

ハンドル体結び目の(同辺)結び目解消数と Alexander バイカンドルの G 族彩色

村尾 智 (筑波大数理物質)*

概 要

任意のハンドル体結び目は、そのスパインである空間3価グラフにおける交差交換と IH-変形により自明なハンドル体結び目に変形できることが知られている。このとき、自明なハンドル体結び目に変形するために必要な交差交換の最小回数をハンドル体結び目の結び目解消数という。また、この結び目解消操作において、交差交換を同じ辺同士に制限しても同様に自明なハンドル体に変形できることが知られており、この制限付きの結び目解消数を特に同辺結び目解消数という。本稿では Alexander バイカンドルの G 族彩色を用いることで、ハンドル体結び目の結び目解消数及び同辺結び目解消数を評価する方法を与える。

1. ハンドル体結び目

ハンドル体結び目とは、3次元球面 S^3 に埋め込まれたハンドル体のことであり、2つのハンドル体結び目が同値であるとは、 S^3 の向きを保つ自己同相写像により一方がもう一方へと移ることである。また、ハンドル体結び目が自明であるとは、その外部がハンドル体となることである。本稿では、種数 g の自明なハンドル体結び目を O_g と表す。空間3価グラフとは、 S^3 に埋め込まれた3価グラフのことであり、空間3価グラフの Y -orientation とは、全ての頂点での入次数、出次数が1以上になるように空間3価グラフの各辺に向きを入れることである(図1)。任意の Y -oriented 空間3価グラフ K 及びハンドル体結び目 H に対して、 H が K の正則近傍となっているとき、 K は H を表すという。任意のハンドル体結び目はある Y -oriented 空間3価グラフで表すことができる。また、ハンドル体結び目 H のダイアグラムを、 H を表す Y -oriented 空間3価グラフ K のダイアグラムで定義する。このとき、以下の定理が成り立つ。

定理 1.1 ([6]). D_i をハンドル体結び目 H_i のダイアグラムとする ($i = 1, 2$)。このとき、 H_1 と H_2 が同値であることと、 D_1 と D_2 が有限回の Y -orientation を保つ $R1$ - $R6$ 変形(図2)で移り合うことは同値である。



図 1: Y -orientations

本稿では、ハンドル体結び目のダイアグラム D に対して、 D の arc 全体の集合、semi-arc 全体の集合をそれぞれ $A(D)$, $SA(D)$ で表す。また、任意の $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ について、 $\mathbb{Z}_m := \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_0 := \mathbb{Z}$ とする。

* e-mail: t-murao@math.tsukuba.ac.jp

web: <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~t-murao/>

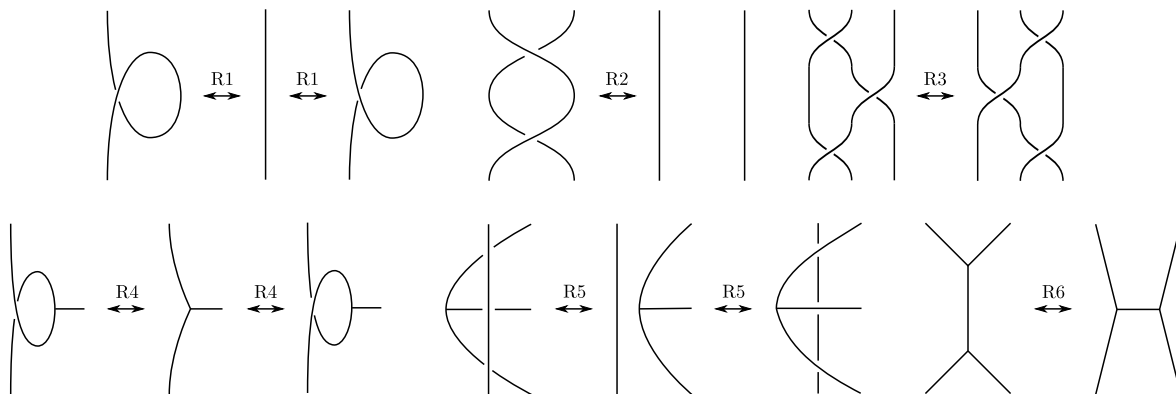


図 2: ハンドル体結び目の Reidemeister 変形

2. ハンドル体結び目の (同辺) ゴルディアン距離と (同辺) 結び目解消数

ハンドル体結び目 H の交差交換とは, H を表す空間3価グラフにおける交差交換のことである. この変形は, 図3のようにハンドル体結び目における2本のハンドルの上下を入れ替えることで実現される. また, ハンドル体結び目 H の同辺交差交換とは, H を表す空間3価グラフにおける同じ辺同士での交差交換のことである.

