

# Homology 4-balls with complexity zero and collapsing of shadows

直江 央寛 (東北大学)\*

## 1. 序文

1990年代初め, Turaev は量子不変量の研究に用いる目的で **shadow** を導入した [12]. 4次元多様体  $M$  が proper かつ局所平坦に埋め込まれた2次元多面体  $X$  に縮約するとき, この  $X$  を  $M$  の shadow と呼ぶ. 4次元多様体  $M$  における  $X$  の各面の近傍の様子はグリームと呼ばれる半整数たちで特徴付けられる. 逆に, グリームが  $X$  に与えられたとき,  $X$  とグリームによって  $M$  を一意的に再構成することができる. この構成を Turaev's reconstruction という. この対応により, 多様体の様々な幾何構造が shadow から読み取れる. たとえば4次元多様体の  $\text{Spin}^c$  構造や(概)複素構造, Stein 構造に関する研究が Costantino によって知られている [3, 4]. また, Costantino-Thurston [5] によって境界の3次元多様体から  $\mathbb{R}^2$  への安定写像の Stein 分解と shadow との間にある類似が見出され, その帰結として **shadow complexity** と双曲構造の関係が考察された (c.f. Ishikawa-Koda [8]). ここで,  $M$  の shadow complexity  $sc(M)$  は,  $M$  の shadow の頂点の数の最小値として定義される. Costantino は [2] において shadow complexity を導入し, special という多面体の条件の下で shadow complexity が0および1であるような閉4次元多様体について研究を行った. その後, Martelli は shadow complexity が0であるような閉4次元多様体の分類を与えている [9].

本稿では“境界付き”4次元多様体に焦点を当てる. 特に, shadow complexity が0, 整係数ホモロジー群が非輪状であるような4次元多様体に関する考察を行う.

なお, 本稿では証明を省略しているものが幾つかあるが, 詳しくは [10] を参照してほしい.

## 2. 準備

本稿では断りのない限り, 多様体はコンパクトかつ連結, 滑らか, そして向き付けられているものとする. また, 多様体  $X, Y$  が微分同相であることを  $X \cong Y$  と表す.

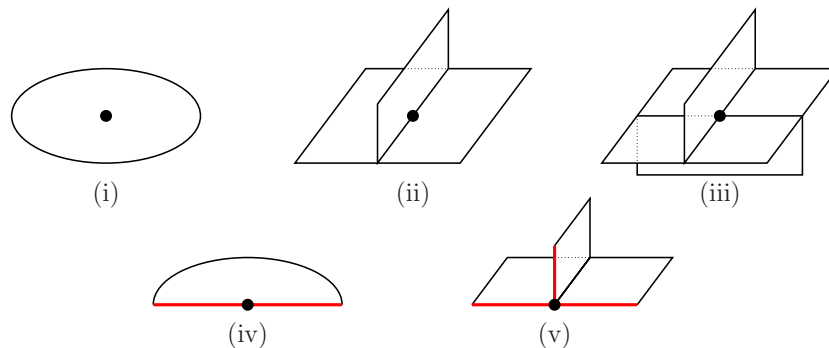


図 1: Simple polyhedron の局所構造.

\* 〒 980-8578 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-3 東北大学大学院理学研究科数学専攻  
e-mail: hironobu.naoe.p5@dc.tohoku.ac.jp

## 2.1. Simple polyhedra

位相空間  $X$  の各点が図1 (i)–(v) のいずれかと同相な近傍を持つとき、 $X$  を **simple polyhedron** という。図1 のそれぞれは  $\mathbb{R}^3$  内の部分集合として考えている。Simple polyhedron  $X$  の中で、(ii), (iii), (v) のタイプの点全体の集合を **特異集合 (singular set)** と呼び、 $Sing(X)$  で表す。とくに、(iii) のタイプの点は simple polyhedron の **真頂点 (true vertex)** という。(iv) と (v) のタイプの点からなる集合を  $X$  の **境界 (boundary)** と呼び、 $\partial X$  で表す。Simple polyhedron  $X$  から  $Sing(X)$  を除いた集合  $X \setminus Sing(X)$  の各連結成分を **領域 (region)** と呼び、それらのうち  $\partial X$  の点を含むものを **境界領域 (boundary region)**、そうでないものを **内部領域 (internal region)** と呼ぶ。

$R$  を simple polyhedron  $X$  の内部領域とする。定義から  $R$  はあるコンパクトな曲面  $F$  の内部と同相である。この対応による自然な埋め込み  $i: \text{Int}F \hookrightarrow X$  は局所同相  $\hat{i}: F \rightarrow X$  に拡張する。まず、 $F$  の境界が空でないときを考える。 $\partial F$  の連結成分に  $S_1, \dots, S_n$  と番号を振っておく。このとき、各  $j \in \{1, \dots, n\}$  について次を満たすような曲面  $B_j$  が存在する。

