On the minimal coloring number of even-parallels of links

松土　恵理　(日本大学大学院総合基礎科学研究科)*

本稿では，結び目及び絡み目を平行化して得られる絡み目の $\mathbb{Z}$ 彩色可能性とそれらの最小彩色数についての結果を報告します.

1. 導入

最も有名な結び目不変量の１つに1961年R.Foxが導入したFox n彩色（または n彩色）がある [1]. 本研究で扱う $\mathbb{Z}$彩色はFox n彩色を拡張したものである.

以下, Lを絡み目，DをLの正則射影図式とする.

写像 $C : \{\text{arcs of } D\} \to \mathbb{Z}$が, Dの任意の交点において上側を通る弧をa，下側を通る弧をb, cとした時，$2C(a) = C(b) + C(c)$を常に満たすとする．この時CをDの$\mathbb{Z}$彩色と呼ぶ．また全ての弧に対応する値が等しい$\mathbb{Z}$彩色を自明な$\mathbb{Z}$彩色という．非自明な$\mathbb{Z}$彩色を許容する図式Dが存在する時，絡み目Lを$\mathbb{Z}$彩色可能な絡み目という.

$\mathbb{Z}$彩色Cの$\mathrm{Im}(C)$の集合の位数，即ち$\mathbb{Z}$彩色された図式Dに現れる色数に着目する.

$\mathbb{Z}$彩色可能な絡み目Lに対して許容される自明でない$\mathbb{Z}$彩色Cの$\mathrm{Im}(C)$の位数のうち, 最も小さいものを最小$\mathbb{Z}$彩色数と呼び, $mincol_{\mathbb{Z}}(L)$と表す.

まず非自明かつ非分離なLにおいて，$mincol_{\mathbb{Z}}(L) \geq 4$であることがすぐにわかる．この最小$\mathbb{Z}$彩色数について，筆者は[2]にて次の結果を得ている.（市原一裕氏との共同研究）

定理 1.1 ([2]). Lを非分離な一様$\mathbb{Z}$彩色可能絡み目とする．この時$mincol_{\mathbb{Z}}(L) = 4$である.

一様$\mathbb{Z}$彩色の定義はここでは省略する．詳細は[2]を参照.

定理 1.2 ([2]). Lを非分離な$\mathbb{Z}$彩色可能な絡み目とする．位数が5である$\mathbb{Z}$彩色CをLが許容するならば，$mincol_{\mathbb{Z}}(L) = 4$である.

これは即ち$mincol_{\mathbb{Z}}(L) = 5$となる非分離な$\mathbb{Z}$彩色可能な絡み目は存在しないことを表している.

2. 平行化

素朴な疑問として，任意の$\mathbb{Z}$彩色可能な絡み目に対して$mincol_{\mathbb{Z}}(L) = 4$なのかどうかという問題が考えられる．今回，結び目や絡み目を平行化して得られる絡み目の一部が$\mathbb{Z}$彩色可能であることを示し，それらの最小$\mathbb{Z}$彩色数について研究を行った.

---

* 〒156-8500 東京都世田谷区桜上水 3-25-40　日本大学 大学院総合基礎科学研究科
e-mail: cher16001@g.nihon-u.ac.jp

定義 2.1. $L = K_1 \cup \cdots \cup K_c$ を絡み目とし，その正則射影図式を D とする．c 個の自然数の組 $(n_1, \cdots, n_c)$（ただし $n_i \geq 1$）に対し, L の成分 K_i を平面 n_i 平行化（$1 \leq i \leq c$）して得られる図式を $D^{(n_1,\cdots,n_c)}$ と表す．この $D^{(n_1,\cdots,n_c)}$ で表わされる絡み目を $L^{(n_1,\cdots,n_c)}$ と表し，L の $(n_1, \cdots, n_c)$-parallel と呼ぶ.

特に (2)-parallel に対しては次を定義する.

定義 2.2. 結び目 K の (2)-parallel $K^{(2)} = K_1 \cup K_2$ に対し，$\mathrm{lk}(K_1, K_2) = 0$ である時 $K^{(2)}$ は untwisted (2)-parallel という.

例えば，図 1 は figure-eight knot の untwisted (2)-parallel を表わしている.