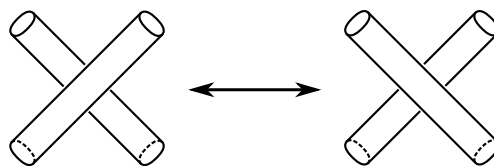


図 3: ハンドル体結び目の交差交換

このとき, 次の補題が成り立つ.

補題 2.1. 任意のハンドル体結び目は有限回の交差交換及び有限回の同辺交差交換により自明なハンドル体結び目へと変形できる.

補題2.1より, 任意の2つの同種数ハンドル体結び目 H_1, H_2 は有限回の交差交換及び有限回の同辺交差交換により互いに移り合う. そこで, H_1 と H_2 のゴルディアン距離 $d(H_1, H_2)$ 及び同辺ゴルディアン距離 $\hat{d}(H_1, H_2)$ をそれぞれ

$$d(H_1, H_2) := \min\{n \mid H_1 \text{ と } H_2 \text{ は } n \text{ 回の交差交換で移り合う}\},$$

$$\hat{d}(H_1, H_2) := \min\{n \mid H_1 \text{ と } H_2 \text{ は } n \text{ 回の同辺交差交換で移り合う}\}$$

で定義する. さらに, 任意の種数 g のハンドル体結び目 H に対して, H の結び目解消数 $u(H)$ 及び同辺結び目解消数 $\hat{u}(H)$ をそれぞれ

$$u(H) := d(H, O_g),$$

$$\hat{u}(H) := \hat{d}(H, O_g)$$

で定義する.

3. (バイ) カンドルと (バイ) カンドルの G 族

本章ではまず初めに、カンドルとバイカンドルの定義を復習する。

定義 3.1 ([9, 10]). 空でない集合 X が次を満たす二項演算 $*$: $X \times X \rightarrow X$ を持つとき、 X をカンドルという。

- 任意の $x \in X$ に対して, $x * x = x$.
- 任意の $x \in X$ に対して, 写像 $S_x: X \rightarrow X; y \mapsto y * x$ は全単射である.
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.

定義 3.2 ([1]). 空でない集合 X が次を満たす2つの二項演算 $\bar{*}, \underline{*}$: $X \times X \rightarrow X$ を持つとき, X をバイカンドルという。

- 任意の $x \in X$ に対して, $x \underline{*} x = x \bar{*} x$.
- 任意の $x \in X$ に対して, 写像 $\underline{S}_x: X \rightarrow X; y \mapsto y \underline{*} x$ は全単射.
任意の $x \in X$ に対して, 写像 $\bar{S}_x: X \rightarrow X; y \mapsto y \bar{*} x$ は全単射.
写像 $S: X \times X \rightarrow X \times X; (x, y) \mapsto (y \bar{*} x, x \underline{*} y)$ は全単射.
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して,

$$\begin{aligned} (x \underline{*} y) \underline{*} (z \underline{*} y) &= (x \underline{*} z) \underline{*} (y \bar{*} z), \\ (x \underline{*} y) \bar{*} (z \underline{*} y) &= (x \bar{*} z) \underline{*} (y \bar{*} z), \\ (x \bar{*} y) \bar{*} (z \bar{*} y) &= (x \bar{*} z) \bar{*} (y \underline{*} z). \end{aligned}$$

ここで, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $\underline{*}^n x := \underline{S}_x^n$, $\bar{*}^n x := \bar{S}_x^n$ とする. $(X, *)$ がカンドルであることと, $(X, *, \bar{*})$ が $x \bar{*} y = x$ によりバイカンドルとなることは同値である.

例 3.3. 任意の $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $\mathbb{Z}_m[t^{\pm 1}, s^{\pm 1}]$ は $a \underline{*} b = ta + (s - t)b$, $a \bar{*} b = sa$, によりバイカンドルである. これを *Alexander* バイカンドルという.