- $B_j$  はアニュラスまたは Möbius の帯のいずれかと同相、
- $B_j$  を、その中心線が  $S_j$  に沿うように  $F$  へ貼り付けた  $F \cup B_j$  について、 $\hat{i}$  の拡張として局所同相  $\tilde{i}: F \cup B_j \rightarrow X$  が存在する。

各  $B_j$  がアニュラスであるか Möbius の帯であるかは  $X$  の位相型からひとつに決まる。そこで、 $B_1, \dots, B_n$  のうち Möbius の帯であるものが偶数個であるときは  $gl_2(R) = 0$  とし、そうでないときは  $gl_2(R) = 1$  と値を定義する。また、 $F$  の境界が空であるときは  $gl_2(R) = 0$  としておく。

### 定義 2.1.

- (1)  $X$  を simple polyhedron とし、 $\mathcal{R}$  を  $X$  の内部領域からなる集合とする。関数  $gl: \mathcal{R} \rightarrow \frac{1}{2}\mathbb{Z}$  は  $gl(R) - \frac{1}{2}gl_2(R) \in \mathbb{Z}$  を満たすとする。このとき、この  $gl$  を  $X$  の **グリーム (gleam)** という。
- (2) グリームが備わった simple polyhedron を **shadowed polyhedron** と呼ぶ。

**注意 2.2.** しばしば半整数の値  $gl(R)$  そのものを  $R$  のグリームと呼ぶこともある。また、グリームは  $X$  に対して選び方が多数存在するが、 $gl_2(R)$  は  $X$  の位相構造から各領域  $R$  に対してひとつに定まる量である。この  $gl_2(R)$  は  $\mathbb{Z}_2$ -グリームと呼ばれる。

## 2.2. PL トポロジー

ここでは PL トポロジーに関するいくつかの概念と定理を紹介する。

まず、単体的複体の対  $(K, L)$  に対し、 $K$  における  $L$  の星状近傍 (star neighborhood) を  $\text{Nbd}(L; K)$  という記号で表すことにする。 $(X, A)$  は位相空間の対で、 $A$  はコンパクトであるとする。集合  $A$  を含むコンパクト集合  $U$  に対し、 $(X, A)$  の単体分割  $(K, L)$  が存在し、 $U = |\text{Nbd}(L; K)|$  であるとき、 $U$  は  $X$  における  $A$  の **正則近傍 (regular neighborhood)** という。ただし、 $K''$  は  $K$  の 2 回重心細分である。正則近傍の取り方は PL 同相による違いを除いて一意であるため、 $X$  における  $A$  の正則近傍を  $\text{Nbd}(A; X)$  と表すことにする。 $X$  が  $n$  次元 PL 多様体で、その中で  $A$  が多面体であるとき、 $\text{Nbd}(A; X)$  は  $X$  の  $n$  次元 PL 部分多様体になることが知られている。

さて、単体的複体に対して縮約 (collapse) という操作が定義されるが、一般に位相空間についても次のように定義を行う。位相空間の対  $(X, A)$  に対して、単体分割  $(K, L)$  が存在し、 $K$  が  $L$  に縮約するとする。このとき、 $X$  は  $A$  に縮約するといひ、これを  $X \searrow A$  と表す。

最後に、次のよく知られた定理を紹介する。証明は [11]などを参照されると良い。

**定理 2.3.**  $M$  を  $n$  次元 PL 多様体、 $A_0 \subset A$  を  $M$  内の多面体とする。  $A \searrow A_0$  であるとき、 $\text{Nbd}(A; M)$  と  $\text{Nbd}(A_0; M)$  は PL 同相である。

### 2.3. Shadow

ここでは shadow の定義を行い、簡単な諸概念を紹介する。

**定義 2.4.**  $M$  を滑らかな境界付き 4 次元多様体とし、 $X \subset M$  を simple polyhedron とする。次の3つの条件を満たすとき、 $X$  は  $M$  の **shadow** という。

- $X$  は  $M$  に proper に埋め込まれている (i.e.  $X \cap \partial M = \partial X$ ),
- $X$  は  $M$  で局所平坦 (i.e. 任意の  $p \in X$  に対して、 $p$  のまわりで  $M$  の局所座標  $(U, \phi)$  が存在し、 $\phi(U \cap X)$  が  $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$  で図1のいずれかとして実現される),
- $M \searrow X$ .

