

The space of short ropes and the classifying space of the space of long knots

森谷 駿二 (大阪府立大学)*¹

境 圭一 (信州大学)*²

概 要

J. Mostovoy は [7] において “short rope” の空間 \mathcal{R} の基本群が \mathbb{R}^3 内の long knot のイソトピー類のなすモノイドの群完備化に同型であることを示し、 \mathcal{R} は long knot の空間の分類空間であろう、と予想しました。本稿では [6] に基づき、その予想を肯定的に解決します。証明には、S. Galatius と O. Randal-Williams が [4] でコボルディズム圏のホモトピー型を研究したときに使った方法を利用します。

本稿で使う記号などは [6] に基づきます。講演発表時のものとは異なる場合があります。

1. Introduction

\mathbb{R}^n 内の long j -embedding とは、埋め込み $\mathbb{R}^j \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ で、 $[0, 1]^{xj}$ の外では標準的な包含写像に一致するようなものです。 \mathbb{R}^n 内の long j -embedding の集合に C^∞ 位相を入れた空間を $\text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n)$ と書きます。一般に埋め込みをイソトピーで分類することは、このような埋め込みの空間の π_0 を考えることに他なりません。結び目理論は埋め込み $S^1 \hookrightarrow S^3$ のイソトピーによる分類を扱いますが、これは long knot $\mathbb{R}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ のイソトピーによる分類を考えることと等価です：

事実 1.1. 1点コンパクト化 $\mathbb{R}^3 \rightarrow S^3$ は、モノイドの同型

$$\pi_0(\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)) \xrightarrow{\cong} \pi_0(\text{Emb}(S^1, S^3)) = \{\text{結び目のイソトピー類}\}$$

を導く。モノイド構造は連結和により導かれるものである。

Long embedding を考えることの利点の一つは、 $S^j \hookrightarrow S^n$ の場合は π_0 を取らないと連結和が定義されないのに対し、 $\text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n)$ は位相空間の時点で連結和が定義され、位相モノイドになることです。

$\text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n)$ の位相幾何的な性質は、次元の安定域 ($n \geq 2j+2$, もしくは $2n-3j-3 \geq 0$ かつ $j \geq 2$) では様々な方法で調べられ、 $\pi_*(\text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n)) \otimes \mathbb{Q}$ や $H^*(\text{Emb}(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}^n); \mathbb{Q})$ などは (原理的には計算できるという意味で) 比較的よくわかっています。しかし、この種の話題のそもそもの発端の一つであるはずの $\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)$ の場合には、次元の安定域で有効だったホモトピー論的な手法、あるいは Chern-Simons 摂動理論に基づく手法などがうまく働かず、高々 $\pi_0(\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3))$ の情報を得るにとどまっているケースが少な

本研究は科研費 (課題番号:26800037, JP25800038, JP16K05144) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 57R19 (primary), 55R35, 57M25 (secondary)

キーワード : long knots, short ropes, classifying spaces

*¹ 〒 599-8531 堺市中区学園町 1 番 1 号

e-mail: moriyasy@gmail.com

*² 〒 390-8621 長野県松本市旭 3-1-1

e-mail: ksakai@math.shinshu-u.ac.jp

くありません¹ (もちろん π_0 の情報も非常に重要です). $\pi_0(\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3))$ が可換な自由モノイドだが群ではないこと, つまり $\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)$ が群状でないことが事情を困難にしている, と言えるかもしれません. 群完備化 $\Omega B\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)$ を考えると, ホモトピー論的には状況が良くなる可能性があります. この観点から, 次に述べる J. Mostovoy の結果と, その結果から自然に生じる予想は大変に興味深いものです:

定理 1.2 ([7]). “Short rope” の空間 \mathcal{R} は $\pi_1(\mathcal{R}) \cong \widehat{\pi}_0(\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3))$ をみたす. 右辺は群完備化である.

予想 1.3 ([7]). \mathcal{R} は $\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)$ の分類空間 $B\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)$ であろう.