定義 3.4. X をバイカンドルとする. このとき, 2つの二項演算の族 $\underline{*}^{[n]}, \bar{*}^{[n]}: X \times X \rightarrow X (n \in \mathbb{Z})$ を以下で定義する. ここで, i, j は任意の整数である.

$$\begin{aligned} a \underline{*}^{[0]} b &= a, & a \underline{*}^{[1]} b &= a \underline{*} b, & a \underline{*}^{[i+j]} b &= (a \underline{*}^{[i]} b) \underline{*}^{[j]} (b \underline{*}^{[i]} b), \\ a \bar{*}^{[0]} b &= a, & a \bar{*}^{[1]} b &= a \bar{*} b, & a \bar{*}^{[i+j]} b &= (a \bar{*}^{[i]} b) \bar{*}^{[j]} (b \bar{*}^{[i]} b). \end{aligned}$$

$a = a \underline{*}^{[0]} b = (a \underline{*}^{[-1]} b) \underline{*}^{[1]} (b \underline{*}^{[-1]} b) = (a \underline{*}^{[-1]} b) \underline{*} (b \underline{*}^{[-1]} b)$ であるから, $a \underline{*}^{[-1]} b = a \underline{*}^{-1} (b \underline{*}^{[-1]} b)$, $(b \underline{*}^{[-1]} b) \underline{*} (b \underline{*}^{[-1]} b) = b$ が成り立つ. また, 任意の *Alexander* バイカンドル X 及び $a, b \in X$ に対して, $a \underline{*}^{[n]} b = t^n a + (s^n - t^n)b$, $a \bar{*}^{[n]} b = s^n a$ が成り立つ.

ここで, バイカンドル X の型 (*type*) を

$$\text{type } X := \min\{n > 0 \mid a \underline{*}^{[n]} b = a = a \bar{*}^{[n]} b (\forall a, b \in X)\}.$$

で定める. 任意の有限カンドルは有限の型を持つことが知られている [7].

次に, カンドルの G 族とバイカンドルの G 族の定義を紹介する.

定義 3.5 ([3]). G を単位元 e を持つ群とする. 空でない集合 X が次を満たす二項演算の族 $*^g : X \times X \rightarrow X (g \in G)$ を持つとき, X をカンドルの G 族という.

- 任意の $x \in X$ 及び $g \in G$ に対して, $x *^g x = x$.
- 任意の $x, y \in X$ 及び $g, h \in G$ に対して, $x *^{gh} y = (x *^g y) *^h y$, $x *^e y = x$.
- 任意の $x, y, z \in X$ 及び $g, h \in G$ に対して, $(x *^g y) *^h z = (x *^h z) *^{h^{-1}gh} (y *^h z)$.

定義 3.6 ([4, 7]). G を単位元 e を持つ群とする. 空でない集合 X が次を満たす2つの二項演算の族 $*^g, \bar{*}^g : X \times X \rightarrow X (g \in G)$ を持つとき, X をバイカンドルの G 族という.

- 任意の $x \in X$ 及び $g \in G$ に対して,

$$x *^g x = x \bar{*}^g x.$$

- 任意の $x, y \in X$ 及び $g, h \in G$ に対して,

$$\begin{aligned} x *^{gh} y &= (x *^g y) *^h (y *^g y), & x *^e y &= x, \\ x \bar{*}^{gh} y &= (x \bar{*}^g y) \bar{*}^h (y \bar{*}^g y), & x \bar{*}^e y &= x. \end{aligned}$$

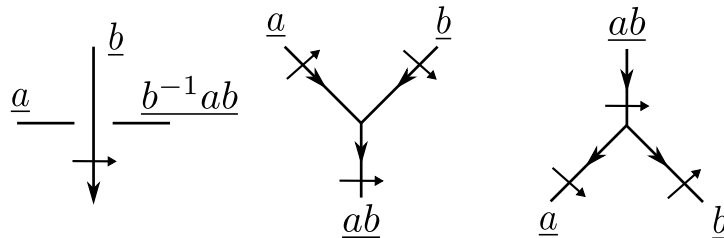
- 任意の $x, y, z \in X$ 及び $g, h \in G$ に対して,

$$\begin{aligned} (x *^g y) *^h (z \bar{*}^g y) &= (x *^h z) *^{h^{-1}gh} (y *^h z), \\ (x \bar{*}^g y) *^h (z \bar{*}^g y) &= (x *^h z) \bar{*}^{h^{-1}gh} (y *^h z), \\ (x \bar{*}^g y) \bar{*}^h (z \bar{*}^g y) &= (x \bar{*}^h z) \bar{*}^{h^{-1}gh} (y *^h z). \end{aligned}$$