**注意 2.5.** 2-ハンドルまでで構成される全ての 4 次元多様体は shadow を持つ。3-ハンドルや4-ハンドルを要する 4 次元多様体の shadow は、これらのハンドルを全て取り除いて得られる 4 次元多様体の shadow として定義される。

コンパクトな曲面は、その上の  $D^2$ -束の shadow になってる。したがって、異なる 4 次元多様体でも同じ shadow を持つ場合があり、simple polyhedron のみから 4 次元多様体をひとつ指定するということとはできない。これに対し、次の定理は simple polyhedron にグリームを備えることで境界付き 4 次元多様体をひとつ指定することができるということを主張している。

**定理 2.6** (Turaev, [12]).

- (1) Shadowed polyhedron  $(X, \text{gl})$  に対して、 $X$  を shadow として持つような境界付き 4 次元多様体  $M_X$  を構成する方法が標準的に存在する。この 4 次元多様体は微分同相による違いを除いて一意的である。
- (2) 境界付き 4 次元多様体  $M$  と、その shadow  $X$  の組  $(M, X)$  に対して、(1) の構成方法によって  $M$  が得られるような  $X$  のグリームが存在する。

**注意 2.7.**

- (1) 定理2.6 (1) の構成は 4 次元多様体のハンドル分解を類似として行われ、**Turaev's reconstruction** と呼ばれている。Turaev's reconstruction によって shadowed polyhedron  $(X, \text{gl})$  から対応する 4 次元多様体を  $M_X$  と書く。
- (2) 定理2.6 (2) におけるグリームは、4 次元多様体に埋め込まれた閉曲面の Euler 数の考えを拡張し対応される。実際、次のように解釈できる。まず、 $X$  を境界付き 4 次元多様体  $M$  の shadow とし、 $R$  を  $X$  の内部領域とする。点  $p \in \partial R$  を取ったとき、shadow の局所平坦性から  $p$  のまわりで  $\text{Nbd}(p; X) \subset B^3 \subset M$  となる 3 次元球体  $B^3$  が存在する。補助的に  $B^3$  上の Riemann 計量を与えたのち、 $p$  を通り  $R$  に直交するような区間  $I$  を取る。図2にその様子が描かれて

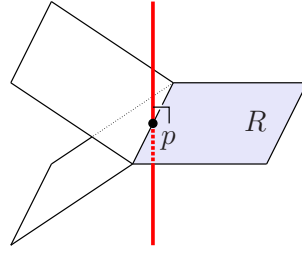


図 2: 点  $p \in \partial R$  における  $I$ -束のファイバー.

いる. このように  $\partial R$  の各点で区間を連続的に選ぶことで  $\partial R$  上の  $I$ -束を得る. この  $I$ -束は,  $M$  における  $\partial R$  上の法束の部分束になっていることに注意する. ここで,  $R$  を  $M$  内で少し摂動させた  $R'$  を考える. ただし,  $\partial R'$  は上で作った  $I$ -束に含まれているとする. さらに  $R'$  を一般の位置を選んでおけば,  $R$  と  $R'$  の交点は孤立しているようにできる. 各交点を符号を含めて数えることで,

$$\text{gl}(R) = \frac{1}{2} \#(\partial R \cap \partial R') + \#(R \cap R') \quad (1)$$

を得る. この等式については [1, 12, 4] などを参照されたい.

この節の最後に shadow complexity の定義を行う.

**定義 2.8.**  $M$  を境界付き 4 次元多様体とする. このとき,  $M$  の **shadow complexity**  $sc(M)$  を次で定義する:

$$sc(M) = \min\{X \text{ の真頂点の個数} \mid X \text{ は } M \text{ の shadow}\}.$$

**注意 2.9.** Costantino が定義した shadow complexity は “閉” 4 次元多様体に対するものであった [2]. 境界付き 4 次元多様体の shadow complexity は [2] ではあまり厳密に触れられていない.

### 3. 主結果

この章では主結果と, その証明の概略を記述する.

#### 3.1. Shadow の縮約と 4 次元多様体

$(X, \text{gl})$  を shadowed polyhedron とし,  $X_0$  を  $X$  の subpolyhedron とする. すなわち,  $X_0$  は simple polyhedron で,  $X_0 \subset X$  である. この  $X_0$  に  $(X, \text{gl})$  からグリームを与える方法を次のように考える.  $R$  を  $X_0$  の内部領域とする. このとき,  $\text{Sing}(X_0) \subset \text{Sing}(X)$  であるため,  $R \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset$  であるとき,  $R$  は  $\text{Sing}(X)$  に沿って切り分けると  $X$  のいくつかの内部領域  $R_1, \dots, R_n$  に分解される. そこで,  $R$  のグリームを

$$\text{gl}(R) = \sum_{i=1}^n \text{gl}(R_i) \quad (2)$$

として与える.

