ザイフェルト手術への古典的不変量の応用

酒井　健　(日本大学)
門上　晃久（金沢大学）、円山　憲子（武蔵野美術大学）との共同研究 *1

概　　要

論文 [Kd, KMS1, KMS2] の要点を紹介し，関連する話題について述べる。

参考文献

[Kd] T. Kadokami, *Reidemeister torsion of Seifert fibered homology lens spaces and Dehn surgery*, Algebr. Geom. Topol., **7** (2007), 1509–1529.

[KMS1] T. Kadokami, N.Maruyama and T. Sakai, *Seifert surgery on knots via Reidemeister torsion and Casson-Walker-Lescop invariant*, Top. Appl., **188** (2015), 64–73.

[KMS2] T. Kadokami, N.Maruyama and T. Sakai, *Seifert surgery on knots via Reidemeister torsion and Casson-Walker-Lescop invariant II*, Osaka J. Math., **53** (2016), 767–773.

本稿では以下のように約束する。

- Σ : 多くの場合 $\mathbb{Z}$HS (integral homology 3-sphere).
- $K \subset \Sigma$: a null-homologous knot in Σ.

  Σ : $\mathbb{Z}$HS なら K は必ず null-homologous.
- $\Delta_K(t)$: the Alexander polynomial of K.
- $p, q \in \mathbb{Z}$, $p \geq 2$, $\gcd(p, q) = 1$.
- $M = \Sigma(K; p/q)$: the result of p/q-surgery on K.
- ζ_d : a primitive d-th root of unity.

$M = \Sigma(K; p/q)$ において、M が Seifert fibered space（以下 SFS と略記する）であるとき、その surgery は *Seifert surgery* という。Reidemeister torsion（以下 R-torsion と略記する）や Casson-Walker-Lescop invariant（以下 CWL invariant と略記する）を用いて Seifert surgery を研究するのが表向きの目的である。

$M = \Sigma(K; p/q)$ に対して、abelian R-torsion からは $p \geq 2$ と $\Delta_K(t)$ の情報が得られるが、Σ の情報は全く得られない。一方、CWL invariant からは p と q と Σ の情報が得られる。我々の真の目的は、これら不変量の補完関係を明らかにすることにある。さらなる目的は、R-torsion の可能性に踏み込む意図で、meta-abelian covering まで考えて、2 段階の abelian R-torsion を扱うことである。我々の 1 つ目の結果 [KMS1] は、上記不変量の補完関係を踏まえつつ、2 段階目の abelian R-torsion から q の情報が Diophantine equation の形で得られることから出発している。2 つ目の結果 [KMS2] は、CWL invariant の数値評価を洗練させたものから来ている。

本稿は酒井の下書きをもとに門上が表現を変えたり加筆をしつつ、記している。

*1 e-mail: `kadokami@se.kanazawa-u.ac.jp`

figure eight knot の Seifert surgery の一例に対してのみ不変量を計算しているだけのように見え、結果のまとめ方も手探り段階なのは我々も認める所である。しかし一例のみにとどまらない内容として読み取っていただきたいのが我々の希望である。将来、美しい一般論にすることを 1 つの問題として提起するのが本稿の目的である。

前頁で Seifert surgery 問題へのアプローチは表向きの目的とは書いたが、Seifert surgery に関する懸案の問題：[Kd] においては『singular fiber の本数問題』、[KMS1, KMS2] においては『surgery 係数の整数性問題』（いずれも 2 章を参照）の研究法の一例を提示していることにも注目していただきたい。

1. 論文 [Kd] について

定義 1.1 閉 3 次元多様体 M が *homology lens space* とは、M が向き付け可能で $\mathbb{Z}$-係数 $H_1(M)$ が有限巡回群であるときをいう。

S^3 内の knot に沿う Dehn surgery の結果は homology lens space で、逆に任意の homology lens space はある $\mathbb{Z}$HS 内の knot に沿う Dehn surgery で得られる。つまり、任意の homology lens space M に対して、$\mathbb{Z}$HS Σ とその中の knot K と有理数 p/q が存在して、$M = \Sigma(K; p/q)$ と表される。