例 3.7 ([7]). バйкаンドル $(X, *, \bar{*})$ が $\text{type } X < \infty$ を満たすとする. このとき, $(X, \{ *^{[n]} \}_{n \in \mathbb{Z}_{\text{type } X}}, \{ \bar{*}^{[n]} \}_{n \in \mathbb{Z}_{\text{type } X}})$ はバイカンドルの $\mathbb{Z}_{\text{type } X}$ 族である. 特に, X が Alexander バйкаンドルのとき, $(X, \{ *^{[n]} \}_{n \in \mathbb{Z}_{\text{type } X}}, \{ \bar{*}^{[n]} \}_{n \in \mathbb{Z}_{\text{type } X}})$ を Alexander バйкаンドルの $\mathbb{Z}_{\text{type } X}$ 族という.

4. バйкаンドルの G 族彩色

本章では, ハンドル体結び目のダイアグラムに対して, バйкаンドルの G 族による彩色を定義する. D をハンドル体結び目 H のダイアグラムとする. このとき, D の G -flow とは, D の各交点及び頂点で以下の条件を満たす写像 $\phi : A(D) \rightarrow G$ のことである.



本稿では, 混同を避けるため, G の元をしばしば下線付きの文字で表す. G -flow ϕ の与えられたダイアグラム D を (D, ϕ) で表し, H の G -flowed ダイアグラムという. また, $\text{Flow}(D; G) := \{ \phi \mid \phi : D \text{ の } G\text{-flow} \}$ と定める.

D をハンドル体結び目 H のダイアグラムとし, D' を D から 1 回の R1–R6 変形により得られるダイアグラムとする. このとき, 任意の $\phi \in \text{Flow}(D; G)$ に対して, 変形を施した場所以外では ϕ と一致するような $\phi' \in \text{Flow}(D'; G)$ が唯一つ存在する. したがって, $\#\text{Flow}(D; G)$ はハンドル体結び目 H の不変量となる. また, この ϕ' を ϕ の付随 G -flow といい, (D', ϕ') を (D, ϕ) の付随 G -flowed ダイアグラムという.

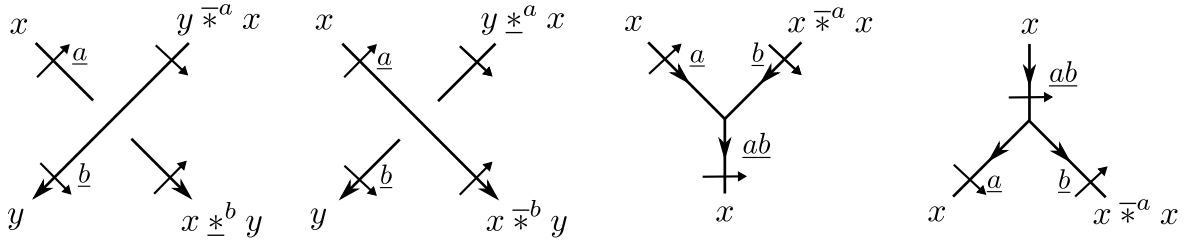
任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 及びハンドル体結び目 H のダイアグラム D の \mathbb{Z}_k -flow ϕ に対して,

$$\text{gcd } \phi := \text{gcd}\{\phi(a), k \mid a \in \mathcal{A}(D)\}$$

と定める. このとき, 以下の補題を得る.

補題 4.1. 任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, (D, ϕ) をハンドル体結び目 H の \mathbb{Z}_k -flowed ダイアグラムとし, (D', ϕ') を (D, ϕ) の付随 \mathbb{Z}_k -flowed ダイアグラムとする. このとき, $\text{gcd } \phi = \text{gcd } \phi'$ が成り立つ.

X をバイカンドルの G 族とし, (D, ϕ) をハンドル体結び目 H の G -flowed ダイアグラムとする. このとき, (D, ϕ) の X -coloring とは, (D, ϕ) の各交点及び頂点で以下の条件を満たす写像 $C : \mathcal{SA}(D, \phi) \rightarrow X$ のことである.



ここで, $\text{Col}_X(D, \phi) := \{C \mid C : (D, \phi) \text{ の } X\text{-coloring}\}$ と定める. また, X が体のとき, $\text{Col}_X(D, \phi)$ は X 上のベクトル空間となることが知られている.