**定理 3.1 (N.).**  $(X, \text{gl})$  を shadowed polyhedron とし,  $X_0$  を  $X$  の subpolyhedron とする. また,  $X \searrow X_0$  であるとし,  $X_0$  に式 (2) でグリームを与えたとする. このとき,  $M_X \cong M_{X_0}$  である.

この定理3.1の証明のために、次の補題3.2を用意しておく。

**補題 3.2.**  $(X, \text{gl})$  を shadowed polyhedron とし、 $X_0$  を  $X$  の subpolyhedron とする。また、 $X_0$  には式(2)でグリームを与えたとする。このとき、 $M_{X_0} \cong \text{Nbd}(X_0; M_X)$  である。

**証明の概略 (補題3.2).** まず、 $X_0$  は  $\text{Nbd}(X_0; M_X)$  の shadow になっていることを示す。正則近傍の定義から  $\text{Nbd}(X_0; M_X) \searrow X_0$  である。また、 $X_0$  は  $X$  の subpolyhedron であるため  $\text{Nbd}(X_0; M_X)$  内で局所平坦である。したがって、 $X_0$  が  $M_X$  の中で proper な位置に置かれていれば良いが、実際にはそうではない。そこで、 $X_0$  を少し動かして shadow の条件に合うようにする。

グリームの計算については、注意2.7(2)にある式(1)が非常に有効である。式(1)では、領域  $R$  のグリームを、 $R$  の自己交叉の符号和として表している。 $X_0$  の領域  $R$  が  $\text{Sing}(X)$  によって  $X$  の内部領域  $R_1, \dots, R_n$  に分解したとき、各  $R_i$  での自己交叉の数を  $i$  について全て足しあわせたものが  $R$  の自己交叉の数になるため、グリームも同様に和として計算できる。□

**証明 (定理3.1).** Turaev's reconstruction, 定理2.3および補題3.2より、

$$M_X \cong \text{Nbd}(X; M_X) \cong \text{Nbd}(X_0; M_X) \cong M_{X_0}$$

が成立する。□

**注意 3.3.** 次元が6以下のPL多様体の微分構造は一意的に決まることが知られている[6]。したがって、今回扱っている4次元の場合は定理2.3の主張は微分同相に強められ、上の証明に用いることができる。

### 3.2. Simple polyhedron の縮約性

この章では次の定理に向けて話を進めていく。

**定理 3.4 (N.).** 任意の非輪状な simple polyhedron で、その特異集合が  $S^1$  のみから成るものは2次元円板  $D^2$  に縮約する。

まず、Martelli が導入した simple polyhedron を表示するためのグラフを紹介する。 $X$  を simple polyhedron で、その特異集合  $\text{Sing}(X)$  が  $S^1$  のみから成るものとする。 $S$  を  $\text{Sing}(X)$  の連結成分のひとつとする。このとき、 $\text{Nbd}(S; X)$  は  $S^1$  上の  $Y$ -束の構造をもつ。ただし、 $Y$  は3点集合  $\{a, b, c\}$  の錐とする。 $S^1$  上の  $Y$ -束はある  $Y$  上の自己同相写像の写像トーラスとして得られる。また、集合  $\{a, b, c\}$  上の置換は  $Y$  上の自己同相写像に自然に対応している。この対応をもとに、

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

それぞれから得られる  $S^1$  上の  $Y$ -束を  $Y_{111}, Y_{12}, Y_3$  と表記することにする。実際、 $S^1$  上の  $Y$ -束の位相型は3種類で、上記で全てである。したがって、 $\text{Nbd}(\text{Sing}(X); X)$  の各連結成分は  $Y_{111}, Y_{12}, Y_3$  となる。さらに、それらを  $X$  から除いた  $X \setminus \text{Nbd}(\text{Sing}(X); X)$  の各連結成分は  $X$  の各領域と同相な曲面である。これら曲面はさらにいくつかの2次元円板、パンツ、Möbius の帯に分解できる。こうして、次の主張を得る。

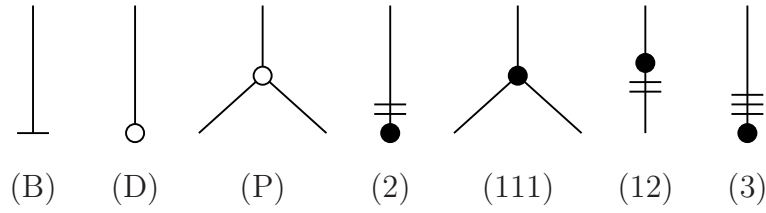


図 3: Simple polyhedron を分解して得られるグラフ.

