

べき単的マグナス展開を用いた Milnor 不変量

野坂 武史¹ (九州大学 数理学研究院)

概要

本稿の目的は、「結び目の数学 IX」の講演で述べた内容の、厳密的な記述である。プレプリント [KN] の和訳に近い。なお、この研究は九州大学の小谷久寿氏との共同研究である。

主旨は次の 2 点から成る: (1) ミルナー不変量の図的計算法を与え、例示する事。 (2) ミルナー不変量の高次化を精密化する事。

1 動機; ミルナー不変量のおさらい

1950 年代, Milnor[M1, M2] は高次の絡み目数を定義した。それは Milnor 不変量と呼ばれ、長く研究され、位相的側面も幾らか理解されている。([Hil, HM, IO, St] など参照)。しかし、任意の絡み目に対する当不変量は計算が難しいように思われた。実際、原論文の定義では、非可換的な緯線の扱いが、非常に困難に見えたからである(節 2 で 5 つ難点を詳述する)。

本研究では、Milnor 不変量の図的計算法を与えた(定理 4.1)。この利点と結果を述べる。ここでの鍵は、中心拡大で当不変量を記述し直し、べき単的マグナス展開を用いた点である。とくに、[CEGS] のカンドルコサイクル不変量のアイデアを採用した為、我々の計算法は緯線の表示が不要である。さらに当展開は可換環 Ω_m で表現されるため、PC プログラムと相性がよい(詳細は §§4-5 参照)。実際、節 5 で簡単な計算法を与え、さらには Milnor 絡み目の Milnor 不変量の非自明初項を初めて決定した。

本研究の延長として、我々は高次のミルナー不変量を精密化した(節 6 参照)。原版の定義では、ある整数 " $\Delta(I)$ " $\in \mathbb{Z}$ で modulo して定義された(indeterminacy と呼ばれる)。その為、有理パートは必ず消え、さらに原版の高次不変量はゼロになる事も多々ある。しかし、本研究で、 $\Delta(I)$ の代わりに、可換環 Ω_m の弱いイデアルを導入した。そして、そのイデアルで割った商の中で高次不変量を精密化し定義した(定義 6.2)。この定義は、中心拡大の意味で普遍性をもつ(定理 6.3)。実際、精密化した不変量有理部分も消えない例を示し、加えて、幾つかの絡み目を見分ける事を示した。

結論をまとめると、(高次)Milnor 不変量は計算可能な不変量になり、或る程度の強さがわかった事になる。本稿では、以上の内容を解説したい。

2 復習; ミルナー不変量の非自明初項

定理を述べる前に、ミルナー不変量の非自明初項について復習する。本稿での用語を確定しておこう。まず群 G に対し、中心降下列 $\Gamma_k G$ を、交換子群を用いて、

$$\Gamma_1 G := G, \quad \Gamma_2 G := [G, G], \quad \Gamma_3 G := [[G, G], G], \dots, \Gamma_m G := [\Gamma_{m-1} G, G]$$

という風に、帰納的に定義する。また F を階数 q の自由群とし、 x_1, \dots, x_q を生成元とする。そして、 Q_m で商群 $\Gamma_{m-1} F / \Gamma_m F$ を表すとする。すると次の中心拡大を得る：

$$0 \longrightarrow Q_m \longrightarrow F / \Gamma_m F \xrightarrow{p_{m-1}} F / \Gamma_{m-1} F \longrightarrow 0 \quad (\text{central extension}). \quad (1)$$

このアーベル核 Q_m は、有限生成自由アーベル群で、その基底(Hall basis)も解っている([CFL, Theorem 1.5] など参照)。さらに、結び目論の用語も以下の様に確定する。

¹本研究は、JSPS 科研費(課題番号:25800049)からの助成を受けたものである。 E-mail address: nosaka@math.kyushu-u.ac.jp

- $L \subset S^3$ を, q -成分の絡み目とする.
- 経線-緯線のペア $(\mathbf{m}_\ell, \mathbf{l}_\ell)$ を, preferred で固定する (ここで $\ell \leq q$).
- $f_2 : \pi_1(S^3 \setminus L) \rightarrow F/\Gamma_2 F = \mathbb{Z}^q$ をアーベル化とする.

次に, [M1, IO] に従い, 目的の初項を復習しよう. $m \in \mathbb{N}$ に対して, 次の仮定を定義する:

- 仮定 \mathcal{A}_m . $\forall k \leq m$ に対し, 準同形 $f_k : \pi_1(S^3 \setminus L) \rightarrow F/\Gamma_k F$ があり可換図式を満たす:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \pi_1(S^3 \setminus L) & & & & & & \\
 \downarrow f_2 & \searrow f_3 & \searrow f_4 & \cdots & \searrow f_m & & \\
 F/\Gamma_2 F & \xleftarrow{p_2} & F/\Gamma_3 F & \xleftarrow{p_3} & F/\Gamma_4 F & \xleftarrow{\cdots} & F/\Gamma_m F.
 \end{array}$$

ここで幾つか注意を述べる. まず, 他の拡大 f'_m が合った場合, f_m と f'_m は共役で等価である (実際, 中心性から容易に確かめられる). また, $[x_i] \in F/\Gamma_m F$ の中心化部分群は, $\{x_i^k\}_{k \in \mathbb{Z}} \times Q_m$ となる事が知られる². であるため, f_m は全ての preferred 緯線 \mathbf{l}_ℓ を中心 Q_m に送ると思ってよい (ここで $f_m(\mathbf{m}_\ell)^{\pm 1}$ 倍は無視する).

すると, 絡み目 L のミルナー不変量の非自明初項とは, 次の q -tuple で定義される:

$$(f_m(\mathbf{l}_1), \dots, f_m(\mathbf{l}_q)) \in (Q_m)^q.$$

ミルナーの示した事に, この不変量は \mathcal{A}_{m+1} のリフトの完全障碍である. 明確には,

命題 2.1 ([M2]). \mathcal{A}_m を仮定する. このとき, f_m がリフト $f_{m+1} : \pi_1(S^3 \setminus L) \rightarrow F/\Gamma_{m+1} F$ を許容する必要十分条件は, 全ての当 m 次初項が 0 である, つまり, $\forall \ell \leq q, f_m(\mathbf{l}_\ell) = 0 \in Q_m$.

ミルナー不変量は, 定義と命題のように簡明であり, 既存の研究は沢山ある. しかし, 具体的な計算は難しいと思われた. ここでは難点を 5 つ挙げよう:

- (I) 商群 $F/\Gamma_m F$ を定量的に記述すべきである点. ミルナーの解決策は, (マグナス展開を通じ) 非可換多項式環 $\mathbb{Z}\langle X_1, \dots, X_q \rangle$ に値を持たせる手だった. しかし非可換環上では $f_m(\mathbf{l}_\ell)$ の計算が大変になる; [M2, IO] 参照.
- (II) 次に, 緯線 \mathbf{l}_ℓ の群表示も必要である. Milnor [M2, §3] ([Hil, Chapters 1 & 11–14] も参照) の解決策は, $f_m(\mathbf{l}_\ell)$ のみで \mathbf{l}_ℓ を記述する手だった (後述の (7)). しかし, これは m と $q = \#L$ に応じ指数関数的にハードになる.
- (III) あまつさえ, 準同形 f_m たちを, 非可換群 $F/\Gamma_m F$ 上に記述する必要がある.
- (IV) さらに, Milnor [M2] の原論文では, 或る列 $I \subset \{1, 2, \dots, q\}^m$ に対し定義された. しかし, この方法はその列と不変量の関係が非常に複雑であった.
- (V) 加えて, 高次の Milnor 不変量に関して, 原論文の定義が込入って代数的すぎる感がある ([M2, Hil, St] 参照). そして, 高次不変量がゼロになる場合もありえる.

