Abelian subgroups of the mapping class groups for non-orientable surfaces

久野恵理香　(東京工業大学)*

本稿では, $S = S_{g,n}$ を種数 $g \geq 0$, 境界成分 $n \geq 0$ 個付きの連結コンパクト向き付け可能曲面, $N = N_{g,n}$ を種数 $g \geq 0$, 境界成分 $n \geq 0$ 個付きの連結コンパクト向き付け不可能曲面でそれぞれ負のオイラー標数を持つものとする.

1. 導入

1983年に Birman-Lubotzky-McCarthy [3] が S の写像類群の任意のアーベル部分群は有限生成で，その torsion-free rank は高々 $3g+n-3$ であることを証明した．また，2014年に Atalan-Szepietowski [2] が N の種数が5以上の奇数の場合に，その写像類群のアーベル部分群の torsion-free rank の最大は $\frac{3}{2}(g-1)+n-2$ であることを示した．更に，2015年に Atalan [1] は N の種数が偶数の場合に，その写像類群の各組が交わらない曲線に沿った Dehn twist たちで生成される群を含むアーベル部分群の torsion-free rank の最大は $\frac{3}{2}g+n-3$ であることを示したが，一般のアーベル部分群の torsion-free rank の最大は求められていなかった．

本稿では, Birman-Lubotzky-McCarthy [3] の議論を向き付け不可能曲面に対して適用し，オイラー標数が負の向き付け不可能曲面についてその写像類群の任意のアーベル群の torsion-free rank の最大が求められたので，その結果について報告する.

2. 準備

定義 2.1. N の**写像類群** $\mathcal{M}(N)$ とは N 上の微分同相写像のアイソトピー類全体に写像の合成を演算として群構造を入れたものである．但し，アイソトピーは各境界成分を集合として保つものを考える．N 内の双側な曲線 a に沿った **Dehn twist** t_a とは a に沿って N を切りその片側を 2π 右に回転させ再び a で N を貼り合わせるという操作で得られる微分同相写像のことである.

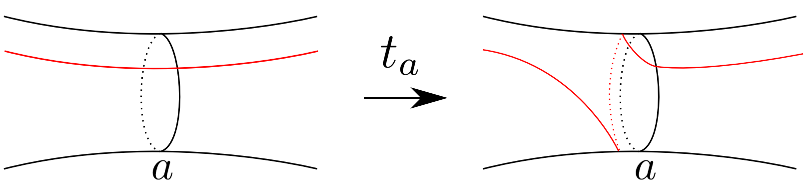

図 1: Dehn twist.

定義 2.2. $\mathcal{M}(N)$ の元 φ が**有限位数**であるとは，ある代表元 $f \in \varphi$ とある整数 $n \neq 0$ が存在して $f^n = id_N$ となることである．$\mathcal{M}(N)$ の元 φ が**可約**であるとは，ある代表元 $f \in \varphi$ とある曲線の族 A が存在して $f(A) = A$ となることである．$\mathcal{M}(N)$ の元 φ

本研究は科研費 (課題番号:16J00397) の助成を受けたものである。
キーワード：向き付け不可能曲面, 写像類群, アーベル部分群
* 〒152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1　東京工業大学大学院理工学研究科 数学専攻
e-mail: kuno.e.aa@m.titech.ac.jp

が **pseudo-Anosov** であるとは, ある代表元 $f \in \varphi$ が存在して N 上の任意の曲線 a と任意の整数 $n \neq 0$ に対して $f^n(a) \neq a$ となることである.

定理 2.3. (Thurston's theorem [5]) 各 $\varphi \in \mathscr{M}(N)$ は 有限位数か，可約か， pseudo-Anosov のいずれかである．更に，φ が可約のとき，曲線のアイソトピー類の集合 $\mathscr{A}$ が存在して，$\varphi(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$ かつ $N - A$ の各連結成分への φ の制限 (各連結成分上の同相写像となるように φ を適当に累乗したものの制限) は有限位数か pseudo-Anosov のいずれかになる，但し A は $\mathscr{A}$ の代表元の集合で互いに交わらないものである．

3. 主結果

定理 3.1. N をオイラー標数が負の連結コンパクト向き付け不可能曲面, G を $\mathscr{M}(N)$ の任意のアーベル部分群とする．このとき G は有限生成で，その torsion-free rank の最大は種数が奇数のとき $\frac{3}{2}(g-1)+n-2$ で，種数が偶数のとき $\frac{3}{2}g+n-3$ である．

定理 3.2. 定理 2.3 における集合 A で最小のものはアイソトピーの差を除いて一意である．

定理 3.2 は Wu [6] が初めて示した．よって定理 3.2 は，Birman-Lubotzky-McCarthy [3] の議論を向き付け不可能曲面に適用することでその別証明を与えたというものである．

4. 向き付け可能曲面の場合との違い

$\mathscr{A}$ を互いに交わらない代表元を持つ N 上の曲線のアイソトピー類からなる集合とする．A を $\mathscr{A}$ の各元の代表元の集合で互いに交わらないものとする．$N_{\mathscr{A}}$ を $N-A$ の自然なコンパクト化とする．$\mathscr{A}^{\mathrm{two}}$ を $\mathscr{A}$ 内の双側な曲線のアイソトピー類全体からなる集合とする．$\mathscr{M}_{\mathscr{A}}(N)$ を $\mathscr{M}(N)$ 内での $\mathscr{A}$ の stabilizer とする．このとき well-defined な準同型 $\Lambda\colon \mathscr{M}_{\mathscr{A}}(N) \to \mathscr{M}(N_{\mathscr{A}})$ を定めることができる．$\alpha \in \mathscr{A}^{\mathrm{two}}$ とする．α の代表元 a に対して t_a を a に沿った Dehn twist とし，τ_α を t_a のアイソトピー類とする．

向き付け可能曲面の場合との違いが大きく 2 つ出てくる．1 つ目は補題 4.1 の証明である．

補題 4.1. $\mathrm{Ker}(\Lambda) = \langle \tau_\alpha \mid \alpha \in \mathscr{A}^{\mathrm{two}} \rangle$.