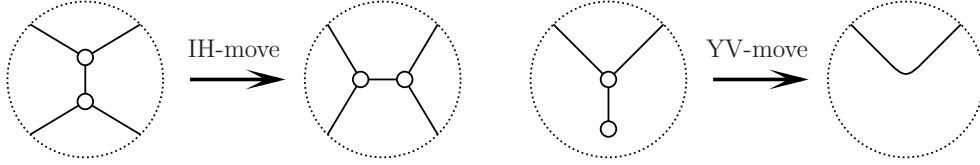


図 4: IH-move と YV-move.

**命題 3.5** (Martelli, [9]).  $X$  を simple polyhedron で, その特異集合  $Sing(X)$  が  $S^1$  のみから成るものとする. このとき,  $X$  はその上の単純閉曲線たちによって 2 次元円板, パンツ, Möbius の帯,  $Y_{111}$ ,  $Y_{12}$ ,  $Y_3$  に分解できる.

この命題による分解に対して, 図3の頂点からなるグラフを対応できる. (D), (P), (2), (111), (12) および (3) 型の頂点はそれぞれ 2 次元円板, パンツ, Möbius の帯,  $Y_{111}$ ,  $Y_{12}$ ,  $Y_3$  を表し, (B) 型の頂点は  $X$  の境界成分を表している. グラフの辺は, 分解をもたらした単純閉曲線たちに対応している. また, (12) 型の頂点から伸びる 2 本の辺には区別があることを注意する. マークが付けられている方の辺は,  $Sing(X)$  に沿って 2 周巻きついている単純閉曲線に対応している.

グラフは領域の分解の仕方により, 一意的ではない. 領域の分解を取り替える操作に対応する, グラフ上の変形として図4に挙げられるものが知られている. これらをそれぞれ **IH-move** と **YV-move** と呼ぶことにする.

[7] では simple polyhedron に関する非常に有用な考察が行われている. その中から次の2つを紹介する.

**補題 3.6** (Ikeda, [7]).  $X$  を simple polyhedron とする.  $H_1(X; \mathbb{Z}) = 0$  ならば,  $X$  の各領域は種数 0 の向き付け可能曲面である.

**定理 3.7** (Ikeda, [7]). 真頂点をもたない非輪状な simple polyhedron は境界をもつ.

また, 次の補題は今後よく用いられる.

**補題 3.8.**  $X$  を非輪状な simple polyhedron とし,  $\gamma$  を  $X \setminus Sing(X)$  内の単純閉曲線とする. このとき  $\gamma$  は  $X$  を 2 つの simple polyhedra  $X_0, X_1$  に分解し,  $X_0$  は非輪状,  $X_1$  は  $S^1$  とホモロジー群が同型になる. さらに,  $H_1(X_1; \mathbb{Z})$  は  $\gamma$  によって生成される.

この証明は省略するが, 補題3.6, Mayer Vietoris 完全系列および Euler 標数を用いて示すことができる.

以降,  $X$  は非輪状な simple polyhedron で, その特異集合  $Sing(X)$  が  $S^1$  のみから成るものとする. また, 定理3.7により,  $\partial X \neq \emptyset$  も仮定しておく.

我々が目指すことは,  $X$  のグラフ  $G$  を詳しく考察し, 縮約に対応する操作を施しながら  $G$  を図5に変形することである. このグラフは 2 次元円板  $D^2$  に対応している.

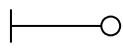


図 5: (B) 型, (D) 型の頂点それぞれひとつづつからなるグラフ.

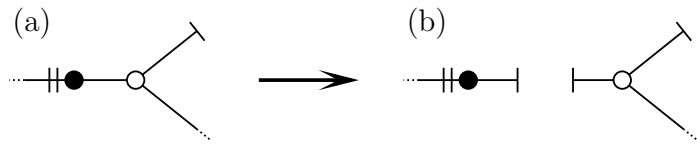


図 6: 主張 3 の部分グラフ.

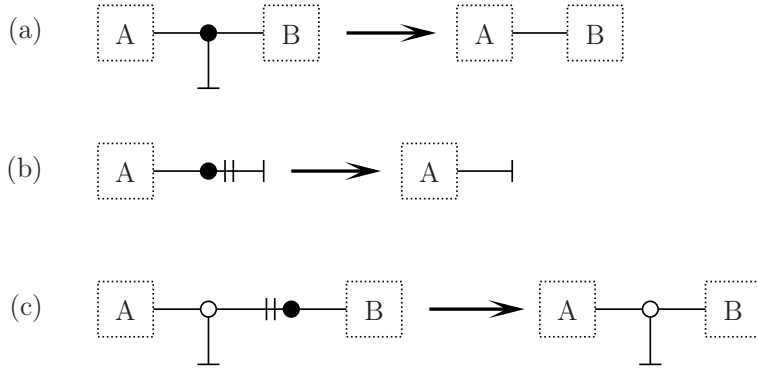


図 7: 操作 (a), (b), (c).