命題 4.2 ([7]). X をバイカンドルの G 族とし, (D, ϕ) をハンドル体結び目 H の G -flowed ダイアグラム, (D', ϕ') を (D, ϕ) の付随 G -flowed ダイアグラムとする. このとき, 任意の $C \in \text{Col}_X(D, \phi)$ に対して, 変形を施した場所以外では C と一致するような $C' \in \text{Col}_X(D', \phi')$ が唯一つ存在する.

この X -coloring C' を C の付随 X -coloring という. この命題により, $\#\text{Col}_X(D, \phi) = \#\text{Col}_X(D', \phi')$ を得る.

補題 4.3. (D, ϕ) をハンドル体結び目 H の G -flowed ダイアグラムとする. このとき, 任意のバイカンドルの G 族 X に対して, $\#\text{Col}_X(D, \phi) \geq \#X$ が成り立つ. 特に, 自明なハンドル体結び目の G -flowed ダイアグラム (O, ϕ) に対して, $\#\text{Col}_X(O, \phi) = \#X$ が成り立つ.

例 4.4. 種数 g の自明ハンドル体結び目 O_g の図 4 で表されるダイアグラムを同じく O_g で表す. このとき, 任意のバイカンドルの G 族 X 及び O_g の任意の G -flowed ダイアグラム (O_g, ϕ) に対して, $\#\text{Col}_X(O_g, \phi) = \#X$ を示す. まず, O_g の任意の G -flow ϕ は $a_i \in G$ ($\forall i = 1, \dots, g$) と G の単位元 e を用いて図 4 のように表せる. 次に, (O_g, ϕ) の X -coloring を考える. 最も左側の loop に $x \in X$ を対応させたすると, 残りの semi-arc に対応する X の元は図 4 のように一意に定まる. したがって, $\#\text{Col}_X(O_g, \phi) = \#X$ である.

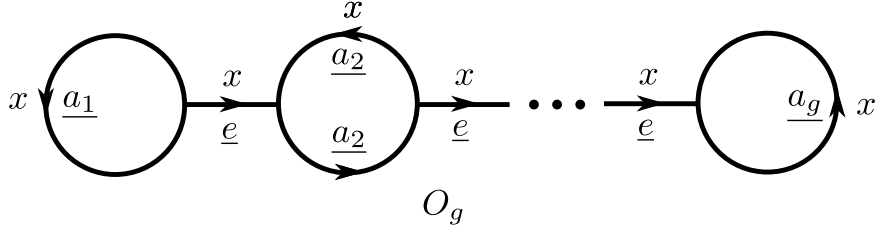


図 4: 自明ハンドル体結び目 O_g

5. 主結果

岩切 [8] は, 任意のハンドル体結び目に対して, その \mathbb{Z}_m -flowed ダイアグラム ($m = 2, 3$) の Alexander カンドル $\mathbb{Z}_p[t^{\pm 1}]/(h(t))$ (p : 奇素数, $h(t) (\neq t, t-1)$: 既約多項式) による coloring を用いて, 結び目解消数の評価式を得た. 以下の定理は, この結果の一般化である.

定理 5.1. D_i を種数 g のハンドル体結び目 H_i のダイアグラムとし ($i = 1, 2$), $X = \mathbb{Z}_p[t^{\pm 1}, s^{\pm 1}]/(f(t))$ を Alexander バイカンドルの \mathbb{Z}_k 族とする. ここで, p は素数, $s \in \mathbb{Z}_p[t^{\pm 1}]$, $f(t) \in \mathbb{Z}_p[t^{\pm 1}]$ は既約多項式である. このとき, 以下が成り立つ.

$$\max_{\phi_1 \in \text{Flow}(D_1; \mathbb{Z}_k)} \min_{\substack{\phi_2 \in \text{Flow}(D_2; \mathbb{Z}_k) \\ \gcd \phi_1 = \gcd \phi_2}} |\dim \text{Col}_X(D_1, \phi_1) - \dim \text{Col}_X(D_2, \phi_2)| \leq d(H_1, H_2) \quad (s = 1, t),$$

$$\max_{\phi_1 \in \text{Flow}(D_1; \mathbb{Z}_k)} \min_{\substack{\phi_2 \in \text{Flow}(D_2; \mathbb{Z}_k) \\ \gcd \phi_1 = \gcd \phi_2}} |\dim \text{Col}_X(D_1, \phi_1) - \dim \text{Col}_X(D_2, \phi_2)| \leq \widehat{d}(H_1, H_2).$$

また, 定理 5.1 より直ちに以下の系が得られる.