²なお, この証明は後のべき単的マグナス展開を用いれば, m の帰納法から容易に示せる.

3 べき单的 Magnus 埋込み.

先ほどの困難を解決する鍵は, Gupta-Gupta[GG] によるべき单的 Magnus 埋込みである. この埋込みとは, 一言で言えば, $F/\Gamma_m F$ の或る忠実な線形表現である.

この埋込みを記述しよう. 記号 Ω_m によって可換多項式環 $\mathbb{Z}[\lambda_i^{(j)}]$ を表そう, ここで, 可換な不定元 $\lambda_i^{(j)}$ は $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, $j \in \{1, \dots, q\}$ を走っている (即ち, 変数の個数は $qm - q$). そこで, 準同形

$$\Upsilon_m : F \longrightarrow GL_m(\Omega_m)$$

を次で定義する:

$$\Upsilon_m(x_j) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1^{(j)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_2^{(j)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_{m-1}^{(j)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

これは次のような, 面白い性質をもつ (cf. べき零群の例で, べき単行列群がよくあげられるが, 以下の性質はその一端である). ここで I_m を単位行列とする.

- (i) y を k 番目交換子 $\Gamma_k F$ の元とすると, $\Upsilon_m(y) - I_m$ は右上三角行列の形をし, $(1, 2)$ -, $(1, 3)$ -, \dots , $(1, k-1)$ -までの成分はゼロである (ここで $k < m$).
- (ii) 特に, m 番目交換子 $\Gamma_m F$ の像は, $\Upsilon_m(\Gamma_m F) = \{I_m\}$ となる.
- (iii) [GG] で知られることに, その商射 $F/\Gamma_m F \rightarrow GL_m(\Omega_m)$ は単射準同形である.
- (iv) 中心に制限した像 $\Upsilon_m(Q_m)$ は, 行列 $(1, m)$ -成分のみに現れる (だから, 中心の中のものでどうか判定しやすい).

さらに, 下記の等式 (2) を言及しておく. $E_{i,j}$ を行列で, (i, j) -成分のみ 1 で他は 0 のものとする. さらに, 元 $b \in \text{Im}(\Upsilon_m)$ に対し, 逆像の元 $B \in p_m^{-1}(b) \subset \text{Im}(\Upsilon_{m+1})$ を選ぶ. ここで, 先述の (iv) から解ることに, B の選び方は, $(1, m+1)$ -成分のみの問題となる. さらに, 中心性から, $\text{Im}(\Upsilon_{m+1})$ 内の次式が容易に得られる:

$$B^{-1}AB = (B + \omega E_{1,m+1})^{-1}A(B + \omega E_{1,m+1}), \quad \forall A \in \text{Im}(\Upsilon_{m+1}), \quad \forall \omega \in \Omega_{m+1}. \quad (2)$$

4 ミルナー不変量の初項に関する定理.

この節では定理 4.1 と系 4.2 を述べる. これは困難 (II)(III) の解決にもなる.

まず用語を準備する. L の絡み目図式 D を固定し, \mathcal{A}_m も仮定する. 図 1 の通り, アーク $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N_j}$ を緯線 l_j にそって割り振る. ここで α_1 を経線 m_j を同一視してよい. また β_k を「 α_k と α_{k+1} を区分するアーク」とし, $\epsilon_k \in \{\pm 1\}$ を「 α_k と β_k との交点符号」とする. Wirtinger 表示より, 準同形 f_m は写像 $\{\text{arc of } D\} \rightarrow F/\Gamma_m F$ と見做せる.

次に, k の帰納法で, 対応 $\mathcal{C} : \{\alpha_k\}_{k \leq N_j} \mapsto \text{Im}(\Upsilon_{m+1})$ を定めよう: まず $\mathcal{C}(\alpha_1) = \Upsilon_{m+1}(x_j)$ とする. 加えて, $1 < k \leq N_j$ に対し, 元 $B_k \in p_m^{-1}(f_m(\beta_k))$ を選び, $\mathcal{C}(\alpha_{k+1})$ を $B_k^{-\epsilon_k} \cdot \mathcal{C}(\alpha_k) \cdot B_k^{\epsilon_k}$ と定める. ここで即座に (2) から解ることで, B_k の選び方には依存しない. まとめると, その対応は $\mathcal{C} : \{\text{arc of } D\} \rightarrow \text{Im}(\Upsilon_{m+1})$ を定義した事になる.

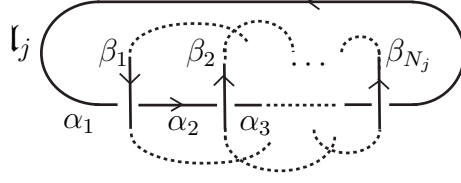


図 1: 図式 D にある, 緯線 l_j にそった, アーク α_i, β_i たち.

定理 4.1 を述べる為に, 最初と N_j -交点の差を考える. つまり次式をおく:

$$\Psi_m(j) := \Upsilon_{m+1}(x_j)^{-1} \cdot B_{N_j}^{-\epsilon_{N_j}} \cdot \mathcal{C}(\alpha_{N_j}) \cdot B_{N_j}^{\epsilon_{N_j}} \in \Upsilon_{m+1}(Q_{m+1}). \quad (3)$$

ここで注意点は, $\Psi_m(j)$ は緯線 l_j の群表示を全く要しない点である ($\forall j \leq q = \#L$).

さらに, $j \leq \#L$ に対し, 写像

$$\mathcal{I}_j : \Gamma_m F \longrightarrow \Gamma_{m+1} F; \quad y \longmapsto x_j^{-1} y^{-1} x_j y, \quad (4)$$

を考える. これは加法準同形 $\mathcal{I}_j : \Upsilon_m(Q_m) \rightarrow \Upsilon_{m+1}(Q_{m+1})$ を誘導する. すると, \mathcal{I}_j を通じ, 上記の $\Psi_m(j)$ が Milnor 不変量の初項を再現する:

定理 4.1. この \mathcal{I}_j は単射で, 等式 $\mathcal{I}_j(\Upsilon_m \circ f_m(l_j)) = \Psi_m(j)$ を満たす.

証明. 単射性は節 5.1 の (5) からすぐ解る. 後半を示そう. 積 $B_1^{\epsilon_1} B_2^{\epsilon_2} \cdots B_{N_j}^{\epsilon_{N_j}}$ を \mathcal{B} と略記し, また $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ をおく. すると, 定義より, $\Psi_m(j) = \Upsilon_m([x_j^{-1}, \mathcal{B}^{-1}])$ である. また初等的等式 $[x_j, z] = [x_j, p_m(z)] \in Q_{m+1}$ に気づこう ($\forall z \in \Gamma_{m-1} F$). すると図 1 より $p_m(\mathcal{B}) = f_m(l_j)$ なので, $\mathcal{I}_j(\Upsilon_m \circ f_m(l_j)) = \Upsilon_m([x_j^{-1}, f_m(l_j^{-1})]) = \Upsilon_m([x_j^{-1}, \mathcal{B}^{-1}]) = \Psi_m(j)$ となる. これは結論の式である. \square

この成果として, 命題 2.1 の条件下の, リフト f_{m+1} の厳密な明示を与える:

系 4.2. m 次ミルナー不変量 $f_m(l_\ell)$ が, $\forall \ell \leq \#L$ に対し, ゼロとする. この時, 上の $\mathcal{C} : \{\text{arc of } D\} \rightarrow \text{Im}(\Upsilon_{m+1})$ は準同形 $f_{m+1} : \pi_1(S^3 \setminus L) \rightarrow \Upsilon_{m+1}(F/\Gamma_{m+1} F)$ を定義する.