本稿の目標は, 予想 1.3 を肯定的に解決することです. ただし “short rope” の定義が, Mostovoy のものと本稿のものでは少しずれがあることは注意しておきます. このずれは, 空間 \mathcal{R} の弱ホモトピー型は変えませんが, 証明は以下のように進み, その随所で S. Galatius と O. Randal-Williams の [4] で用いられた概念, 技法を利用します:

- $B\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)$ が, 「水平部分」を持つ 1 次元多様体の空間 ψ_s と弱ホモトピー同値であることを示す. より詳しくは, 途中で補助的に半順序空間 $\mathcal{D}, \mathcal{D}^+$ (を位相圏とみたもの) を導入し, $B\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3) \sim B\mathcal{D}^{(\perp)} \sim \psi_s$ を示す.
- \mathcal{R} が, ある半順序空間 $\mathcal{E}, \mathcal{E}^+$ の分類空間と弱ホモトピー同値であることを示す.
- $B\mathcal{D}^{(\perp)}$ と $B\mathcal{E}^{(\perp)}$ を比較する.

予想 1.3 の解決はいろいろな応用を持ちそうですが, 例えば以下のようなことが知られており, $H_*(\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3))$ と $H_*(\Omega\mathcal{R})$ が密接に関わることになります:

定理 1.4 ([1]). 位相モノイド M について, $\pi_0(M)$ が環 $H_*(M)$ の中心に含まれるならば, 環の同型 $H_*(M)[\pi_0(M)^{-1}] \xrightarrow{\cong} H_*(\Omega BM)$ がある.

結び目理論の立場からは, 本研究の動機となった定理 1.2 の中身も重要と思われるので, その内容を述べておきます.

定義 1.5 ([7]). Rope とは, 埋め込み $r: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ で, $i = 0, 1$ に対し $r(i) = (i, 0, 0)$ となるもの. 長さが 3 未満の rope は **short rope** であるという. Short rope の集合に C^∞ 位相を入れた空間を B_2 と書く.

$r_0(t) := (t, 0, 0)$ で定義される rope r_0 を **tight rope** とよび, 以下 r_0 を B_2 の基点とする.

定義 1.5 の B_2 は [7] の記号で, 長さ $1 + 2$ 未満の rope 全体の集合, という意味です. 我々は後で, B_2 の元とは異なるものも short rope とよび, それらのなす空間を \mathcal{R} と書きます. 後で述べるように, 実は $B_2 \subset \mathcal{R}$ とみなしてよく, 包含写像は弱ホモトピー同値写像です. Mostovoy は実際には B_2 について定理 1.2 を示しました.

任意の $f \in \text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)$ に対し, $f|_{[0,1]}$ は rope です. この rope は, 以下の二つの方法で tight rope をイソトピーで変形することにより得られます:

- (1) $(0, 0, 0)$ のまわりで rope を「結んで」 f を得る (図 1.1 参照)
- (2) $(1, 0, 0)$ のまわりで rope を「結んで」 f を得る (図 1.1 と同様のイソトピーを $(1, 0, 0)$ 付近で行う)

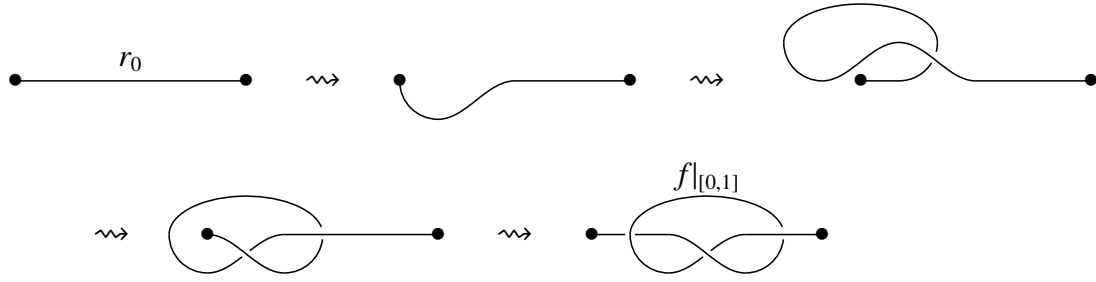


図 1.1: tight rope を結んで long knot (の一部) を得る

これらのイソトピーは、あらかじめ f を縮小しておくことにより、 B_2 の中で行うことができます。(1)のイソトピーと、(2)のイソトピーを逆方向にたどったイソトピーを続けると、 r_0 を基点とする B_2 のループを得ます。これはモノイドの単射 $\pi_0(\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)) \hookrightarrow \pi_1(B_2) \cong \widehat{\pi}_0(\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3))$ を与えています。