定義 1.2 $M = \Sigma(K; p/q),\ d|p,\ d \geq 1$ のとき、M の *d-norm* $|M|_d$、*d-order* $\|M\|_d$ を次の式で定義する：

$$|M|_d = \left|\prod_{i \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times} \Delta_K(\zeta_d^i)\right| \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \qquad \|M\|_d = \prod_{d'|d} |M|_{d'} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

註 1.3 (1) $|M|_d$, $\|M\|_d$ の定義が M の表示によらない、つまり well-defined であることは門上の過去の論文中で示されている。

(2) $|M|_d$, $\|M\|_d$ の整数性はガロア理論から従い、$d \geq 3$ のとき $|M|_d$ の定義式中の絶対値は取り除いてもよく、しかも平方数である。

(3) $\widetilde{M}$ が M の universal abelian covering (p-fold cyclic covering) のとき、$\|M\|_p/|M|_1$ は $H_1(\widetilde{M})$ の位数。6 章 (1) も参照せよ。

門上は [Kd] において、abelian R-torsion および上の norm や order を使って次のことを示した。

定理 1.4 ([Kd, Theorem 1.4]) Σ, K, p, q は上の通りとして、さらに

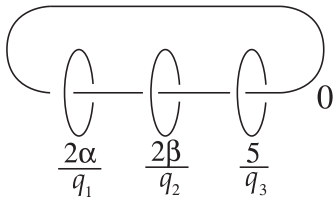
$$\Delta_K(t) = t^2 - 3t + 1$$

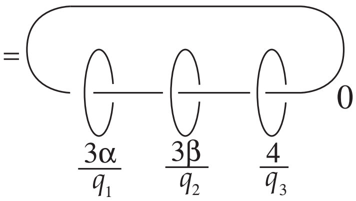
と仮定する。このとき、もしも $M = \Sigma(K; p/q)$ が S^2 を底空間とする SFS であって、singular fiber の本数 N が 3 以上であるならば、以下のことが成り立つ。

(1) $p = 2$ または 3（i.e. $\Sigma(K; p/q)$ $(p \geq 4)$ は SFS/S^2 ではない）.

(2) $N = 3$（i.e. singular fiber の本数は 3 である）.

(3) $M = \Sigma(K; p/q)$（(1) より $p = 2$ または 3）が SFS のとき、次の figure の形である。ただし、$p = 2$ のとき $\gcd(\alpha, \beta) = \gcd(\alpha, 5) = \gcd(\beta, 5) = 1$、$p = 3$ のとき $\gcd(\alpha, \beta) = \gcd(\alpha, 4) = \gcd(\beta, 4) = 1$.

$M = \Sigma(K\,;2/q) =$ 

$M = \Sigma(K\,;3/q) =$ 

2. 論文 [Kd] から論文 [KMS1, KMS2] へ

Seifert surgery に関する次の 2 つの予想について考えてみる。

予想 A Seifert surgery は、例外的な場合を除くと、integral surgery（i.e. $q = \pm 1$）である。

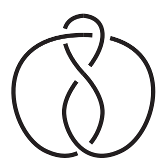
予想 B 多くの場合、Seifert surgery の結果として得られる SFS の singular fiber の本数は 3 である。

　定理 1.4 は予想 B に対して部分的な解答を与えている。この方向で定理 1.4 の拡張を試みるのは面白い問題ではないかと思われる。他方、定理 1.4 の結果を見ると、予想 A に関連して次のように考えるのは自然なことである。

定理 1.4 の $2/q$-surgery ($3/q$-surgery) の場合の integrality について、古典的な不変量を使ってもっと何か言えないだろうか。

ということで、次のことを「とりあえずの目標」にして共同研究がスタートした：

少なくとも、もともとの figure eight knot（以下の図）の場合について、$2/q$-surgery の integrality、つまり $2/q$-surgery が SFS になるのは $q = \pm 1$ のときに限ることが示せること。

$K =$  $\subset S^3$

3. 最初の手掛かり

最初の手掛かりは、これから述べる 3 つの observations だった。

(1) 次のようにおく。

$M = \Sigma(K; 2/q)$

Σ_2 : doubled branched covering of Σ branched over K

$\widetilde{K}$: lifted knot of K in Σ_2

X : universal abelian covering of M （$H_1(M) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ より $X \to M$ は 2-fold）