証明. \mathcal{C} の構成より, どんな j と $1 \leq k < N_j$ に対し, k -番目交点の Wirtinger 関係式を満たす. また仮定と定理 4.1 より, $\Psi_m(j) = 0$ から N_j 番目交点でも Wirtinger 関係式を満たす. 従って, \mathcal{C} は全交点に対し, Wirtinger 表示を満たす. 従って, 準同形性を保障する. \square

ちなみに, この系から命題 2.1 が簡単に証明できる.

結論として, ミルナー不変量の計算法をまとめよう. まずアーベル化 $f_2 : \pi_1(S^3 \setminus L) \rightarrow \mathbb{Z}^q$ をおく. そして仮定する事に, $\forall k \leq h$ に対し準同形 $f_k : \pi_1(S^3 \setminus L) \rightarrow F/\Gamma_k F$ (即ち, 仮定 \mathcal{A}_h) が与えられ, h -次 Milnor 不変量 $f_h(l_\ell)$ がゼロとする. すると系 4.2 により, f_{h+1} を具体的に表示できる. この過程を繰返す事で, 或る ℓ で $f_m(l_\ell) \neq 0$ となる最小の m が存在するとする. すると, 定理 4.1 により, m -次 Milnor 不変量を計算できた事になる. さらに, 環 Ω_m が可換より, この計算法は Mathematica のようなプログラムと相性がよい. まとめると, これらの結果は難点 (I)–(III) を克服した, と言えよう.

5 計算例

我々の計算法が応用的に速いことを立証するため, ミルナー不変量を幾らか計算する. この節では, $c(L)$ を L の交点数とし, $\text{lk}(L) \in \mathbb{Z}$ を絡み目数とする.

5.1 ブラケットと、標準交換子.

難点 (IV) を解決し、計算を簡易化するために、我々は Ω_m 中でブラケットを定義する.

自然数 $r, s \in \mathbb{N}$ に対し、自然な入射 $\iota_s : \Omega_r \hookrightarrow \Omega_{r+s}$ をおく. そして環準同形 $\kappa_r : \Omega_s \hookrightarrow \Omega_{r+s}$ を $\kappa_r(\lambda_i^{(j)}) = \lambda_{i+r}^{(j)}$ で定義する (要は添え字を r 個ずらす). すると双線形写像を得る:

$$[\bullet, \bullet] : \Omega_r \times \kappa_r(\Omega_s) \longrightarrow \Omega_{r+s}; \quad (a, \kappa_r(b)) \longmapsto \iota_s(a)\kappa_r(b) - \iota_r(b)\kappa_s(a).$$

節 3 の (iv) から、中心 $\Upsilon_s(Q_s)$ は Ω_s の部分加群と見做せるので、このブラケットは

$$[\bullet, \bullet] : \Upsilon_r(Q_r) \times \kappa_r(\Upsilon_s(Q_s)) \longrightarrow \Upsilon_{r+s}(Q_{r+s})$$

を誘導する. このブラケットは、群の交換子の像として、解釈できる. 厳密には、等式

$$\Upsilon_{r+s}(ghg^{-1}h^{-1}) = [\Upsilon_r(g), \kappa_r(\Upsilon_s(h))], \quad \forall g \in \Gamma_{r-1}F, \text{ and } \forall h \in \Gamma_{s-1}F \quad (5)$$

である. この証明は、 $\Upsilon_{r+s}(ghg^{-1}h^{-1})$ を右上三角行列として計算すれば、簡単にできる.

ここで [CFL] の Corollaries 2.2–2.3 を言及すべきだろう. 実際、そこでは、この交換子たちに関し、或る (Jacobi) 関係式 “(S1), (S2), (S2°), (S3)” が定義され、さらには中心 Q_m の基底を決定している. 従って、公式 (5) によれば、ブラケットを用い Milnor 不変量を記述する方が賢明であろう (Table 1 参照).

さらに、左寄せされた交換子を詳述しておこう. \mathfrak{S}_2 を位数 2 の対称群とする. そこで、多重添字 $J = (j_1 \cdots j_n) \in \{1, \dots, q\}^n$ と $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) \in (\mathfrak{S}_2)^{n-1}$ に対し、 $\sigma(J) = (j_1^\sigma, \dots, j_n^\sigma) \in \mathbb{N}^n$ を次式で定義する:

$$(j_1^\sigma, \dots, j_n^\sigma) = \sigma_{n-1}(\sigma_{n-2}(\cdots \sigma_4(\sigma_3(\sigma_2(\sigma_1(j_1, j_2), j_3), j_4), j_5) \cdots), j_n)).$$

すると左寄せされた交換子は定義より、次で表される:

$$[[\cdots [[\lambda_1^{(j_1)}, \lambda_2^{(j_2)}], \lambda_3^{(j_3)}] \cdots], \lambda_n^{(j_n)}] = \sum_{\sigma \in (\mathfrak{S}_2)^{n-1}} \text{sign}(\sigma) \cdot \lambda_1^{(j_1^\sigma)} \lambda_2^{(j_2^\sigma)} \cdots \lambda_n^{(j_n^\sigma)} \in \Omega_{n+1}.$$

特に、公式 (5) は (帰納法から) 次を意味している:

$$\Upsilon_m([\cdots [[x_{j_1}, x_{j_2}], x_{j_3}] \cdots], x_{j_{m-1}}) = [[\cdots [[\lambda_1^{(j_1)}, \lambda_2^{(j_2)}], \lambda_3^{(j_3)}] \cdots], \lambda_{m-1}^{(j_{m-1})}]. \quad (6)$$

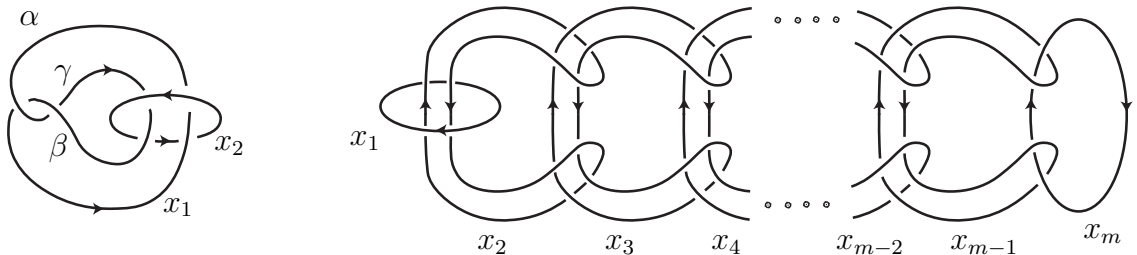


図 2: Whitehead 絡み目と Milnor 絡み目.