もう少し言うと、上のイソトピー(1),(2)は全ての $f \in \text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)$ に対し標準的に構成することができます。従って、自然な連続写像 $\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3) \rightarrow B_2$ は零ホモトピックで、その零ホモトピーが二種類あることになります。この二つの零ホモトピーをつなげることで、被約懸垂からの連続写像 $\widetilde{\Sigma}\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3) \rightarrow B_2$ を得ます。Mostovoy による定理 1.2 の証明は、実質的にこの写像が π_1 の同型を与えることを示しています。上の写像の随伴 $\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3) \rightarrow \Omega B_2$ は、群完備化への自然な写像 $\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3) \rightarrow \Omega B\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)$ に対応しています。

2. 準備

2.1. 記号

本稿では D^m は m 次元単位開円板を表します。閉円板は \overline{D}^m で表します。

$\mathbb{R}^1 \times D^2$ 内の多様体 M と、部分集合 $A \subset \mathbb{R}^1$ に対し

$$M|_A := M \cap (A \times D^2)$$

とおきます。 $A = \{T\}$ (一点集合) の場合、 $M|_T := M|_{\{T\}}$ と略記し、自然に $M|_T \in D^2$ とみなします。

定義 2.1. 1次元多様体 $M \subset \mathbb{R}^1 \times D^2$ は、 $\{T\} \times D^2$ とちょうど一点で横断的に交わる時、 T において横断的であるという。 M が T において横断的で、さらに $\epsilon > 0$ が存在して

$$M|_{(T-\epsilon, T+\epsilon)} = (T - \epsilon, T + \epsilon) \times M|_T$$

であるとき、 T において水平であるという。

2.2. 圏の分類空間

(位相) 小圏 \mathcal{C} の脈体 (nerve) とは、 \mathcal{C} の合成可能な l 個の射の集合 $N_l \mathcal{C} := \{(x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_l} x_l)\}$ からなる単体的空間 (simplicial space) $N_* \mathcal{C} = \{N_l \mathcal{C}\}_{l \geq 0}$ です。ただし $N_0 \mathcal{C} := \text{Ob}(\mathcal{C})$ です。単体的空間と言ったのは、面作用素 (face map) $d_i : N_l \mathcal{C} \rightarrow N_{l-1} \mathcal{C}$

¹ その中でも [2, 3] などは成功例と言えると思います。これらにより $H_*(\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3))$ は (原理的には) 決定できます。

$(0 \leq i \leq l),$

$$d_i(f_1, \dots, f_l) := \begin{cases} (f_2, \dots, f_l) & i = 0, \\ (f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1} \circ f_i, f_{i+2}, \dots, f_l) & 1 \leq i \leq l-1, \\ (f_1, \dots, f_{l-1}) & i = l, \end{cases}$$

退化作用素 (degeneracy map) $s_i : N_l \mathcal{C} \rightarrow N_{l+1} \mathcal{C}$ ($0 \leq i \leq l$),

$$s_i(f_1, \dots, f_l) := (f_1, \dots, f_i, \text{id}, f_{i+1}, \dots, f_l)$$

が定義され, ある関係式 (例えば [5, (1.3)] を見よ) をみたすことを指します². 位相圏 \mathcal{C} の場合は, $N_l \mathcal{C}$ は射の空間の l 回直積空間の部分空間として位相を入れます. 圏 \mathcal{C} の分類空間 $B\mathcal{C}$ とは, $N_* \mathcal{C}$ の幾何学的実現 (geometric realization)³

$$B\mathcal{C} := |N_* \mathcal{C}| := \left(\bigsqcup_{l \geq 0} (N_l \mathcal{C} \times \Delta^l) \right) / \sim$$

のことで, ただし $\Delta^l := \{(\lambda_0, \dots, \lambda_l) \in [0, 1]^{l+1} \mid \sum_i \lambda_i = 1\}$ は標準 l 単体です. $\Delta^\bullet := \{\Delta^l\}_{l \geq 0}$ は余単体的空間 (単体的空間の双対, [5] を見よ) をなすことに注意しておきます. 同値関係 \sim は,

$$N_{l+1} \mathcal{C} \ni (s_i f, \lambda) \sim (f, s^i \lambda) \in N_l \mathcal{C}, \quad N_{l-1} \mathcal{C} \ni (d_i f, \lambda) \sim (f, d^i \lambda) \in N_l \mathcal{C} \quad (2.1)$$

により定義されます. ただし s^i, d^i は余単体的空間 Δ^\bullet の構造射で, s_i, d_i の双対にあたるものです.