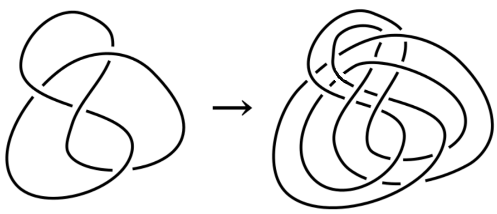

図 1:

まずこの (2)-parallel について次のような結果が得られた.

定理 2.3. *結び目 K の untwisted (2)-parallel $K^{(2)}$ は $\mathbb{Z}$ 彩色可能であり，$mincol_{\mathbb{Z}}(K^{(2)}) \leq 4$ である.*

また更に一般の $L^{(n_1,\cdots,n_c)}$ については，次の結果が得られた.

定理 2.4. *L を成分数 c の絡み目とし，$n_1, \cdots, n_c$ を 4 以上の偶数とする．この時 $L^{(n_1,\cdots,n_c)}$ は $\mathbb{Z}$ 彩色可能であり，$mincol_{\mathbb{Z}}(L^{(n_1,\cdots,n_c)}) \leq 4$.*

3. 定理 2.4 の証明の概略

$L = K_1 \cup \cdots \cup K_c$ を絡み目，D を L の正則射影図式とする.
ここで D を平行化した際に D の各交点の近くに現れる $D^{(n_1,\cdots,n_c)}$ の交点たちに着目する.（図 2 参照）

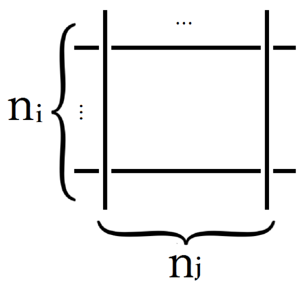

図 2: （n_i，n_j は 4 以上の偶数）

まずこれらのみが全て納まるような領域を考える.（図 3 参照）

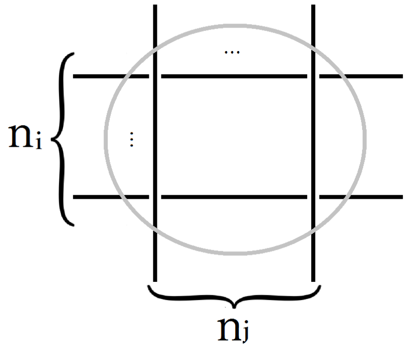

図 3:

この時 $D^{(n_1,\cdots,n_c)}$ 全体で交点はいずれかの領域の内側に存在し，領域同士は平行な 4 以上の偶数本の弧で結ばれている．ここで領域の外側の弧の平行族 $(a_1,\cdots,a_k)$ に対し，$a_{k/2}$ と $a_{k/2+1}$ の色を 1，残りの弧の色を 0 と色をつける．（ 図 4 参照）

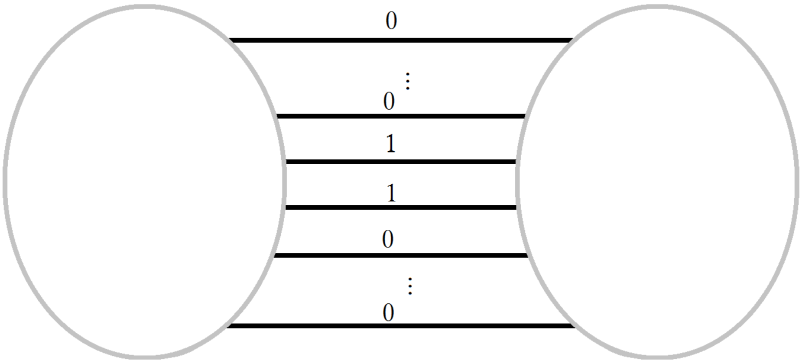

図 4:

領域の内側については，例えば 図 3 において $n_j = 4m + 2\ (m \in \mathbb{N})$ の場合，図 5 のように $-1, 0, 1, 2$ を割り当てる．