5.2 Whitehead 絡み目と、簡単な絡み目.

不変量に戻り, Whitehead 絡み目で計算してみよう (cf. 既存の方法として [IO, §10.3], [Mu1, §8][St]). まず経線 x_1, x_2 と三つのアーク α, β, γ を, 図 2 の通りとする. 当不変量は次数 < 4 でゼロが知られている. なので $m = 4$ とすべきだろう. Wirtinger 表示により, 対応 $\mathcal{C} : \{\text{arcs of } D\} \rightarrow GL_5(\Omega_5)$ は関係式

$$\mathcal{C}(\alpha) = \mathcal{C}(x_2)\mathcal{C}(x_1)\mathcal{C}(x_2)^{-1}, \quad \mathcal{C}(\beta) = \mathcal{C}(\alpha)^{-1}\mathcal{C}(x_1)\mathcal{C}(\alpha), \quad \mathcal{C}(\gamma) = \mathcal{C}(\beta)^{-1}\mathcal{C}(\alpha)\mathcal{C}(\beta).$$

を要請する. 従って, 対応 $f(x_i) = \Upsilon_5(x_i)$ に対し, $\mathcal{C}(\alpha)$ と $\mathcal{C}(\beta)$ は次の表示となる.

$$\mathcal{C}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1^{(1)} & [\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(1)}] & [\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(2)}]\lambda_3^{(2)} & [\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(2)}]\lambda_3^{(2)}\lambda_4^{(2)} \\ 0 & 1 & \lambda_2^{(1)} & [\lambda_2^{(2)}, \lambda_3^{(1)}] & [\lambda_2^{(1)}, \lambda_3^{(2)}]\lambda_4^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_3^{(1)} & [\lambda_3^{(2)}, \lambda_4^{(1)}] \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_4^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{C}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1^{(1)} & 0 & [[\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(2)}], \lambda_3^{(1)}] & [[\lambda_2^{(1)}, \lambda_3^{(2)}], \lambda_4^{(1)}]\lambda_1^{(1)} - [[\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(2)}], \lambda_3^{(1)}]\lambda_4^{(2)} - [\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(2)}][\lambda_3^{(1)}, \lambda_4^{(2)}] \\ 0 & 1 & \lambda_2^{(1)} & 0 & [[\lambda_2^{(1)}, \lambda_3^{(2)}], \lambda_4^{(1)}] \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_3^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_4^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(ここで, 気づいておくと良い事は, 左上 4×4 行列に制限すれば, \mathcal{C} は準同形 $f_4 : \pi_1(S^3 \setminus L) \rightarrow GL_4(\Omega_4)$ を定義する). そして, (13) の $\Psi_4(j)$ を定義どおり書き下すと, 次になる:

$$\Psi_4(1) = \Upsilon_5(x_1)^{-1}\mathcal{C}(\alpha)\mathcal{C}(x_2)^{-1}\mathcal{C}(\beta)\mathcal{C}(x_2)\Upsilon_5(x_1)\mathcal{C}(x_2)^{-1}\mathcal{C}(\beta)^{-1}\mathcal{C}(x_2)\mathcal{C}(\alpha)^{-1},$$

$$\Psi_4(2) = \Upsilon_5(x_2)^{-1}\mathcal{C}(x_1)\mathcal{C}(\beta)^{-1}\Upsilon_5(x_2)\mathcal{C}(\beta)\mathcal{C}(x_1) \in \Upsilon_5(Q_5).$$

後は行列計算 (Mathematica を用いてよい) を頑張ると, この行列の (1, 5)-成分は次となる:

$$\begin{aligned} \Psi_{4,1}(N_1)_{(1,5)} &= -\Psi_{4,2}(N_2)_{(1,5)} = -[[[\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(2)}], \lambda_3^{(1)}], \lambda_4^{(2)}] \\ &= \lambda_3^{(1)}\lambda_4^{(1)}\lambda_1^{(2)}\lambda_2^{(2)} - 2\lambda_2^{(1)}\lambda_4^{(1)}\lambda_1^{(2)}\lambda_3^{(2)} + 2\lambda_1^{(1)}\lambda_3^{(1)}\lambda_2^{(2)}\lambda_4^{(2)} - \lambda_1^{(1)}\lambda_2^{(1)}\lambda_3^{(2)}\lambda_4^{(2)}. \end{aligned}$$

さて, 他の絡み目も考えよう. 同様の方法で PC をかけると, Milnor 不変量の非自明初項が, 交点 $\text{cl}(L)$ の絡み目でも簡単に計算できる, ここで我々素人ですら $m < 11$ や $\text{cl}(L) < 20$ なら易々とできた. 例えば, $\text{lk}(L) = 0$ かつ $c(L) < 9$ なる 2-成分絡み目 L に対し, 全て計算した. そのリストは, 表 1 である, ただし, ブラケットの略記として次の記号を使った:

$$\Upsilon := [[[\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(2)}], \lambda_3^{(1)}], \lambda_4^{(2)}] \in \Omega_5, \quad \Lambda := [[[[[\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(2)}], \lambda_3^{(1)}], \lambda_4^{(1)}], \lambda_5^{(1)}], \lambda_6^{(2)}] \in \Omega_7.$$

さらに, 我々は $\text{lk}(L) = 0$ かつ $c(L) = 9$ 交点でも全て計算してみた. しかし, 大概, Υ や Λ の定数倍であった. なので, $\text{lk}(L) = 0$ の 2 成分絡み目に対しては, Milnor 不変量の非自明初項は強くないようである.

最後に, ミルナー絡み目 L_m について, 証明抜きで紹介する (図 2 参照). k -番目の緯線 $\mathfrak{l}_k \in \pi_1(S^3 \setminus L_m)$ を, $\text{Ab}(\mathfrak{l}_k) = 0$ として取る.

定理 5.1. ミルナー絡み目 L_m のミルナー不変量の非自明初項 $\Upsilon_m \circ f_m(\mathfrak{l}_k)_{(1,m)}$ は, 次の形をしている.

$$(-1)^{m-k+1} [([[\dots [[\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(2)}], \lambda_3^{(3)}] \dots], \lambda_{k-1}^{(k-1)}]]], ([[\dots [[\lambda_k^{(m)}, \lambda_{k+1}^{(m-1)}], \lambda_{k+2}^{(m-2)}] \dots], \lambda_m^{(k+1)}]]].$$

今までのあった結果 [M2, HM] は $k = 1$ のみだったが, 我々は任意の k に拡張した.

Link	5_1^2	7_4^2	7_6^2	7_8^2	8_{10}^2	8_{12}^2	8_{13}^2	8_{15}^2
m	4	4	4	4	6	6	4	4
$\Psi_m(1)$	Υ	2Υ	Υ	Υ	Λ	Λ	Υ	Υ
$\Psi_m(2)$	$-\Upsilon$	-2Υ	$-\Upsilon$	$-\Upsilon$	$-\Lambda$	$-\Lambda$	$-\Upsilon$	$-\Upsilon$

表 1: 絡み目数 0 の絡み目に関する, Milnor 不変量の非自明初項.

6 高次の $\bar{\mu}$ -不変量の精密化.

$f_m(\ell) \neq 0$ の場合を考える. その際に, 原論文 [M1, M2] で Milnor は高次版を定義した. だが indeterminacy が強く, 定義も代数的だった. 本節では, その $\bar{\mu}$ -不変量を精密化し, 計算法を与える. これは困難 (V) にひとつの解決を与えたと, 言えよう.

まず精密化のアイデアを述べる. 鍵は Milnor [M2] ([Hil, §12] も参照) の結果である. 即ち, 絡み目群の h -次べき零商 $\pi_1(S^3 \setminus L)/\Gamma_h \pi_1(S^3 \setminus L)$ は次の表示を持つというものである:

$$\langle x_1, \dots, x_q \mid [x_j, w_j] = 1 \text{ for } j \leq q, \Gamma_h F \rangle, \quad (7)$$

ここで x_j と w_j は, それぞれ j -成分の経線と緯線を意味する (w_j は h に依存する). 従って, 自由群のべき零商 $F/\Gamma_h F$ からの全射をもつ. ここで同形 $F/\Gamma_h F \cong \text{Im} \Upsilon_h$ だったのだから, ある正規部分群 $\mathcal{N}_{h,L}$ をとってこれば, 群 (7) から $\text{Im} \Upsilon_h / \mathcal{N}_{h,L}$ への同形射 \bar{f}_h を得るはずである. さらに, 命題 2.1 によれば, 「 $w_j \in \Gamma_m F$ と, $[x_j, w_j] \in \Gamma_{m+1} F$ が同値」である. 従って, w_j ではなく, この $[x_j, w_j]$ を同形 \bar{f}_h たちの障碍のように思いたい. だから結論として, 高次不変量を $[x_j, w_j]$ として, $\text{Im} \Upsilon_h / \mathcal{N}_{h,L}$ の中で定義したい.