注意 2.2. 一般に群 (またはモノイド) G は, $\text{Ob}(\mathcal{G}) = \{*\}, \text{Map}_{\mathcal{G}}(*, *) = G$ となる圏 \mathcal{G} と同一視されます. このとき $B\mathcal{G}$ はよく知られた群 (やモノイド) の分類空間 BG の定義に一致します.

単体的集合 A_*, B_* について, 面作用素ならびに退化作用素と可換であるような $f_k : A_k \rightarrow B_k$ が各 $k \geq 0$ に対し定まっているとき, $f_* = \{f_k\}_k$ を単体的写像 (simplicial map) とよびます. 単体的写像は幾何学的実現の間の写像 $|f_*| : |A_*| \rightarrow |B_*|$ を導きます. これに関して, 次の性質を後で用います. 詳細は [8] をご覧ください.

定義 2.3 ([8, Definition A.4]). A_* が良い (good) 単体的空間であるとは, 各 l と $0 \leq i \leq l$ に対し $s_i A_l \hookrightarrow A_{l+1}$ が閉コファイブレーションであること.

補題 2.4 ([8, Proposition A.1]). A_*, B_* を良い単体的空間とし, 各次数 l において $f_l : A_l \rightarrow B_l$ がホモトピー同値であるような単体的写像 $f_* : A_* \rightarrow B_*$ が与えられたとする. このとき f は幾何学的実現の間のホモトピー同値 $|f_*| : |A_*| \xrightarrow{\cong} |B_*|$ を誘導する.

3. Long knot のなす位相圏

定義 3.1. ψ を, $\mathbb{R} \times D^2$ 内の 1 次元部分多様体 M で次をみたすものの集合とします (図 3.1 を参照のこと):

- M は $\mathbb{R}^1 \times D^2$ の閉集合で $\partial M = \emptyset$.

² 単体的集合は, 位相空間 X の特異単体の集合 $S_*(X)$ をモデルとして定義されるものです.

³ 幾何学的実現は, $S_*(X)$ の場合は弱同値 $|S_*(X)| \sim X$ を与えるようなものです.

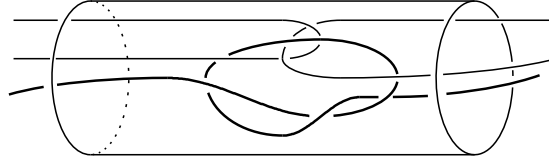


図 3.1: ψ の元 (long な連結成分は太線で表されている)

- M の連結成分 M_0 で, 全ての $t \in \mathbb{R}^1$ に対し $M_{0|t} \neq \emptyset$ であるようなものがちょうど一つ存在する (このような連結成分は **long** であるという).
- M_0 以外の連結成分は (存在すれば) 「片側にだけ」 long である, つまり, ある $T \in \mathbb{R}$ が存在して, $s \leq T$ に対しては常に $M_{1|s} \neq \emptyset$ だが $M_{1|(T,\infty)} = \emptyset$ である (左側に long である), または, ある $T \in \mathbb{R}$ が存在して, $s \geq T$ に対しては常に $M_{1|s} \neq \emptyset$ だが $M_{1|(-\infty,T)} = \emptyset$ である (右側に long である), のいずれか一方が成り立つ.

ψ は $\Psi_1(\mathbb{R}^1 \times D^2)$ [4, §2.1] の部分空間として位相空間とみなす.

注意 3.2. [4, §2.1] の位相の定義は自然なものですが, 複雑なのでここでは繰り返せません. 大雑把には, 「コンパクト集合の中で近い $M, N \in \psi$ は近いとみなす」ような位相です. もう少し詳しく言うと, $M \in \psi$ の開基は次のような多様体 N の集合です: あるコンパクト集合と N の共通部分は, M を小さい法ベクトル場に沿ってずらして得られる.