系 5.2. D をハンドル体結び目 H のダイアグラムとし, $X = \mathbb{Z}_p[t^{\pm 1}, s^{\pm 1}]/(f(t))$ を Alexander バイカンドルの \mathbb{Z}_k 族とする. ここで, p は素数, $s \in \mathbb{Z}_p[t^{\pm 1}]$, $f(t) \in \mathbb{Z}_p[t^{\pm 1}]$ は既約多項式である. このとき, 以下が成り立つ.

$$\max_{\phi \in \text{Flow}(D; \mathbb{Z}_k)} |\dim \text{Col}_X(D, \phi) - 1| \leq u(H) \quad (s = 1, t),$$

$$\max_{\phi \in \text{Flow}(D; \mathbb{Z}_k)} |\dim \text{Col}_X(D, \phi) - 1| \leq \widehat{u}(H).$$

6. Examples

例 6.1. H を図 5 で表されるハンドル体結び目とし, H の \mathbb{Z}_{10} -flowed ダイアグラム (D, ϕ) を図 5 のように与える. さらに, $s := 1$, 既約多項式 $f(t) := 1 + 2t + t^2 + 2t^3 + t^4 \in \mathbb{Z}_3[t^{\pm 1}]$ とし, $X := \mathbb{Z}_3[t^{\pm 1}, s^{\pm 1}]/(f(t))$ とすると, X は Alexander バイカンドルの \mathbb{Z}_{10} 族である. このとき, $\dim \text{Col}_X(D, \phi) = 3$ である. したがって, 系 5.2 より, $2 \leq u(H)$ を得る. 一方, H は図 5 の点線で記されている 2 つの部分での交差交換により, 自明なハンドル体結び目へと変形できる. したがって, $u(H) \leq 2$ である. 以上より, $u(H) = 2$ を得る.

例 6.2. H_1, H_2 をそれぞれ図 6 で表されるハンドル体結び目とし, H_1 の \mathbb{Z}_3 -flowed ダイアグラム (D_1, ϕ_1) を図 6 のように与える. さらに, $s := 1$, 既約多項式 $f(t) := 1 + t + t^2 \in \mathbb{Z}_2[t^{\pm 1}]$ とし, $X := \mathbb{Z}_2[t^{\pm 1}, s^{\pm 1}]/(f(t))$ とすると, X は Alexander バイカンド