このアイデアに従い, h の帰納法で, 正規部分群 $\mathcal{N}_{h,L}$ と準同形

$$\bar{f}_h : \pi_1(S^3 \setminus L) \longrightarrow \text{Im}(\Upsilon_h) / \mathcal{N}_{h,L}$$

を定義しよう, ただし可換性 $\bar{f}_{h-1} = [p_{h-1}] \circ \bar{f}_h$ と $\bar{f}_h(\mathbf{m}_j) = [\Upsilon_h(x_j)]$ を満たすようにする. その際に, $\text{Im} \Upsilon_h$ の部分集合 K_h も定義する.

まず始めに, 仮定 \mathcal{A}_m の基で $h = m$ のとき, $\mathcal{N}_{m,L} = 0$ で $\bar{f}_m = f_m$ とする. そして, \bar{f}_h と $\mathcal{N}_{h,L}$ と K_h が定義できたとしよう. 射影 p_h の切断 $\mathfrak{s}_h : \text{Im}(\Upsilon_h) \rightarrow \text{Im}(\Upsilon_{h+1})$ を一つ固定する. (3) と同様に, 図 1 のアークたち α_k, β_k を考える. また $\langle \mathfrak{s}_h(K_h) \rangle \triangleleft \text{Im}(\Upsilon_{h+1})$ を, 部分集合 $\mathfrak{s}_h(K_h)$ で生成される正規閉包とする. 次に, $\mathcal{C}_h(\alpha_k)$ というものを, 商群 $\text{Im}(\Upsilon_{h+1}) / \langle \mathfrak{s}_h(K_h) \rangle$ に入るように, 定義しよう: まず, $\mathcal{C}_h(\alpha_1) = \Upsilon_{h+1}(x_j)$ とし, さらに, $1 < k \leq N_j$ に対しては, 代表元 $B_k \in \text{Im}(\Upsilon_{h+1})$ を $[p_h(B_k)] = \bar{f}_h(\beta_k)$ となるように選び, $\mathcal{C}_h(\alpha_{k+1})$ を $B_k^{-\epsilon_k} \cdot \mathcal{C}_h(\alpha_k) \cdot B_k^{\epsilon_k}$ として定義する. さらに, N_j -番目交点の差を, 次の公式で定義しよう:

$$\bar{\mu}_L^h(j) := \Upsilon_{m+1}(x_j)^{-1} \cdot B_{N_j}^{-\epsilon_{N_j}} \cdot \mathcal{C}_h(\alpha_{N_j}) \cdot B_{N_j}^{\epsilon_{N_j}} \in \text{Im}(\Upsilon_{h+1}) / \langle \mathfrak{s}_h(K_h) \rangle. \quad (8)$$

ここで, $\bar{\mu}_L^h(j)$ は中心的部分群 $\Upsilon_{h+1}(Q_{h+1}) / (\langle \mathfrak{s}_h(K_h) \rangle \cap \Upsilon_h(Q_h))$ に入っている (というのも $\bar{p}_h(\bar{\mu}_L^h(j)) = \bar{\mu}_L^{h-1}(j) = 0$ だから). すると, 念願の $\mathcal{N}_{h+1,L}$ の定義を, $\mathfrak{s}_h(K_h)$ とこの値ら $\bar{\mu}_L^h(1), \dots, \bar{\mu}_L^h(\#L)$ で正規的に生成される部分群とする. 即ち,

$$\mathcal{N}_{h+1,L} = \langle \mathfrak{s}_h(K_h), \bar{\mu}_L^h(1), \dots, \bar{\mu}_L^h(\#L) \rangle.$$

まとめると、系 4.2 と同様に、対応 C_h は準同形 $\bar{f}_{h+1} : \pi_1(S^3 \setminus L) \rightarrow \text{Im}(\Upsilon_{h+1})/\mathcal{N}_{h+1,L}$ を定め、次の可換図式を提供する:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \pi_1(S^3 \setminus L) & & & & & & \\
 \downarrow f_m & \searrow \bar{f}_{m+1} & \dots & \searrow \bar{f}_h & \searrow \bar{f}_{h+1} & & \\
 \text{Im}(\Upsilon_m) & \xleftarrow{p_m} & \text{Im}(\Upsilon_{m+1})/\mathcal{N}_{m+1,L} & \xleftarrow{\dots} & \text{Im}(\Upsilon_h)/\mathcal{N}_{h,L} & \xleftarrow{p_h} & \text{Im}(\Upsilon_{h+1})/\mathcal{N}_{h+1,L}.
 \end{array}$$

すると定理 4.1 を modulo $\mathcal{N}_{h,L}$ で考えることで、次を得る:

補題 6.1. 任意の $j \leq \#L$ に対し、この値 $\bar{\mu}_L^h(j)$ は $[\Upsilon_{h+1}, \mathfrak{s}_h(\bar{f}_h(l_j))]$ に等しい。

証明は、定理 4.1 と全く同じである。結論として、次で高次不変量を定義することが自然と思える:

定義 6.2. h -次 $\bar{\mu}$ -不変量を、 $\#L$ -tuple $(\bar{\mu}_L^h(1), \dots, \bar{\mu}_L^h(\#L))$ で定義する。

ここで、原論文の $\bar{\mu}$ -不変量との比較をしておこう。原論文の定義では、添え字列 I によって定義した上、さらに整数環 \mathbb{Z} の或るイデアル “ $\Delta(I)$ ” で定義された。その上、(シャッフル関係式のため)、不変量が非自明かどうか確かめにくかった。しかし、我々の $\bar{\mu}$ -不変量は、それより弱い群 $\mathcal{N}_{h,L}$ を可換環上 Ω_m で割って考えている、したがって、我々の不変量のほうが情報量が多いはずである。実際、オリジナルの不変量と対比して、我々の $\bar{\mu}$ -不変量は非自明であることが期待される。

最後に、我々の精密化に、ある種の普遍性を示せた (これは上定義が \mathfrak{s}_h の切断のとり方に、本質的によらないことを意味する)。

定理 6.3. 上記の準同形 \bar{f}_h は、次の群同形を与える:

$$\pi_1(S^3 \setminus L)/\Gamma_h \pi_1(S^3 \setminus L) \cong \text{Im} \Upsilon_h / \mathcal{N}_{h,L}.$$

証明. $h = m$ のときは、(7) の表示がまさにそうである。次に h まで正しいとしよう。すると \bar{f}_{h+1} は h 次べき零商 $\pi_1(S^3 \setminus L)/\Gamma_h \pi_1(S^3 \setminus L)$ 上の群中心拡大間の全射準同型である。しかし、補題 6.1 から $\bar{f}_{h+1}([x_j, w_j]) = \bar{\mu}_L^h(j)$ なので、 \bar{f}_{h+1} は群同型を与える。□