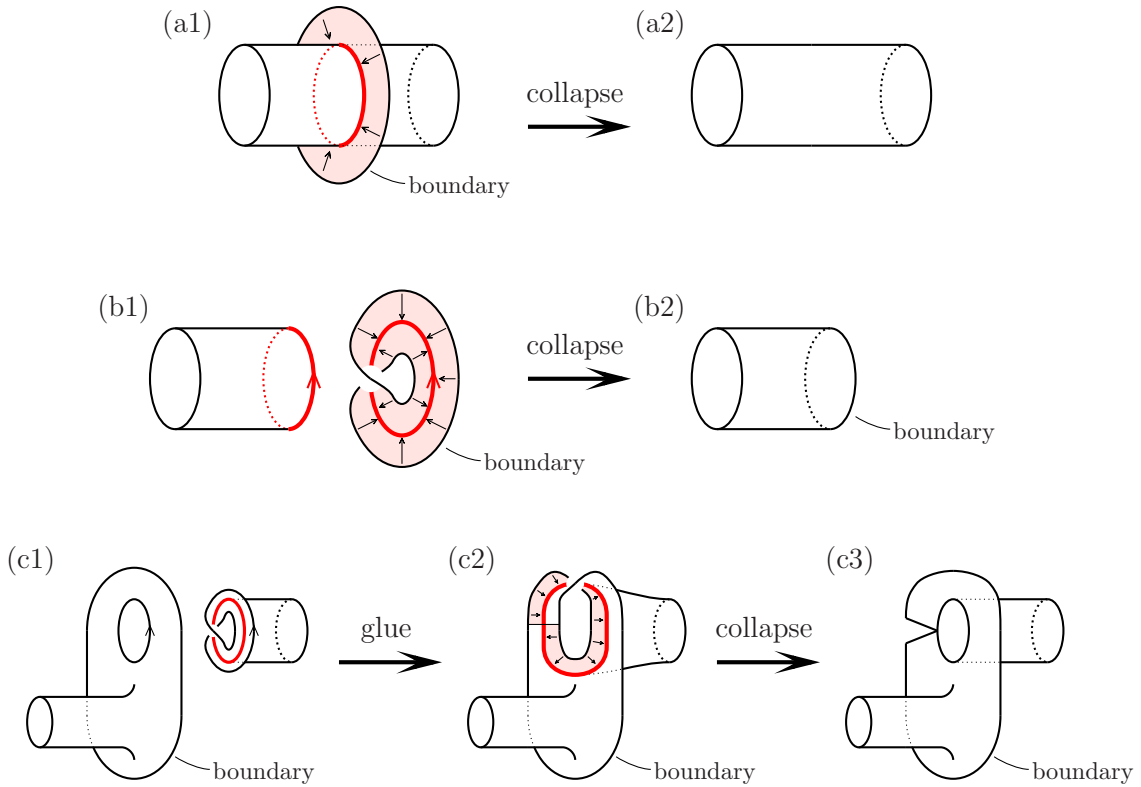


図 8: 図 7 の変形を実現する縮約.

さらに、いくつかの主張を用意していく。

**主張 1.**  $X$  に  $Y_3$  は埋め込まれ得ない。すわなち、 $G$  は (3) 型の頂点をもたない。

**主張 2.**  $G$  は木である。

これら主張1, 主張2は補題3.8から簡単に示せる。証明は省略する。

**主張 3.** 図6 (a) のような部分グラフは  $G$  に存在しない。

**証明** (主張3). 背理法で示す。図6 (b) の分割に対応するような  $X$  の分割を行う。このとき、図6 (b) の右図に対応する subpolyhedron は 1-サイクルをもつため、補題3.8により図6 (b) の左図に対応する subpolyhedron は非輪状である。しかし、この subpolyhedron に対して、ちょうど図の (B) 型の頂点に対応する境界成分からの縮約を行うと Möbius の帯を領域に含むような subpolyhedron ができてしまい補題3.6に矛盾する。□

