.11. G と L_G を図3のような平面二部グラフと結び目とする。このとき、 I_G と P_{L_G} が以下のように計算できる。 $T_{L_G}(v) = 1v^3 + 3v^5 + 3v^7$ と I_G の係数が一致しているのがわかる。



$$I_G = 1x^0 + 3x^1 + 3x^2.$$

$$P_{L_G}(v, z) = \begin{matrix} +1v^3z^3 & +3v^5z^3 & +3v^7z^3 \\ +3v^5z & +4v^7z & -4v^9z \\ +2v^7z^{-1} & -3v^9z^{-1} & +1v^{11}z^{-1}. \end{matrix}$$

図 3: 特殊交代結び目の内部多項式と HOMFLY 多項式

これを、符号付き二部グラフに拡張していくが、まず不連結な二部グラフに拡張を行う。 G を一般の二部グラフとする。 G の連結成分の個数を $k(G)$ と書くことにすると、 G は連結成分 $\{G_1, G_2, \dots, G_{k(G)}\}$ によって、 $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_{k(G)}$ とかける。このとき、内部多項式を以下のように定める。

定義 2.12.

$$I'_G(x) = (1-x)^{k(G)-1} \prod_{i=1}^{k(G)} I_{G_i}(x).$$

このとき、グラフ $G \cup G'$ を2つのグラフ G と G' の非交和とする。このとき、 $I'_{G \cup G'} = (1-x)I'_G I'_{G'}$ が成り立つ。グラフ $G \cup G'$ から構成される結び目は $L_{G \cup G'} = L_G \cup L_{G'}$ となる。HOMFLY多項式には、非交和の結び目に対して、 $P_{L \cup L'}(v, z) = \frac{v^{-1}-v}{z} P_L(v, z) P_{L'}(v, z)$ が成り立つので、連結でない結び目に対しても、定理2.10と同様な主張が成り立つ。

定理 2.13. 任意の二部グラフ $G = (V, E, \mathcal{E})$ に対して、

$$T_{L_G}(v) = v^{|\mathcal{E}| - (|V| + |E|) + 1} I'_G(v^2).$$

2.2. 根多面体と Ehrhart 多項式

二部グラフ $G = (V, E, \mathcal{E})$ に対して、根多面体 Q_G が以下のようにして定義できる。

定義 2.14. 任意の $v \in V$ と $e \in E$ に対して、 \mathbf{v} と \mathbf{e} をユークリッド空間 $\mathbb{R}^V \oplus \mathbb{R}^E$ の標準生成元とする。このとき、二部グラフ G の根多面体 Q_G を以下のように定義する。

$$Q_G = \text{Conv}\{\mathbf{v} + \mathbf{e} \mid v \text{ と } e \text{ は } G \text{ の辺で繋がっている}\}.$$

以降、 G を連結二部グラフとする。

定義 2.15 (Ehrhart 多項式). 任意の根多面体 Q_G に対して、Ehrhart 多項式 $\varepsilon_{Q_G}(s)$ を以下のように定義する。

$$\varepsilon_{Q_G}(s) := |s \cdot Q_G \cap \mathbb{Z}^V \oplus \mathbb{Z}^E| = \sum_{k=0}^{|V|+|E|-2} a_k \binom{s + |V| + |E| - 2 - k}{|V| + |E| - 2}.$$

一般の多面体 P に対して、 $|s \cdot P \cap \mathbb{Z}^V \oplus \mathbb{Z}^E|$ は、多項式になるとは限らないが、凸多面体で頂点が整数のときは多項式になることが知られている。また、エルハート多項式は $|V| + |E| - 2$ 次の多項式であり、 $\left\{ \binom{s+d-k}{d} \right\}_{k=0}^d$ は d 次の多項式全体の基底になっている。そのため、 Q_G に対して、 $\{a_k\}_k^{|V|+|E|-2}$ は一意であり、これは内部多項式の係数と一致している。

定理 2.16 (T. Kálmán and A. Postnikov, [7]). ある二部グラフ G の根多面体 Q_G の Ehrhart 多項式が $\varepsilon_{Q_G}(s) = \sum_{k=0}^{|V|+|E|-2} a_k \binom{s + |V| + |E| - 2 - k}{|V| + |E| - 2}$ で表されるとき、 G の内部多項式 I_G は以下で表される。

$$I_G(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \cdots + a_{|V|+|E|-2} x^{|V|+|E|-2}.$$

3. 主結果

3.1. 符号付き内部多項式

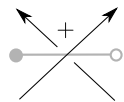
ここでは、 $G = (V, E, \mathcal{E}_+ \cup \mathcal{E}_-)$ を連結符号付き二部グラフとする。

定義 3.1 (符号付き内部多項式).