これにより、「我々の $\bar{\mu}$ -不変量は、べき零商の群表示 (7) から、あますことなく定量的に障碍を抽出した」と、我々は考えている。

7 高次 $\bar{\mu}$ -不変量の計算例

前節の定義から、 $\bar{\mu}$ -不変量をいくつか計算する。

計算の前に、(8) の群 $\mathcal{N}_{h,L} \cap \Upsilon_{h+1}(Q_{h+1})$ に関し、生成元を書き下した方がいいだろう (命題 7.1)。節 5.1 のブラケットを用い、中心 $\Upsilon_h(Q_h)$ の部分群 Δ_h を帰納的に定義する。始めに、 Δ_m を 0 とする。次に、もし $\Delta_m, \dots, \Delta_h$ を知っていたとき、 Δ_{h+1} を次の集合で生成されるアーベル群とする:

$$\{[d_k, \eta] \mid k \leq h, d_k \in \Delta_{k-1}, \eta \in \Upsilon_{m-k+1}(Q_{m-k+1})\} \cup \{[\bar{\mu}_L^{h-1}(\ell), \Upsilon_2(x_j)] \mid \ell \leq q, j \leq q\}.$$

すると $\text{Im} \Upsilon_h$ の右上三角性から、次の命題が容易にわかる ($\mathcal{N}_{h,L}$ の帰納的構成をたどればよい)

命題 7.1. (8) の分母にある群 $p_h^{-1}(\mathcal{N}_{h,L}) \cap \Upsilon_{h+1}(Q_{h+1})$ は Δ_h と一致する.

結果として, 群 $p_h^{-1}(\mathcal{N}_{h,L}) \cap \Upsilon_{h+1}(Q_{h+1})$ の有限個の生成元を見つけることは然程むずかしくない. その為, 高次 $\bar{\mu}$ -不変量が自明かどうかを判定するのに非常に役立つ.

実際, 証明抜きに例を挙げよう:

例 7.2. 絡み目 $5_1^2, 7_6^2, 7_8^2, 8_{13}^2$ に関して, 非自明初項は $m = 4$ で全て同じだった (表 1 参照). だから高次も気になる. しかし $h = 5$ では, $\bar{\mu}_L^5(j)$ が残念にも $\pm[[[\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(1)}], \lambda_3^{(1)}], \lambda_4^{(1)}], \lambda_5^{(2)}$ という同じ値をとる. (とはいっても, 長さ 5 のオリジナルの $\bar{\mu}$ -不変量はゼロである). 加えて, もし $h = 6, 7$ のときは, 長さ h のものはゼロである. もっと大きい交点で, 調べたが絡み目成分が 2 つのときは, ほとんど同様の現象で, 不変量として強くなさそうである.

対比的に, $\#L \geq 3$ の場合や, $\#L = 2$ かつ $\text{lk}(L) \geq 2$ の場合を考える. その場合は, どうやらそこそこ強い不変量である. 幾らか例示する.

例 7.3. L を Borromean 環 6_2^3 とする. 定理 5.1 より非自明初項 $\bar{\mu}_L^3(j)$ は $[[\lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j+1)}], \lambda_3^{(j+2)}]$ (ここで $j \in \mathbb{Z}/3$) だったので, 上記の群 Δ_4 は次となる:

$$\Delta_4 = \mathbb{Z}\langle [[[\lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j+1)}], \lambda_3^{(j+2)}], \lambda_4^{(k)}] \rangle_{j,k \in \mathbb{Z}/3}.$$

さらに, $h = 4$ のときは, 我々は次の値を計算した.

$$\bar{\mu}_L^4(j) \equiv [[[\lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j+1)}], \lambda_3^{(j+1)}], \lambda_4^{(j+2)}], \quad \text{modulo } \Delta_4.$$

従って, 次のステップである $h = 5$ を考えると, Δ_5 は次で張る:

$$\langle [[[\lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j+1)}], \lambda_3^{(j+2)}], \lambda_4^{(k)}, \lambda_5^{(\ell)}], [[[\lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j+1)}], \lambda_3^{(j+2)}], [\lambda_4^{(k)}, \lambda_5^{(\ell)}]], [\bar{\mu}_L^4(j), \lambda_5^{(k)}] \rangle_{j,k,\ell \in \mathbb{Z}/3}.$$

さらに, $h = 5$ で計算すると次の値だった:

$$\bar{\mu}_L^5(j) \equiv [[[\lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j+1)}], \lambda_3^{(j+1)}], \lambda_4^{(j+1)}, \lambda_5^{(j+2)}], \quad \text{modulo } \Delta_5.$$

だから, これは Δ_h with $k = 3, 4$ の記述によって, Δ_{k+1} で modulo してもこの値 $\bar{\mu}_L^{k+1}(j)$ は非零である. さらに, 経験則からすると, $\bar{\mu}_L^h(j)$ は h があがると, さらに複雑化しそうである.

さて次に, $c(L) < 11$ で非自明初項が Borromean 環と同じ値のものを研究した. その絡み目は $L' = 9_{n25}^3$ と $L'' = 10_{a151}^3$ しかない. そこで 4 次の不変量を計算すると次となった:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_{L'}^4(1) &\equiv [[[\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(3)}], \lambda_3^{(3)}, \lambda_4^{(1)}]] - [[[\lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(2)}], \lambda_3^{(2)}, \lambda_4^{(1)}]] - [[[\lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(1)}], \lambda_3^{(1)}, \lambda_4^{(3)}]], \\ \bar{\mu}_{L'}^4(2) &\equiv [[[\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(3)}], \lambda_3^{(3)}, \lambda_4^{(1)}]], \\ \bar{\mu}_{L'}^4(3) &\equiv [[[\lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(1)}], \lambda_3^{(1)}, \lambda_4^{(3)}]], \\ \bar{\mu}_{L''}^4(1) &\equiv [[[\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(3)}], \lambda_3^{(3)}, \lambda_4^{(1)}]] - [[[\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(2)}], \lambda_3^{(2)}, \lambda_4^{(1)}]], \\ \bar{\mu}_{L''}^4(2) &\equiv [[[\lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(1)}], \lambda_3^{(1)}, \lambda_4^{(1)} + \lambda_4^{(2)}]] - [[[\lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(2)}], \lambda_3^{(2)}, \lambda_4^{(3)}]], \\ \bar{\mu}_{L''}^4(3) &\equiv [[[\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(2)}], \lambda_3^{(2)}, \lambda_4^{(3)}]]. \end{aligned}$$

これにより, $\#L \geq 3$ では $\bar{\mu}$ -不変量が分別に役立ちそうと思われる. また言及したい事として, $L = 6_2^3$ と $L' = 9_{n25}^3$ との多変数 Alexander 多項式は等しい. 村杉氏 [Mu2] は当多項式と $\bar{\mu}$ -不変量の関係性を調べていたが, その関係はある範囲の制限があった. この例はその関係性と共通しない範囲の条件について示唆的である.

例 7.4. 次に, $\#L = 2$ の場合をみる. 今までのミルナー不変量の研究では, $\text{lk}(L) = 0$ を仮定することが多かった. というのも,

補題 7.5. $\#L = 2$ とする. L の全ての高次 $\bar{\mu}$ -不変量は, $\text{lk}(L) \in \mathbb{Z}$ 倍で消える.

証明. というのも, 非自明初項が $\text{lk}(L)[\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(2)}]$ という形である, 命題 7.1 によれば, 群 Δ_h with $h > 2$ は $\text{lk}(L) \in \mathbb{Z}$ 倍で消える; だから高次 $\bar{\mu}$ -不変量もそうなる.

しかしながら, 我々が期待することに, $\text{lk}(L) \geq 3$ の場合の高次不変量はそこそこ強いだろう. 例えば, $\#L = 2$ かつ $\text{lk}(L) = 3$ をとりあげる. 下記の表は, $c(L) \leq 9$ かつ $\text{lk}(L) = 3$ な絡み目全てである. その場合の高次不変量を一覧化した. 結論として, Δ_4 の記述から容易に確かめられる事に, 高次 $\bar{\mu}$ -不変量がそれらの絡み目全てを分別している.