この位相の入れ方から次のようなことがわかります: 多様体の族 $M(t) \in \psi$ ($0 \leq t < 1$) が $M(t)|_{[-t/(1-t), t/(1-t)]} = [-t/(1-t), t/(1-t)] \times \{0\}$ をみたすとすると, この族は $t \rightarrow 1$ のとき自明な long knot $\mathbb{R}^1 \times \{0\} \in \psi$ に収束します. [4, Example 2.2] もご覧ください.

定義 3.3. Long knot のなす位相圏 \mathcal{K} を以下のように定義する. \mathcal{K} の対象の全体は $\text{Ob}(\mathcal{K}) = D^2$ に通常の位相を入れたもの. $p, q \in D^2$ に対し, p から q への恒等射でない射は, $T > 0$ と $M \in \psi$ の組 (T, M) で, M は p と q をつなぐ long knot, つまり連結な 1 次元多様体で (従って定義 3.1 により long である), ある $\epsilon > 0$ が存在して $t \in (-\infty, \epsilon) \cup (T - \epsilon, \infty)$ において水平であるものとする:

$$M|_{(-\infty, \epsilon)} = (-\infty, \epsilon) \times \{p\}, \quad M|_{(T - \epsilon, \infty)} = (T - \epsilon, \infty) \times \{q\}.$$

恒等射 $\text{id} : p \rightarrow p$ は組 $(0, \mathbb{R}^1 \times \{p\})$ で与えられるものとする. 全ての射のなす集合 $\bigcup_{p, q} \text{Map}_{\mathcal{K}}(p, q)$ には, $(\{0\} \sqcup \mathbb{R}_{>0}) \times \psi$ の部分空間としての位相を入れる. ただし $\{0\} \sqcup \mathbb{R}_{>0}$ は位相和を表す. 射の合成 $\circ : \text{Map}_{\mathcal{K}}(q, r) \times \text{Map}_{\mathcal{K}}(p, q) \rightarrow \text{Map}_{\mathcal{K}}(p, r)$ は連結和

$$(T', M') \circ (T, M) := (T + T', M|_{(-\infty, T_0]} \cup (M'|_{[0, \infty)} + T e_1))$$

で定義する. ただし $e_1 = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ とし, $+T e_1$ は第 1 座標方向へ T だけ平行移動することを表す.

上の圏 \mathcal{K} の定義において, 対象は一点集合ではありませんが, 一点とホモトピー同値になっています. この意味で, 圏 \mathcal{K} は位相モノイド $\text{Emb}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3)$ を注意 2.2 よりも緩い方法で圏とみなしたものになっています. 射の集合の位相は, 恒等射が他の射から分離されたようなものになっています. これにより, 脈体が良い単体的空間 (定義 2.3) であることの証明が簡略化されます. 合成可能な二つの射 $(T, M) \in \text{Map}_{\mathcal{K}}(p, q)$ と

$(T', M') \in \text{Map}_{\mathcal{K}}(q, r)$ の組を, その合成 (すなわち連結和) と同一視することにより, 一般に $N_l \mathcal{K}$ ($l \geq 1$) は

$$N_l \mathcal{K} = \{(0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_l; M) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{\times l} \times \psi \mid M \text{ は } T_i \text{ において水平な long knot}\}$$

とみることができます. ただし位相は $(\{0\} \sqcup \mathbb{R}_{>0})^{\times l} \times \psi$ の部分空間としての位相, つまり $T_i = T_{i+1}$ となる i (恒等射) を含む組が他と分離されるようなものです.

この章では, ある部分集合 $\psi_s \subset \psi$ を後で定義し, $B\mathcal{K}$ が ψ_s と弱ホモトピー同値であることを示します. そのために, 補助的に次のような半順序集合 (partially ordered set, poset) を導入します.

定義 3.4. 位相空間 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \psi$ を

$$\mathcal{D} := \{(T, M) \in \mathbb{R} \times \psi \mid M \text{ は } T \text{ において横断的}\}$$

と定義する. \mathcal{D} 上の半順序は, $(T, M) \leq (T', M')$ であるのは $M = M'$ かつ $T \leq T'$ のときである, と定義する.