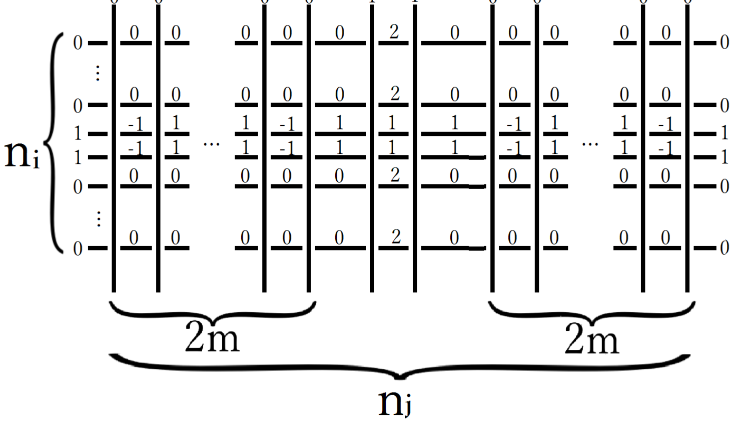

図 5:

$n_j = 4m+4$ $(m \in \mathbb{N})$ の場合も同様に，図 6 のように $-1, 0, 1, 2, 3$ を割り当てる．

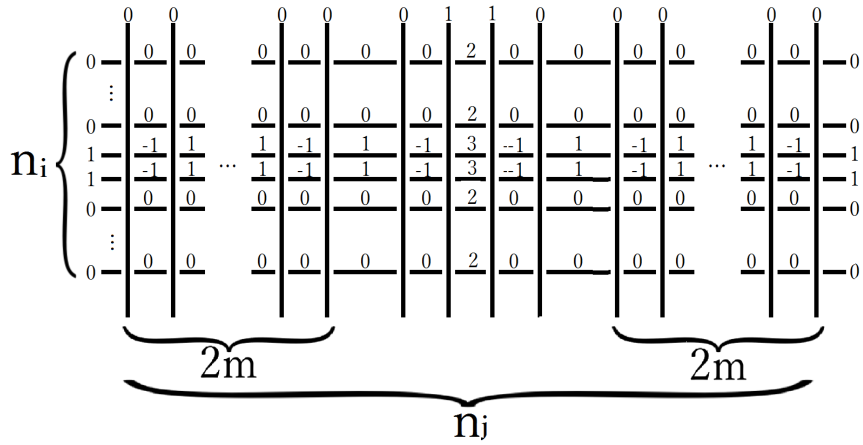

図 6:

この時各領域の境界と交わる弧は領域の外側の弧 $(a_1, \cdots, a_k)$ と同一であり，先ほど指定した色と矛盾していない．また各交点は $\mathbb{Z}$ 彩色の交点条件を満たしている．任意の交点は領域の内側にのみ存在しているので，$D^{(n_1,\cdots,n_c)}$ の全ての交点で $\mathbb{Z}$ 彩色の交点条件を満たすことがわかる．よって $D^{(n_1,\cdots,n_c)}$ は $\mathrm{Im}(C) = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ となる $\mathbb{Z}$ 彩色 C を許容し，$L^{(n_1,\cdots,n_c)}$ は $\mathbb{Z}$ 彩色可能である．

更にこのうち 3 が割り当たっている弧の近傍で図 7 のような変形を行う．

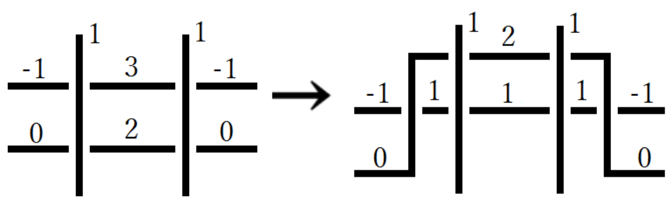

図 7:

すると $\mathbb{Z}$ 彩色の交点条件を保ちながら現れる色は $\{-1, 0, 1, 2\}$ となり，$mincol_{\mathbb{Z}}(L^{(n_1,\cdots,n_c)}) \leq 4$ であることがわかる．

参考文献

[1] R. H. Fox, A quick trip through knot theory, in *Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961)*, 120–167, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[2] K. Ichihara and E. Matsudo, Minimal coloring number for Z-colorable links, to appear in J. Knot Theory Ramifications, preprint version available at arXiv:1605.08127.