Link L	$\bar{\mu}_L^3(j)$	$\bar{\mu}_L^4(j)$	Δ_5	$\bar{\mu}_L^5(1)$	$\bar{\mu}_L^5(2)$
6_1^2	0	$2b_1 + b_2 + b_3$	$\langle 3, B + D - F, A + C + E \rangle$	$-A - C$	$-A + C + D$
6_2^2	0	$2b_1 + b_2$	$\langle 3, B - E, A - C \rangle$	$D - F$	$B - F$
8_{a10}^2	0	$2b_1 + b_2 - b_3$	$\langle 3, B - D + F, A - C - E \rangle$	C	$-C$
8_{a11}^2	0	$2b_1 - b_2 + b_3$	$\langle 3, B + D - F, A + C + E \rangle$	$-C$	C
9_{a23}^2	0	$2b_1 + b_2 + b_3$	$\langle 3, B + D - F, A + C + E \rangle$	$-A + B + D$	$-A + C - D$
9_{a28}^2	0	$2b_1 + b_2$	$\langle 3, B - E, A - C \rangle$	$-D - F$	$-B - D - F$
9_{a32}^2	0	$2b_1 + b_2 + b_3$	$\langle 3, B + D - F, A + C + E \rangle$	$-A + C$	$A - C$
9_{a33}^2	0	$2b_1 + b_2 - b_3$	$\langle 3, B - D + F, A - C - E \rangle$	$-A + B + C$	$-A + B + C$
9_{n15}^2	0	$2b_1 + b_2 + b_3$	$\langle 3, B + D - F, A + C + E \rangle$	$-A - C + D$	$-A + C - D$
9_{n16}^2	0	$2b_1 + b_2 + b_3$	$\langle 3, B + D - F, A + C + E \rangle$	$-A - C + D$	$B - C + D$

ここで, $j \in \{1, 2\}$ であり, 表内の記号は次の値で定義した:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= [[[\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(2)}], \lambda_3^{(2)}], \lambda_4^{(2)}], & b_2 &= [[[\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(1)}], \lambda_3^{(1)}], \lambda_4^{(1)}], & b_3 &= [[[\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(2)}], \lambda_3^{(2)}], \lambda_4^{(1)}], \\
 A &= [[[[[\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(2)}], \lambda_3^{(2)}], \lambda_4^{(2)}], \lambda_5^{(2)}], & B &= [[[[[\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(2)}], \lambda_3^{(2)}], \lambda_4^{(2)}], \lambda_5^{(1)}], \\
 C &= [[[[[\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(1)}], \lambda_3^{(1)}], \lambda_4^{(1)}], \lambda_5^{(2)}], & D &= [[[[[\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(1)}], \lambda_3^{(1)}], \lambda_4^{(1)}], \lambda_5^{(1)}], \\
 E &= [[[[[\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(1)}], \lambda_3^{(1)}], \lambda_4^{(2)}], \lambda_5^{(2)}], & F &= [[[[[\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(2)}], \lambda_3^{(2)}], \lambda_4^{(1)}], \lambda_5^{(1)}].
 \end{aligned}$$

A 付録: オリジナルのマグナス展開との比較

これまでの $\bar{\mu}$ -不変量では, 非可換多項式環上のマグナス展開を使うことが殆どだった ([M1, IO, Hil] 参照). なので, それとべき単的な Υ_m との関係, この付録で明記しよう.

Υ_m の Taylor 展開を見る (補題 A.1). その為に, Fox 微分をおさらいしよう. つまり各 $k \in \{1, \dots, q\}$ に関して, 写像 $\frac{\partial}{\partial x_k} : F \rightarrow \mathbb{Z}[F]$ を次の性質により (一意的に) 定める:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \delta_{i,k}, \quad \frac{\partial(uv)}{\partial x_k} = \frac{\partial u}{\partial x_k} \varepsilon(v) + u \frac{\partial v}{\partial x_k}, \quad \text{for all } u, v \in F.$$

ここで, ε は添加写像 $\mathbb{Z}[F] \rightarrow \mathbb{Z}$ である. そして, 高次の微分を, $y \in F$ に対し,

$$\frac{\partial^n y}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_n}} \right)$$

と帰納的に定める. これを $D_{i_1 \dots i_n}(y)$ と略記しよう.

補題 A.1. 任意の元 $y \in F$ に対し, その値 $\Upsilon_m(y)$ は次でかける:

$$\begin{pmatrix} 1 & \sum_{k_1} \varepsilon(D_{k_1}(y)) \lambda_1^{(k_1)} & \sum_{k_1, k_2} \varepsilon(D_{k_1 k_2}(y)) \lambda_1^{(k_1)} \lambda_2^{(k_2)} & \cdots & * & \sum_{k_1, \dots, k_{m-1}} \varepsilon(D_{k_1 \dots k_{m-1}}(y)) \lambda_1^{(k_1)} \cdots \lambda_{m-1}^{(k_{m-1})} \\ 0 & 1 & \sum_{k_2} \varepsilon(D_{k_2}(y)) \lambda_2^{(k_2)} & \cdots & * & \sum_{k_2, \dots, k_{m-1}} \varepsilon(D_{k_2 \dots k_{m-1}}(y)) \lambda_2^{(k_2)} \cdots \lambda_{m-1}^{(k_{m-1})} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & * & \sum_{k_3, \dots, k_{m-1}} \varepsilon(D_{k_3 \dots k_{m-1}}(y)) \lambda_3^{(k_3)} \cdots \lambda_{m-1}^{(k_{m-1})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \sum_{k_{m-1}} \varepsilon(D_{k_{m-1}}(y)) \lambda_{m-1}^{(k_{m-1})} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ここで, 和の中の記号 k_s, k_{s+1}, \dots, k_t は, 直積 $\{1, 2, \dots, q\}^{t-s+1}$ を走る.

この補題は, y の長さの帰納法により, 難なく確かめられる. ちなみに, この補題により, $\Upsilon_m : F/\Gamma_m F \rightarrow GL_m(\Omega_m)$ の単射性が容易に示せる (cf. Taylor 展開).

次に, シャッフル関係式 (9) を, [CFL, §2] から復習する. 三つの列 $(c_1 c_2 \cdots c_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ と $I = a_1 a_2 \cdots a_{|I|}$ と $J = b_1 b_2 \cdots b_{|J|}$ を考える. この $(c_1 c_2 \cdots c_k)$ が列 I と J のシャッフルの結果であるとは, もし $|I|$ 個添え字 $\alpha(1), \alpha(2), \dots, \alpha(|I|)$ と $|J|$ 個添え字 $\beta(1), \beta(2), \dots, \beta(|J|)$ が存在し, 次の三つを満たすときをいう:

- (i) $1 \leq \alpha(1) < \alpha(2) < \cdots < \alpha(|I|) \leq k$, であり $1 \leq \beta(1) < \beta(2) < \cdots < \beta(|J|) \leq k$.
- (ii) 或る $i \in \{1, 2, \dots, |I|\}$ $j \in \{1, 2, \dots, |J|\}$ があって $c_{\alpha(i)} = a_i$ となり $c_{\beta(j)} = b_j$ となる.
- (iii) 各添え字 $s \in \{1, 2, \dots, k\}$ が, $\alpha(i)$ という形か, $\beta(j)$ という形か, 両方と一致する.