**主張 4.** 図7の操作 (a), (b), (c) は、 $X$  の縮約として実現できる。

**証明の概略** (主張4). 図8のように縮約が行える。□

補題3.8を繰り返し用いることで  $G$  には必ず (D) 型の頂点が存在することがわかる。そこで、(D) 型の頂点をひとつ選び、 $G$  の根  $v_r$  として扱う。次に行うことは、 $G$  が (111) 型の頂点をもつとき、(111) 型の頂点をひとつも持たないようなグラフに変形することである。(111) 型の頂点が存在するとし、その中でも  $v_r$  から最も遠いものを  $v_0$  とおく。この  $v_0$  に対応する  $Y_{111}$  を  $X$  から取り除いたとき、 $X$  は3つの連結成分に分かれる。その中で、 $v_r$  に対応する  $D^2$  を含むものを  $X_1$  とし、残りの2つを  $X_2, X_3$  とする。 $X_1, X_2, X_3$  に対応する  $G$  の部分グラフをそれぞれ  $G_1, G_2, G_3$  とおく。補題3.8により、 $X_2, X_3$  の少なくとも一方は  $S^1$  とホモロジー群が同型である。 $X_2$  がそうであるとする。 $\gamma$  を  $X$  内の単純閉曲線で、 $X_2$  を  $X$  から切り離すものとする。補題3.8より、 $\gamma$  は  $H_1(X_2; \mathbb{Z})$  を生成する。 $X_2$  の境界成分が  $\gamma$  のみと仮定したとき、 $\gamma$  に沿って  $D^2$  を接着させ得られる simple polyhedron は境界がなく非輪状なものになるが、これは定理3.7に反する。したがって、 $X_2$  は  $\gamma$  の他にも境界成分をもつ。言い換えれば、 $G_2$  は (B) 型の頂点をもつことになる。

**主張 5.** 操作 (a), (b), (c) および IH-move, YV-move のみを用いて、 $G_2$  および  $v_0$  を含まないようなグラフに  $G$  を変形できる。

**証明** (主張5).  $v$  を  $G_2$  に含まれる (B) 型の頂点とし、 $v$  から伸びる唯一の辺によって  $v$  は頂点  $v'$  と結ばれているとする。このとき、 $v'$  は (111), (12), (P) 型のいずれかである。

$v'$  は (111) 型であるとき、 $v'$  は  $v_0$  に他ならない。操作 (a) を適用し証明は完了する。

$v'$  は (12) 型または (P) 型であるとする。(12) 型であったときは、主張3のときと同様の理由で、 $v$  と  $v'$  を結ぶ辺はマークが付けられているものしか現れない (図9 (1)). また、 $v'$  が (P) 型であるときは、 $X$  が非輪状であることから  $v'$  から結ばれる3つの頂点のうち (B) 型であるのは  $v$  のみである。以上から、考えられる状況は図9に示される7種類のみとなる。

$H_0 = G_2$  とおく。各 (1)–(7) の場合において、下記のようにそれぞれ  $H_k$  に対する操作を施し、そののち得られる新たなグラフを  $H_{k+1}$  とおく ( $k = 0, 1, \dots$ ).



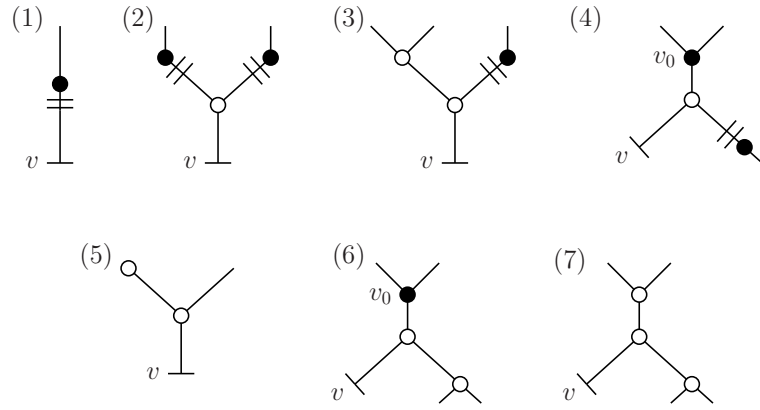


図 9: 主張5の場合分け.

- (1) 操作 (b) を行う. このとき,  $H_{k+1}$  の頂点の個数は  $H_k$  のものより 1 つ少ない.  
 (2)–(4) 操作 (c) を行う. このとき,  $H_{k+1}$  の頂点の個数は  $H_k$  のものより 1 つ少ない.  
 (5) YV-move を行う. このとき,  $H_{k+1}$  の頂点の個数は  $H_k$  のものより 1 つ少ない.  
 (6),(7)  $v$  と辺で結ばれている頂点を  $v'_k$  とおく. ここで,

$$V_k = \left\{ u \mid \begin{array}{l} u \text{ は } v'_k \text{ ではない (P) 型の頂点であり, } u \text{ と } v'_k \text{ を結ぶ道は} \\ \text{(P) 型の頂点のみを経由する.} \end{array} \right\}$$

という集合を考える.  $G$  が有限な木であることから,  $H_k$  内で (P), (111) 以外の型の頂点と辺で結ばれるような  $V_k$  の元が存在する. そのような元と  $v'_k$  を結ぶ道に沿って IH-move を行っていけば, 得られた  $H_{k+1}$  は (3) または (5) の状況になっている.