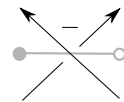
$$I_G^+(x) = \sum_{S \subseteq \mathcal{E}_-} (-1)^{|S|} I'_{G \setminus S}(x),$$

ここで、 $G \setminus S$ は G から、 S に含まれる全ての辺を消去し、残った辺の符号を忘れて得られる二部グラフとする。

任意の平面符号付き二部グラフ G の全ての辺に正負それぞれ以下のような交点を与えることで結び目を構成する。この結び目を L_G と書く。この L_G に対して、HOMFLY 多項式の一部の係数が内部多項式の係数と一致する。



正の交点



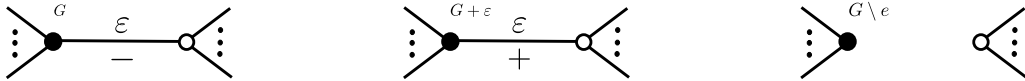
負の交点

定理 3.2 (K.). $T_G(v)$ は L_G の HOMFLY 多項式のうち、 z の指数が $|\mathcal{E}_+| + |\mathcal{E}_-| - (|V| + |E|) + 1$ である項の v についての多項式とする。このとき、

$$T_{L_G}(v) = v^{|\mathcal{E}_+| - |\mathcal{E}_-| - (|V| + |E|) + 1} I_G^+(v^2).$$

Proof. 任意の二部グラフ $G = (V, E, \mathcal{E}_+ \cup \mathcal{E}_-)$ を考える。 $|\mathcal{E}_-|$ に関する数学的帰納法で示す。 $|\mathcal{E}_-| = 0$ のとき、 G は正の符号しかない二部グラフだから、 $I_G^+ = I'_G$ であり、定理 2.13 により、示される。

$|\mathcal{E}_-| < m$ のとき、定理が成り立つことを仮定する。このとき、 e を負の符号を持つ辺とする。ここで、 $G + e$ を G の e の符号を正の符号に変えた二部グラフ、 $G \setminus e$ を G から e を消去した二部グラフとして定義する。

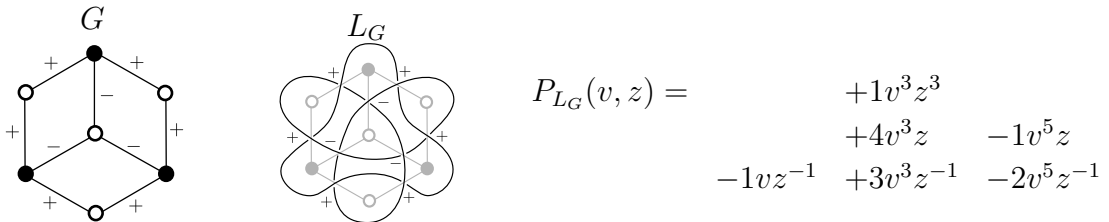


$G + e, G \setminus e$ はそれぞれ負の辺の個数は $m - 1$ なので、帰納法の仮定をもちいることができ、スケイン関係式から、 $|\mathcal{E}_-| = m$ の時でも定理の主張が成り立つことがわかる。