向き付け可能曲面の場合にも $\mathrm{Ker}(\Lambda)$ は Dehn twist たちで生成されるのだが，向き付け不可能曲面の場合には Dehn twist が定義されていない単側な曲線のことも考えなければならない．しかし，Stukow [4] の部分曲面から全体の曲面への包含写像から誘導されるその写像類群間の準同型の核に関する結果を用いることで向き付け不可能曲面の場合に対しても補題 4.1 を示すことができる．2 つ目は補題 4.2 である．

補題 4.2. F を連結コンパクト曲面でオイラー標数が負のものとする. $\mathscr{S}(F)$ を F 上の曲線のアイソトピー類全体の集合とする．δ を F 上の proper に埋め込まれた弧のアイソトピー類とし，$\varphi \in \mathscr{M}(F)$ を $\varphi(\delta) = \delta$ なるものとする．このとき次のいずれか 1 つが成り立つ．

(1) F は $S_{0,3}$，$N_{1,2}$，$N_{2,1}$ のいずれかである.

(2) δ が異なる 2 つの境界成分を結ぶとき，ある $\gamma \in \mathscr{S}(F)$ が存在して $\varphi(\gamma) = \gamma$ かつ任意の $\alpha \in \mathscr{S}(F)$ で $i(\alpha, \delta) \neq 0$ なるものに対して $i(\alpha, \gamma) \neq 0$ となる.

(3) δ が 1 つの境界成分を結び crosscap を偶数回通りちょうど 1 つの crosscap を囲むとき, 図 2 の β_0 を除くすべての $\alpha \in \mathscr{S}(F)$ で $i(\alpha, \delta) \neq 0$ なるものに対して，ある

$\gamma \in \mathscr{S}(F)$ で $\varphi(\gamma) = \gamma$ かつ $i(\alpha, \gamma) \neq 0$ なるものが存在する.

(4) δ が1つの境界成分を結び crosscap を偶数回通りちょうど1つの crosscap を囲むわけではないとき，任意の $\alpha \in \mathscr{S}(F)$ で $i(\alpha, \delta) \neq 0$ なるものに対してある $\gamma \in \mathscr{S}(F)$ が存在して $\varphi(\gamma) = \gamma$ かつ $i(\alpha, \gamma) \neq 0$ を満たす.

(5) δ が1つの境界成分を結び crosscap を奇数回通るとき, 図 2 の β_1 と β_2 を除くすべての $\alpha \in \mathscr{S}(F)$ で $i(\alpha, \delta) \neq 0$ なるものに対して，ある $\gamma \in \mathscr{S}(F)$ で $\varphi(\gamma) = \gamma$ かつ $i(\alpha, \gamma) \neq 0$ なるものが存在する.

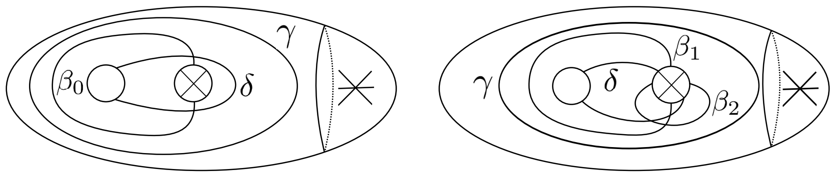

図 2: 曲線 β_0, β_1, β_2.

向き付け可能曲面の場合（[3]）には補題 4.2の場合分けは2通りであったが向き付け不可能曲面の場合は5つになる．向き付け可能曲面と不可能曲面の間で補題 4.2 に違いが現れるが，補題 4.2 を証明に使う命題は向き付け可能曲面と不可能曲面のどちらの場合も同じ結果になる．そのため，定理 3.1をBirman-Lubotzky-McCarthy [3] の議論を追うことで証明できる．

謝辞

研究集会「結び目の数学 IX」での講演の機会を与えてくださった日本大学文理学部の市原一裕先生と茂手木公彦先生には心より感謝申し上げます. また, 日頃から研究に関するさまざまなことで丁寧にご指導をしてくださる東京工業大学の遠藤久顕先生には大変感謝しております。そして, University of Gdańsk の Błażej Szepietowski 先生には向き付け不可能曲面の写像類群の多くの諸性質について教えていただいたことを御礼申し上げます．本研究は，JSPS科研費 (課題番号:16J00397) の助成を受けたものです.

参考文献

[1] F. Atalan, *An algebraic characterization of a Dehn twist for nonorientable surfaces*, available at arXiv:1501.07183v2 [math.GT].

[2] F. Atalan and B. Szepietowski, *Automorphisms of the mapping class group of a nonorientable surface*, available at arXiv:1403.2774v2 [math.GT].

[3] J. S. Birman, A. Lubotzky, and J. McCarthy, *Abelian and solvable subgroups of the mapping class groups*, Duke Math. J. **50** (1983), no. 4, 1107–1120.

[4] M. Stukow, *Commensurability of geometric subgroups of mapping class groups*, Geom. Dedicata **143** (2009), 117–142.

[5] W. Thurston, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **19** (1988), no. 2, 417–431.

[6] Y. Wu, *Canonical reducing curves of surface homeomorphism*, Acta Math. Sinica (N.S.) **3** (1987), no. 4, 305–313.