\mathcal{D} は, 対象の集合が \mathcal{D} , 射の集合 $\text{Map}_{\mathcal{D}}(x, y)$ は $x \leq y$ のとき一点集合, そうでないときは空集合となるような圏とみなす⁴. 射全体の集合は $(\Delta \sqcup (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \Delta)) \times \psi$ の部分空間とみて位相を入れる. ただし $\Delta := \{(x, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ は対角集合.

部分集合 $\mathcal{D}^+ \subset \mathcal{D}$ は, M が T において水平であるような組 (T, M) からなるものと定義する.

注意 3.5. $(T, M) \in \mathcal{D}$ について, M は連結でなくても構いませんが, \mathcal{D} の定義により, M の連結成分で片側にだけ long であるようなものは互いに「分離」されます. すなわち, 左に long な成分は $(-\infty, T) \times D^2$ に, 右に long な成分は $(T, \infty) \times D^2$ に含まれます.

$\text{Map}_{\mathcal{D}(\Delta)}$ の位相の入れ方も, $\text{id}_x \in \text{Map}_{\mathcal{D}(\Delta)}(x, x)$ が恒等射でない射とは分離されたようなものになっています.

圏 $\mathcal{D}^{(\Delta)}$ の射は, 順序対 $(T, M) \leq (T', M)$ に対しちょうど一つ定まりますから,

$$\text{Map}_{\mathcal{D}(\Delta)} = \{(T \leq T'; M) \mid M \in \psi \text{ は } T, T' \text{ で横断的 (水平)}\}$$

とみることができます. ただし位相は, $T = T'$ のとき (恒等射) は分離されるように定まっています. 一般に, $l \geq 0$ に対し

$$N_l \mathcal{D}^{(\Delta)} = \{(T_0 \leq \dots \leq T_l; M) \mid M \in \psi \text{ は } T_0, \dots, T_l \text{ で横断的 (水平)}\}$$

です. $T_i = T_{i+1}$ となる i があるような組は分離されるような位相が入っています.

補題 3.6. 脈体 $N_* \mathcal{K}, N_* \mathcal{D}, N_* \mathcal{D}^+$ はいずれも良い単体的空間 (定義 2.3) である.

証明. $\text{Map}_{\mathcal{K}}$ の位相の入れ方により, 各 $0 \leq i \leq l$ に対し, $s_i N_l \mathcal{K} = \{(0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_{l+1}; M) \mid T_i = T_{i+1}\} \subset N_{l+1} \mathcal{K}$ (ただし $T_0 := 0$ とする) は恒等射を含む列からなる連結成分の和集合になります. よって $(N_{l+1} \mathcal{K}, s_i N_l \mathcal{K})$ はホモトピー拡張性質を持ちます. $N_* \mathcal{D}$ と $N_* \mathcal{D}^+$ についても同様です. \square

⁴一般に半順序集合は同様の方法で圏とみなせます

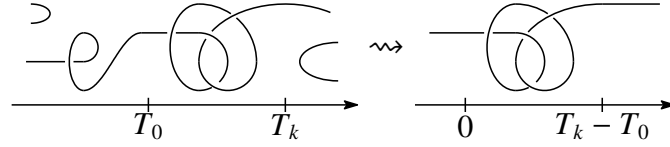


図 3.2: Cut-off と long-extension

命題 3.7. 各次数でホモトピー同値であるような単体的写像の列 $N_*\mathcal{K} \leftarrow N_*\mathcal{D}^\perp \rightarrow N_*\mathcal{D}$ が存在する. 従ってホモトピー同値の列 $B\mathcal{K} \xleftarrow{\cong} B\mathcal{D}^\perp \xrightarrow{\cong} B\mathcal{D}$ が得られる.

証明. 証明は [4, Theorem 3.9] のものと同様です. まず, 各 $(T_0 \leq \dots \leq T_l; M) \in N_l\mathcal{D}$ に対し, M が各 T_i で水平になるように標準的に変形できること [4, Lemma 3.4] により, 包含写像が導く $N_*\mathcal{D}^\perp \rightarrow N_*\mathcal{D}$ は各次数でホモトピー同値になります.