$$\begin{aligned} I_G^+(v^2) &= \sum_{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}_-(G)} (-1)^{|\mathcal{S}|} I'_{G \setminus \mathcal{S}}(v^2) \\ &= \sum_{\substack{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}_-(G) \\ \varepsilon \notin \mathcal{S}}} (-1)^{|\mathcal{S}|} I'_{G \setminus \mathcal{S}}(v^2) + \sum_{\substack{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}_-(G) \\ \varepsilon \in \mathcal{S}}} (-1)^{|\mathcal{S}|} I'_{G \setminus \mathcal{S}}(v^2) \\ &= \sum_{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}_-(G+e)} (-1)^{|\mathcal{S}|} I'_{(G+e) \setminus \mathcal{S}}(v^2) - \sum_{(\mathcal{S} \setminus \varepsilon) \subseteq \mathcal{E}_-(G \setminus e)} (-1)^{|\mathcal{S} \setminus \varepsilon|} I'_{(G \setminus e) \setminus (\mathcal{S} \setminus \varepsilon)}(v^2) \\ &= I'_{G+e}(v^2) - I'_{G \setminus e}(v^2) \\ &= \frac{1}{v^{(|\mathcal{E}_+|+1) - (|\mathcal{E}_-|-1) - (|V|+|E|) + 1}} \text{Top}(P_{L_{G+e}})(v) - \frac{1}{v^{|\mathcal{E}_+| - (|\mathcal{E}_-|-1) - (|V|+|E|) + 1}} \text{Top}(P_{L_{G \setminus e}})(v) \\ &= \frac{1}{v^{|\mathcal{E}_+| - |\mathcal{E}_-| - (|V|+|E|) + 1}} \left(v^{-2} \text{Top}(P_{L_{G+e}})(v) - v^{-1} \text{Top}(P_{L_{G \setminus e}})(v) \right) \\ &= \frac{1}{v^{|\mathcal{E}_+| - |\mathcal{E}_-| - (|V|+|E|) + 1}} \text{Top}(P_{L_G})(v). \end{aligned}$$

以上より、任意の符号付き二部グラフについて、定理が証明された。 □

例 3.3. 符号付き二部グラフ G を以下のように定義する。このとき、符号付き内部多項式は以下のように定義できる。 L_G を G から得られる結び目とする。この結び目は実際、非交代結び目になっている。HOMFLY 多項式 P_{L_G} は以下のように計算され、 $T_{L_G}(v) = 1v^3$ となり、 $I_G^+(x)$ と係数が一致している。



	$(-1)^{ S } I'_{G \setminus S}$	
	$1x^0 + 3x^1 + 3x^2$	$\times 1$
	$- 1x^0 - 2x^1 - 2x^2$	$\times 3$
	$1x^0 + 1x^1 + 1x^2$	$\times 3$
	$- 1x^0 + 0x^1 + 0x^2 + 1x^3$	$\times 1$
$I_G^+(x) =$		$0x^0 + 0x^1 + 0x^2 + 1x^3$

3.2. 交代周

任意の有向結び目は特殊図式を持つことが知られている。特殊図式の Seifert グラフは二部グラフになり、この二部グラフからもとの結び目図式を復元することができる。よって、任意の結び目の $T_D(v)$ を内部多項式から求めることができる。しかし、 $|\mathcal{E}_+| + |\mathcal{E}_-| - (|V| + |E|) + 1$ の部分の多項式は、図式によっては存在しない可能性がある。Morton によって、 z の指数の最大値に関する上限について、以下が示されている。

定理 3.4 (Morton, [8]). 任意の結び目図式 D に対して、

$$\max \deg_z \{P_L(v, z)\} \leq c(D) - s(D) + 1,$$

ここで、 $c(D)$ は D の交点数で、 $s(D)$ は D の Seifert 周の数とする。

もし、結び目図式 D が二部グラフ $G = (V, E, \mathcal{E}_+ \cup \mathcal{E}_-)$ から構成される時、 $c(D) - s(D) + 1 = |\mathcal{E}_+| + |\mathcal{E}_-| - (|V| + |E|) + 1$ なので、HOMFLY 多項式の z の指数は $|\mathcal{E}_+| + |\mathcal{E}_-| - (|V| + |E|) + 1$ 以下である。Morton の不等式の等号成立条件については、Cromwell による結果が知られている。

定理 3.5 (Cromwell, [2]). D が *homogenous* な図式であれば、Morton の不等式は等号になる。

homogenous な図式の集合には、交代結び目図式や特殊交代結び目図式が含まれるため、定理 2.10 での、 $T_{L_G}(v)$ は HOMFLY の z の指数が最大である多項式になっていた。しかし、一般には、 z の指数の最大は、 $|\mathcal{E}_+| + |\mathcal{E}_-| - (|V| + |E|) + 1$ 以下になる。このときは、符号付き内部多項式は I_G^+ は 0 になる。今回、 $I_G^+ = 0$ であるための十分条件が得られたので紹介する。