このような I と J のシャッフルの結果となる列の集合を, 記号 $\text{Sh}(I, J)$ で書く (なお, $\text{Sh}(I, J)$ は一般に非常に複雑である). すると, [CFL, Lemma 3.3] によれば, 任意の multi-indexes I と J , 任意の元 $y \in F$ に対して, 次のシャッフル関係式を満たす:

$$\varepsilon(D_I(y)) \cdot \varepsilon(D_J(y)) = \sum_{K \in \text{Sh}(I, J)} \varepsilon(D_K(y)) \in \mathbb{Z}. \quad (9)$$

さらに, (次数 m を無視した) Magnus 展開を復習する. $\mathbb{Z}\langle X_1, \dots, X_q \rangle$ を, 不定元 X_1, \dots, X_q による非可換多項式環として, \mathcal{J}_m を次数 $\geq m$ の多項式で生成される両側イデアルとする. すると, 自由群 F の Magnus 展開とは, 写像 $\mathcal{M} : F \rightarrow \mathbb{Z}\langle X_1, \dots, X_q \rangle / \mathcal{J}_m$ のことで, 次の等式で定義される:

$$\mathcal{M}(y) = \varepsilon(y) + \sum_{n: 0 \leq n < m} \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \{1, 2, \dots, q\}^n} \varepsilon(D_{i_1 \dots i_n}(y)) \cdot X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_n}. \quad (10)$$

よく知られる事に, \mathcal{M} は準同形であり, $\mathcal{M}(\Gamma_m F) = 0$ である. そして, この $\Gamma_m F$ で割った誘導射は単射である:

$$\mathcal{M} : F/\Gamma_m F \longrightarrow \mathbb{Z}\langle X_1, \dots, X_m \rangle / \mathcal{J}_m.$$

さらに, [CFL, Theorem 3.9] で示されたことに, この像は次式で完全に決定されている:

$$\left\{ \sum_{I=(i_1 \dots i_n)} a_I \cdot X_{i_1} \cdots X_{i_n} \mid \forall \text{ 添え字 } J \text{ and } K, \quad a_J \cdot a_K = \sum_{L \in \text{Sh}(J, K)} a_L \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (11)$$

従って, 補題 A.1 と比較すると, 対応 $1 + X_i \mapsto \Upsilon_m(x_i)$ は群同形 $\text{Im } \mathcal{M} \rightarrow \text{Im}(\Upsilon_m)$ を与える. 結論を纏めると, (11) にある集合によって, 像 $\text{Im}(\Upsilon_m)$ が $GL_m(\Omega_m)$ の部分群として完全に特徴付けられた.

B カンドルコサイクル不変量との関係.

ここではミルナー不変量に関して, 他の図的計算法を与える: 手法は [CEGS, §5] のカンドルコサイクル不変量である.

そのために, 下記の写像 (12) を用意する. 補題 A.1 により, $\text{Im}(\Upsilon_m)$ は厳密に明示された. ということ, 集合論的な切断 $\mathfrak{s} : \text{Im}(\Upsilon_m) \rightarrow \text{Im}(\Upsilon_{m+1})$ が具体的に得られる (ここで, \mathfrak{s} のとり方は, $(1, m+1)$ -成分による). すると, $\epsilon \in \{\pm 1\}$ に対し, 写像.

$$\phi_m^\epsilon : \text{Im}(\Upsilon_m) \times \text{Im}(\Upsilon_m) \longrightarrow GL_{m+1}(\Omega_{m+1}) \quad (12)$$

を切断 \mathfrak{s} と共役の“差”で定義する. 厳密には以下である:

$$\phi_m^\epsilon(A, B) = \begin{cases} \mathfrak{s}(B)^{-1}\mathfrak{s}(A)\mathfrak{s}(B)\mathfrak{s}(B^{-1}AB)^{-1}, & \text{if } \epsilon = 1, \\ \mathfrak{s}(B)\mathfrak{s}(A)\mathfrak{s}(B)^{-1}\mathfrak{s}(BAB^{-1})^{-1}, & \text{if } \epsilon = -1. \end{cases}$$

ここで, 合成 $p_m \circ \phi_m^\epsilon$ が項等射のため, ϕ_m^ϵ の像は中心 $\text{Ker}(p_m) = \Upsilon_{m+1}(Q_{m+1})$ に含まれる.

次に, 命題 B.1 を述べる. 絡み目図式 D と仮定 \mathcal{A}_m を想定する. 節 4 の様に, アーク達 α_k, β_k と, 符号 ϵ_k を, 図 1 の様にとる, すると, Wirtinger 表示から, f_m は写像 $\{\text{arc of } D\} \rightarrow \text{Im}(\Upsilon_m)$ とみなせるのだった. そこで, (12) を用い, 積

$$\Phi_{m,j}(k) := \prod_{t: 1 \leq t \leq k} \phi_m^{\epsilon_t}(f_m(\alpha_t), f_m(\beta_t)) \in \Upsilon_{m+1}(Q_{m+1}). \quad (13)$$

を考える. すると [CEGS] によれば, この $\Phi_{m,j}(k)$ はカンドルコサイクル不変量と呼ばれる.

命題 B.1 ([CEGS, §5] の一結果). この時, この $\Phi_{m,j}(k)$ は, (3) の $\Psi_m(j)$ と等しい.

ここで, 強調したい事は, Q_m の中心性から, 和公式が交点の順序によらない点 (緯線が非可換的な事の対比) と, この $\Phi_{m,j}(k)$ もミルナー不変量の図的計算法を与えている点である. しかしながら, メインの $\Psi_{m,j}(k)$ の計算スピードは, この $\Phi_{m,j}(k)$ より圧倒的に速い. この $\Phi_{m,j}(k)$ は実用的でないと思われる. ちなみに, 高次の $\bar{\mu}$ -不変量もカンドルコサイクル不変量で書き下せる (その記述は少々複雑だが ..).

参考文献

- [CEGS] J. S. Carter, J. S. Elhamdadi, M. Graña, M. Saito, *Cocycle knot invariants from quandle modules and generalized quandle homology*, Osaka J. Math. **42** (2005), 499–541.
- [CFL] K. T. Chen, R. H. Fox, R. C. Lyndon, *Free differential calculus IV, the quotient groups of the lower central series*, Ann. of Math. **68** (1958), 81–95.
- [GG] C. K. Gupta, N. D. Gupta, *Generalized Magnus embeddings and some applications*, Math. Z. **160** (1978), 75–87.
- [HM] K. Habiro, J.-B. Meilhan, *Finite type invariants and Milnor invariants for Brunnian links*, Int. J. Math. **19** (2008), 747–766.
- [Hil] J. Hillman, *Algebraic invariants of links*, Series on Knots and everything. **32** World Scientific (2012).
- [IO] K. Igusa, K. Orr, *Links, pictures and the homology of nilpotent groups*, Topology **40** (2001), 1125–1166.
- [KN] H. Kodani, T. Nosaka, *Milnor invariants via unipotent Magnus embeddings*, preprint.
- [M1] J. W. Milnor, *Link groups*, Ann. of Math. **59** (1954) 177–195.
- [M2] ———, *Isotopy of links*, in “Algebraic geometry and topology. A symposium in honor of S. Lefschetz”, 280–306, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957
- [Mu1] K. Murasugi, *Nilpotent coverings of links and Milnor’s invariant*, Low-dimensional topology, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **95**, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York (1985), 106–142.
- [Mu2] K. Murasugi, *On Milnor’s invariant for links*, Trans. Amer. Math. Soc. **124** (1966), 94–110.
- [St] D. Stein, *Computing Massey product invariants of links*, Topology and its Applications, **32** (1989), 169–181.