関手 $F: \mathcal{D}^\perp \rightarrow \mathcal{K}$ を, 対象に対しては $(T, M) \mapsto M|_T$ で, 射に対しては

$$F(T_0 \leq \dots \leq T_l; M) := (0 \leq T_1 - T_0 \leq \dots \leq T_l - T_0; \overline{M|_{[T_0, T_l]} - T_0 e_1}),$$

で定義します. ここで

$$\overline{M|_{[T_0, T_l]}} := ((-\infty, T_0] \times M|_{T_0}) \cup M|_{[T_0, T_l]} \cup ([T_l, \infty) \times M|_{T_l}) \quad (3.1)$$

です (図 3.2 参照). $\overline{M|_{[T_0, T_l]}}$ を $M|_{[T_0, T_l]}$ の **long-extension** とよぶことにします (これは [4, §3.2] の $(\varphi_\infty(T_0, T_l) \times \text{id})^{-1}(M)$ と同一のもので). 注意 3.5 で述べたことから, $M|_{[T_0, T_l]}$ は M の long な連結成分の連結な部分集合で, その long-extension も連結です. $F: N_*\mathcal{D}^\perp \rightarrow N_*\mathcal{K}$ は単体的写像になっています.

写像 $G: N_*\mathcal{K} \rightarrow N_*\mathcal{D}^\perp$ を, 次数 0 においては $G(p) := (0, \mathbb{R}^1 \times \{p\})$ で, 正の次数においては自然な包含写像で定義します. このとき $T_0 := 0$ とみなします. これは次数 0, 1 のところで単体的写像にはなっていませんが, 各次数で F のホモトピー逆写像になることが次のようにしてわかります: まず $F \circ G$ は恒等写像です. $G \circ F$ は

$$G \circ F(T_0 \leq \dots \leq T_l; M) = (0 \leq T_1 - T_0 \leq \dots \leq T_l - T_0; \overline{M_0|_{[T_0, T_l]}}) \quad (3.2)$$

で与えられますが, これは次のホモトピー h_s により恒等写像とホモトピックです (図 3.3 参照):

$$h_s(T_0 \leq \dots \leq T_l; M) := ((1-s)T_0 \leq T_1 - sT_0 \leq \dots \leq T_l - sT_0; \\ (M|_{(-\infty, T_0]} - \frac{s}{1-s} e_1) \cup \overline{M|_{[T_0, T_l]}|_{[T_0-s/(1-s), T_l+s/(1-s)]}} \cup (M|_{[T_l, \infty)} + \frac{s}{1-s} e_1) - sT_0 e_1)$$

ホモトピー h_s は, M の T_0, T_l 付近の「水平部分」 $M|_{(T_0-\epsilon, T_0]}$ と $M|_{[T_l, T_l+\epsilon)}$ をそれぞれ左と右に「伸ばし」, $M|_{(-\infty, T_0]}$ と $M|_{[T_l, \infty)}$ (すべての「片側だけ long」な連結成分はこれらに含まれる) を無限遠に「押しやった」上で, 全体を $-T_0$ だけ平行移動するものです. $h_0 = \text{id}$ で, h_1 は (3.2) の $G \circ F$ に一致します. 実際, 注意 3.2 で述べた ψ への位相の入れ方から, $M|_{(-\infty, T_0]}$ と $M|_{[T_l, \infty)}$ は $s = 1$ のとき無限遠で「消えます」.

以上のことと補題 3.6, 補題 2.4 より, $F: N_*\mathcal{D}^\perp \rightarrow N_*\mathcal{K}$ はホモトピー同値 $B\mathcal{D}^\perp \xrightarrow{\cong} B\mathcal{K}$ を導きます. \square

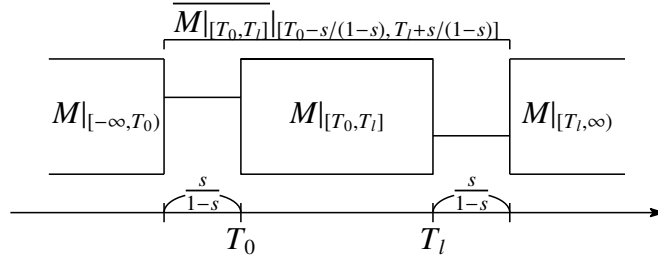


図 3.3: 命題 3.7 の証明中のホモトピー h_s

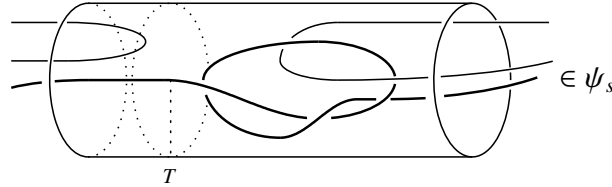


図 3.4: ψ_s の元 (long な連結成分は太線で表されている)

定義 3.8. ψ の部分空間 ψ_s を, $\psi_s = \{M \in \psi \mid \text{ある } T \text{ が存在し, } M \text{ は } T \text{ において横断的}\}$ と定義する (図 3.4 参照).