そうすると、$\widetilde{K}$ は Σ_2 において null-homologous であるから、次が成り立つ：

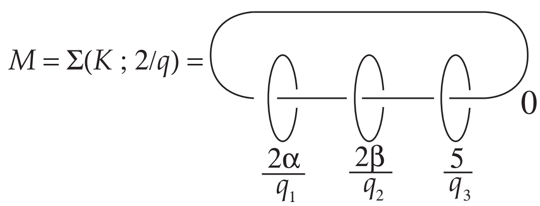
$$X = \Sigma_2(\widetilde{K}; 1/q), \qquad H_1(X) \cong H_1(\Sigma_2).$$

まとめておくと、$\boxed{\begin{array}{ccccl} \widetilde{K} \subset & \Sigma_2 & \rightsquigarrow & X & = \Sigma_2(\widetilde{K}; 1/q) \\ & \downarrow & & \downarrow & \qquad\qquad H_1(X) \cong H_1(\Sigma_2) \\ K \subset & \Sigma & \rightsquigarrow & M & = \Sigma(K; 2/q) \end{array}}$.

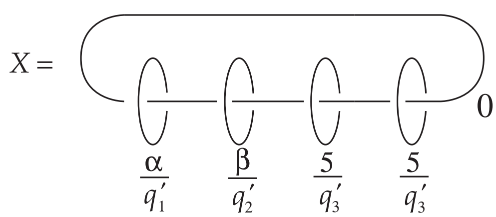
- ここまでのことは $\Delta_K(t)$ が何であっても成り立つ。
- 以下のことは $\Delta_K(t) = t^2 - 3t + 1$ のときのみに成り立つ。

さて、$\Delta_K(t) = t^2 - 3t + 1$ より $|\Delta_K(-1)| = 5$. よって $H_1(\Sigma_2) \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. これより、$|X|_5$ が定義されることがわかる。

(2)



より、



と置ける。よって、[Kd, Theorem 1.2 (3)] にある公式を使うと、$\boxed{|X|_5 = (\alpha\beta)^4}$.

(3) もともとの figure eight knot について、$|X|_5$ を計算してみると（[KMS1], 6 章 (2)）次のようになる：

$$\boxed{K \text{ が figure eight knot のとき、} |X|_5 = (5q^2 - 1)^2}.$$

4. 論文 [KMS1] へ

ここまではすんなり進行したが、このあとあまり進展せず 5 年経過した。そこで R-torsion に加えて CWL invariant を使うことにより [KMS1] にたどり着いた。

[KMS1] の結果は次の通り（ただし、$\lambda(X)$ は X の Lescop invariant）：

定理 4.1 ([KMS1])
(1) $\lambda(\Sigma) = 0$,

(2) $\Delta_K(t) = t^2 - 3t + 1$,

(3) $|q| \geq 3$,

(4) $\sqrt{|X|_5} \geq 4\{\lambda(X)\}^2 - 1$

ならば、$M = \Sigma(K; 2/q)$ は SFS でない。

[KMS1] のポイントを書いておくと：

- K が figure eight knot のとき、$\lambda(X) = -q$.
- $|s(q,p)| \le s(1,p)$ （Dedekind sum に関する Boyer-Lines の不等式）.
- $H_1(X)$ の位数 $= 25\alpha\beta e = 5$. ただし、$e = \dfrac{q_1}{\alpha} + \dfrac{q_2}{\beta} + \dfrac{q_3}{5} + \dfrac{q_3}{5}$.
- Lescop の公式 より、

$$\lambda(X) = (-2)\alpha\beta + \frac{25\beta}{24\alpha} + \frac{25\alpha}{24\beta} + \frac{1}{24\alpha\beta} - \frac{5}{8} - \frac{5}{2}S.$$

ただし、$S = s(q_1,\alpha) + s(q_2,\beta) + 2s(q_3,5)$.

5. 論文 [KMS2] へ

さらに、次の不等式が使えることが判明して、[KMS2] に至る：

命題 5.1 (円山)

$$|s(q,p)| < f(2,p).$$

ただし、p：even ≥ 8, $3 \le q \le p-3$, $\gcd(p,q) = 1$, $f(2,p) = \dfrac{(p-1)(p-5)}{24p}$.