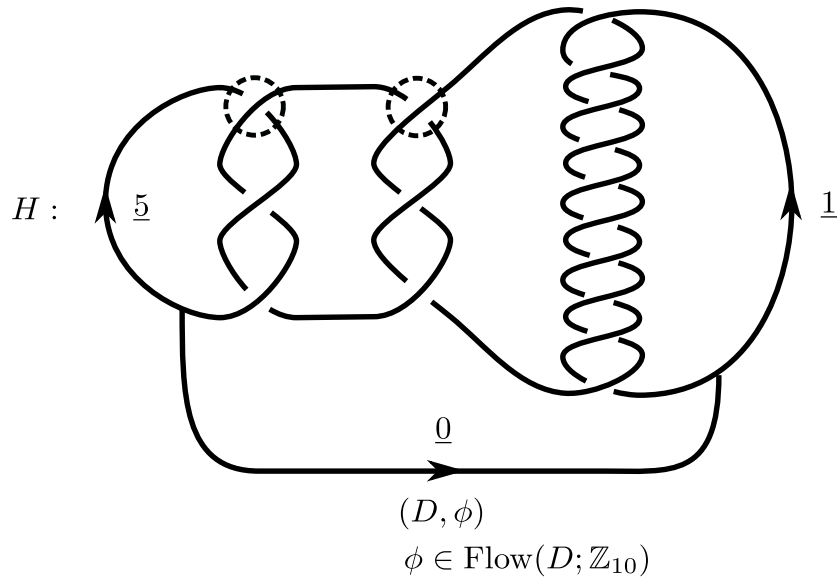


図 5: 結び目解消数

ルの \mathbb{Z}_3 族である. このとき, $\dim \text{Col}_X(D_1, \phi_1) = 5$ である. 一方, H_2 の任意の \mathbb{Z}_3 -flowed ダイアグラム (D_2, ϕ_2) は, $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$ を用いて図 6 のように表せる. このとき, $\dim \text{Col}_X(D_2, \phi_2) \leq 3$ である. したがって, $\dim \text{Col}_X(D_1, \phi_1) - \dim \text{Col}_X(D_2, \phi_2) \geq 2$ であり, 定理 5.1 より, $2 \leq d(H_1, H_2)$ を得る. 一方, H_1 と H_2 は図 6 の点線で記されている 2 つの部分での交差交換により, 互いに移り合う. したがって, $d(H_1, H_2) \leq 2$ である. 以上より, $d(H_1, H_2) = 2$ を得る.

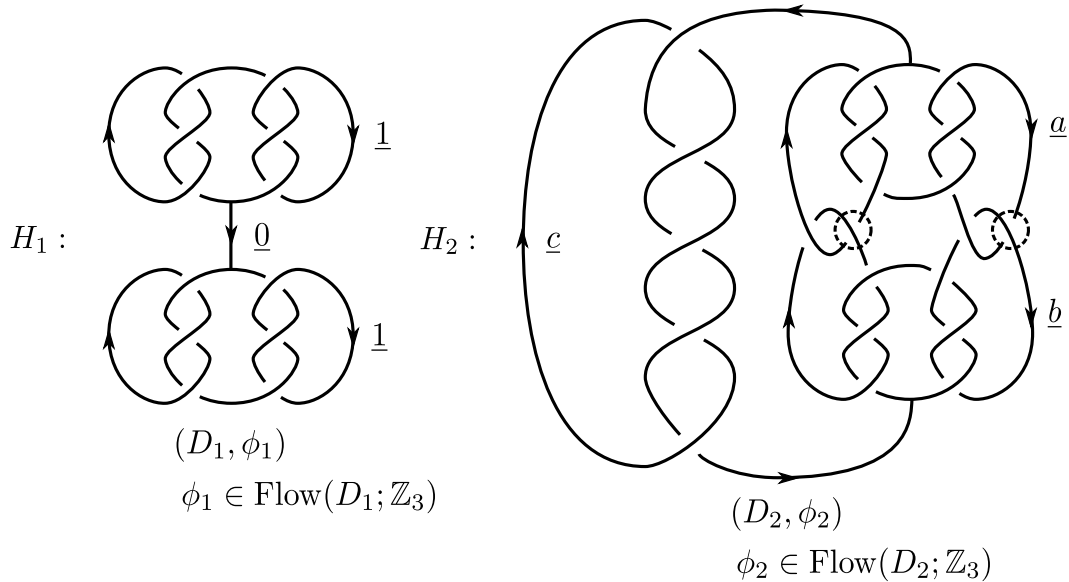


図 6: ゴルディアン距離

参考文献

- [1] R. Fenn, C. Rourke and B. Sanderson, *Trunks and classifying spaces*, Appl. Categ. Structure **3**(1995), 321–356.
- [2] N. Habegger and X.-S. Lin. *The classification of links up to link-homotopy*, J. Amer. Math. Soc. **3**(1990), 389–419.
- [3] A. Ishii, M. Iwakiri, Y. Jang, K. Oshiro, *A G -family of quandles and handlebody-knots*, Ill. J. Math. **57**(2013), 817–838.
- [4] A. Ishii, M. Iwakiri, S. Kamada, J. Kim, S. Matsuzaki and K. Oshiro, *A multiple conjugation biquandle and handlebody-links*, preprint.
- [5] A. Ishii, *A multiple conjugation quandle and handlebody-knots*, Topology Appl. **196**(2015), 492–500.
- [6] A. Ishii, *The Markov theorems for spatial graphs and handlebody-knots with Y -orientations*, Internat. J. Math. **26**(2015), 1550116, 23 pp.
- [7] A. Ishii and S. Nelson, *Partially multiplicative biquandles and handlebody-knots*, to appear in Contemporary Mathematics.
- [8] M. Iwakiri, *Unknotting numbers for handlebody-knots and Alexander quandle colorings*, J. Knot Theory Ramifications **24** (2015), 1550059, 13 pp.
- [9] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Alg. **23**(1982), 37–65.
- [10] S. V. Matvee, *Distributive groupoids in knot theory*, Mt. Sb. (N.S.) **119(161)**(1982), 78–88.