定理 3.6 (K.). G が交代周を含むということを、 G の辺で符号が正と負交互に現れる閉経路が存在することで定義する。二部グラフ G が交代周を含むとき、 $I_G^+ = 0$ 。

定理 3.6 よりすぐに以下が示される。

系 3.7. 結び目図式 D が交代周を含む二部グラフ G から構成される時、Morton の不等式の等号は成り立たない。

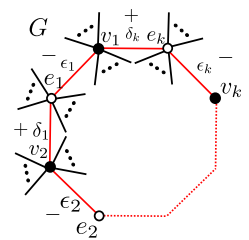


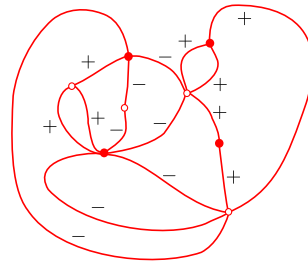
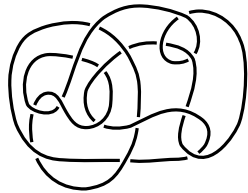
図 4: 交代周

また、特殊図式でない図式に対しても、村杉和 [9] で分解して考えることで、同様の主張が得られる。

系 3.8. ある結び目図式の Seifert グラフが交代周を含むとき、Morton の不等式の等号は成立しない。

また、定理 3.6 について、その逆「Morton の不等式の等号が成立しなければ、交代周は存在するか？」という問題が出てくるが、以下のような判例がある。

例 3.9 (Brittenham and Jensen, [1]). 結び目、 $K : 15_{100154}$ について考える。この結び目図式は特殊図式であり、その Seifert グラフは以下のようなになる。この HOMFLY 多項式は $P_{15_{100154}}(v, z) = (6v^{-2} + v^2)z^6 + (v^{-4}z^4 - 5v^{-2}z^4 + 6v^0 + 4v^2 - v^4)z^4 + (2v^{-4} - 9v^{-2} + 10v^0 + 4v^2 - 3v^4)z^2 + (v^{-4} - 5v^{-2} + 6v^0 + v^2 - 2v^4)z^0$ であり、その z 指数の最大値 $\max \deg_z \{P_K(v, z)\} = 6$ と内部多項式から求められる HOMFLY 多項式の一部の z 指数 $|\mathcal{E}_+| + |\mathcal{E}_-| - (|V| + |E|) + 1 = 15 - 8 + 1 = 8$ は一致しない。また、[1] ではこの結び目の図式で $c(D) - s(D) + 1 = 6$ となる図式が存在しないことが証明されている。



参考文献

- [1] M. Brittenham and J. Jensen, Families of knots for which Morton's inequality is strict, *Comm. Anal. Geom.* 15(2007), no.5, 971-983.
- [2] P. R. Cromwell, 'Homogeneous link', *J. London Math. Soc.* 39(2), 535-552, 1989
- [3] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett and A. Ocneanu, A new polynomial invariant of knots and links, *Bull. Amer. Math. Soc.* 12, 239-246, 1985
- [4] F. Jaeger, Tutte polynomial and link polynomial, *Proc. Amer. Math. Soc.* 95, 647-654, 1988
- [5] T. Kálmán, A version of Tutte's polynomial for hypergraphs, *Adv. Math.* 244, 823-873, 2013
- [6] T. Kálmán and H. Murakami, Root polytope, parking functions, and the HOMFLY polynomial, arXiv:1305.4925(2013)
- [7] T. Kálmán and A. Postnikov, Root polytope, Tutte polynomials, and a duality theorem for bipartite graph, arXiv:1602.04449(2016)
- [8] H. R. Morton, Seifert circles and knot polynomial, *Math. Proc. Comb. Phil. Soc.* 99, 107-109, 1986
- [9] K. Murasugi and J. Przytycki, The skein polynomial of a planar star product of two links, *Math. Proc. Comb. Phil. Soc.* 106, 273-276, 1989
- [10] Morwen B. Thistlethwaite. A spanning tree expansion of the Jones polynomial. *Topology*, 26(3), 297-309, 1987
- [11] Morwen B. Thistlethwaite. On the Kauffman polynomial of an adequate link. *Invent. math.* 93(2), pp 285-296, 1988