[KMS2] の結果は次の通り：

定理 5.2 ([KMS2])

(1) $\lambda(\Sigma) = 0$,

(2) $\Delta_K(t) = t^2 - 3t + 1$,

(3) $|q| \ge 3$,

(4) $|X|_5 > 16q^4$

ならば、$M = \Sigma(K; 2/q)$ は SFS でない。

註 5.3 (1) 定理 5.2 (2) の条件は、$|\Delta_K(-1)| = 5$, $\nabla_K(z) = 1 + (-1)z^2 + (\text{higher})$（$\nabla_K(z)$ は K の Conway polynomial）なる条件に緩めることができる。

(2) K が $(2,5)$-torus knot のとき、$|\Delta_K(-1)| = 5$ であるが、$|X|_5 = 1$ であるので、(4) を満たさない。実際、K の $2/q$-surgery は SFS である。

6. これからの方向性について

ここでは [Kd, KMS1, KMS2] に続く研究の方向性として、次のことを提案したい：

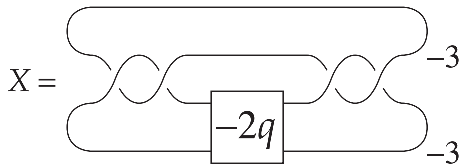
> 提案：$|X|_d$, $\|X\|_d$ を結び目の不変量として研究すること。

そのとき、次の 2 つのことが手掛かりになるのではないかと考えている。

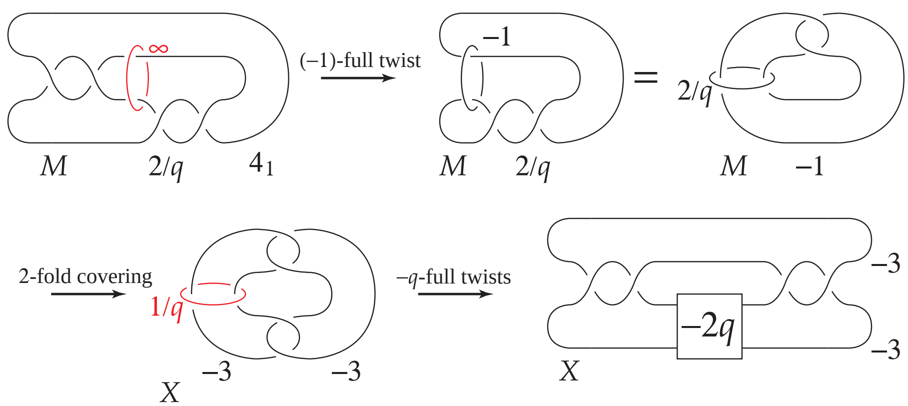
(1) $H_1(X) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ のとき、$\boxed{\|X\|_d/|X|_1 \text{ は } H_1(\widetilde{X}) \text{ の位数}}$。ただし、$\widetilde{X}$ は X の universal abelian covering である。なお、$d = |X|_1 = |\Delta_K(-1)|$ で、特にこれが素数のとき $\widetilde{X}$ は X の d-fold cyclic covering で、$\|X\|_d/|X|_1 = |X|_d$ である。

(2) K が figure eight knot のときの $|X|_5 = (5q^2 - 1)^2$ の計算の仕方。

X の framed link 表示（以下の図）を具体的に求め、Alexander polynomial を求めてから、R-torsion の surgery 公式を適用すると $|X|_5$ が求められる。以下の図で、長方形部分は $(-2q)$-half twists を表す。



X の framed link 表示は以下のように求められる。



7. 具体的な問題の提示

問題 7.1 定理 4.1、定理 5.2 の条件の妥当性を論ぜよ。

問題 7.2 結び目不変量としての $|X|_d$ は S-同値不変量か？(多分 No.)

問題 7.3 $|X|_d = 0$ つまり $H_1(\widetilde{X})$ が無限群になるような K の例はあるか？

問題 7.4 $|X|_d$ を q の関数と見なしたとき、$\varphi(d)$（の倍数）次多項式とならない K の例はあるか？($\varphi(\cdot)$ は Euler 関数)

問題 7.5 特に K が strongly invertible のときの $|X|_d$ の性質を調べよ。

問題 7.6 $|X|_d$ と他の不変量との関係を調べよ。

謝辞：講演の機会を与えていただいた主催者の方々に感謝致します。