以上のいずれの場合においても  $H_k$  の頂点の個数は減少しているが,  $H_k$  は有限である. したがって, やがて  $v$  は (111) と辺で結ばれるような場合に到着する. これで証明が完了する.  $\square$

主張5を繰り返し適用することで  $G$  は (111) 型の頂点をもたないようにできる. このグラフを新たに  $G'$  とおく. 定理3.7により,  $G'$  も (B) 型の頂点をもつ. この頂点を  $v$  とおく.  $v$  と結ばれる頂点は (D), (12), (P) 型のいずれかである. もしそれが (D) 型であれば,  $G'$  はまさに図5のものであり, 定理3.4の証明は完了する. そうでないときは,  $v$  は図9 (1)–(3), (5), (7) のいずれかのような状況に置かれている. 主張5と同様の手順を追うことで, 最終的に  $v$  と (D) 型の頂点が結ばれているようなグラフに  $G'$  を変形できる. こうして定理3.4は示された.

### 3.3. Shadow complexity 0 の非輪状 4 次元多様体について

前述の 2 つの定理3.1および定理3.4の重要な帰結として次の主張を得た.

**定理 3.9.**  $M$  を非輪状な 4 次元多様体とする. このとき,  $sc(M) = 0$  であることの必要十分条件は  $M$  が 4 次元球体に微分同相であることである.

**証明.** 十分性は明らか. 必要性を示す.  $sc(M) = 0$  であるとき, 定義から  $M$  は真頂点がひとつもないような shadow をもつ. これを  $X$  とおく.

$Sing(X)$  が  $S^1$  のみから成るとき, 定理3.4によって  $X$  は  $D^2$  に縮約する. 定理3.1により  $D^2$  もまた  $M$  の shadow である.  $D^2$  を shadow とする 4次元多様体は 4次元球体のみであるため, 主張が成立する.

$Sing(X)$  に  $S^1$  以外の連結成分も含まれるとする.  $X$  に真頂点がひとつもないことから, そのような連結成分は閉区間である.  $Sing(X)$  の連結成分として現れるすべての閉区間に沿って  $X$  を切りひらき, subpolyhedra  $X_1, \dots, X_n$  に分解する. Turaev's reconstruction により  $M \cong M_{X_1} \natural \cdots \natural M_{X_n}$  が成立することがわかる. ただし,  $\natural$  は境界連結和を表す. ここで, 各  $1 \leq i \leq n$  について  $Sing(X_i)$  は  $S^1$  のみから成るため, 上の議論から  $M_{X_i}$  は 4次元球体と微分同相である. したがって,  $M$  は 4次元球体と微分同相となる.  $\square$

## 参考文献

- [1] A. Carrega and B. Martelli, *Shadows, ribbon surfaces, and quantum invariants*, arXiv preprint arXiv:1404.5983, to appear in *Quantum Topology*.
- [2] F. Costantino, *Complexity of 4-manifolds*, *Experiment. Math.* **15** (2006), 237–249.
- [3] F. Costantino, *Stein domains and branched shadows of 4-manifolds*, *Geom. Dedicata* **121** (2006), 89–111.
- [4] F. Costantino, *Branched shadows and complex structures on 4-manifolds*, *J. Knot Theory Ramifications* **17** (2008), 1429–1454.
- [5] F. Costantino and D. Thurston, *3-manifolds efficiently bound 4-manifolds*, *J. Topol.* **1** (2008), 703–745.
- [6] M. Hirsch and B. Mazur, *Smoothings of piecewise linear manifolds*, *Ann. Math. Studies* 80, Princeton University Press, Princeton NJ 1974.
- [7] H. Ikeda, *Acyclic fake surfaces*, *Topology* **10** (1971), 9–36.
- [8] M. Ishikawa and Y. Koda, *Stable maps and branched shadows of 3-manifolds*, arXiv preprint arXiv:1403.0596, to appear in *Math. Ann.*
- [9] B. Martelli, *Four-manifolds with shadow-complexity zero*, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2011**, 1268–1351.
- [10] H. Naoe, *Shadows of 4-manifolds with complexity zero and polyhedral collapsing*, arXiv preprint arXiv:1605.00250.
- [11] C. Rourke and B. Sanderson, *Introduction to piecewise-linear topology*, *Ergebnisse der Mathematik*, Band 69, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972.
- [12] V. G. Turaev, *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, *de Gruyter Studies in Math.*, 18, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.