$M \in \psi_s$ とすると, M の連結成分で, 片側にだけ long なものは「分離」されます. すなわち, ある $T \in \mathbb{R}$ に対し, M の連結成分で「左に long」なものは $(-\infty, T) \times D^2$ に, 「右に long」なものは $(T, \infty) \times D^2$ に, それぞれ含まれます.

\mathcal{D} の脈体の元 $((T_0 \leq \dots \leq T_l; M), (\lambda_0, \dots, \lambda_l)) \in N_l \mathcal{D}$ を, [4] の記法に従い, 形式和 $\sum_{0 \leq i \leq l} \lambda_i T_i$ の形で書きます. これは単体的空間の面作用素, 退化作用素と次の意味で協調します. 例えば $1 \leq i \leq l-1$ のとき

$$\begin{aligned} (d^i(T_0 \leq \dots \leq T_l; M), (\lambda_0, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_l)) \\ = ((T_0 \leq \dots \leq T_{i-1} \leq T_{i+1} \leq \dots \leq T_l; M), (\lambda_0, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_l)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((T_0 \leq \dots \leq T_l; M), s_i(\lambda_0, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_l)) \\ = ((T_0 \leq \dots \leq T_l; M), (\lambda_0, \dots, \lambda_{i-1}, 0, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_l)) \end{aligned}$$

はどちらも $\sum_{0 \leq j \leq l; j \neq i} \lambda_j T_j$ で表され, これらは $B\mathcal{D}$ において同じ元を表します.

定理 3.9. 忘却写像 $N_l \mathcal{D} \rightarrow \psi_s$, $\sum_i \lambda_i T_i \mapsto M$ は弱ホモトピー同値 $u: B\mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \psi_s$ を誘導する. よって $B\mathcal{K} \sim \psi_s$.

証明. 証明は [4, Theorem 3.10] のものと同様です. 次の実線の可換図式が与えられたとき, 点線の写像 g で図式を可換にするものの存在を示します:

$$\begin{array}{ccc} \partial \overline{D}^m & \xrightarrow{f} & B\mathcal{D} \\ \downarrow & \searrow g & \downarrow u \\ \overline{D}^m & \xrightarrow{f} & \psi_s \end{array}$$

これにより相対ホモトピー群 $\pi_m(\psi_s, B\mathcal{D})$ (ただし ψ_s は u の写像柱) がすべての m に対し消え, u が各次数でホモトピー群の同型を導くことが示されます.

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し

$$U_a := \{x \in \overline{D}^m \mid f(x) \in \psi \text{ は } a \text{ において横断的}\} \subset \overline{D}^m$$

とおきます. $U_a \subset \overline{D}^m$ は開集合で, 任意の $M \in \psi_s$ に対し上のような a が存在することから, $\{U_a\}_{a \in \mathbb{R}}$ は \overline{D}^m の開被覆です. コンパクト性により, 有限個の $a_1 < \dots < a_k$ で, $\{U_{a_i}\}_{1 \leq i \leq k}$ が \overline{D}^m を覆うようなものを取れます. この有限部分被覆に付随する 1 の分割 $\{\lambda_i : \overline{D}^m \rightarrow [0, 1]\}_{1 \leq i \leq k}$ を取ります. この λ_i を係数とするような a_i の形式和を取ることに
より, 写像

$$\hat{g} : \overline{D}^m \rightarrow B\mathcal{D}, \quad \hat{g}(x) := \sum_{0 \leq i \leq k} \lambda_i(x) a_i$$

を得ます. 定義より \hat{g} は f の持ち上げ, すなわち $u \circ \hat{g} = f$ です. \hat{g} は上の図式の左上の三角形を可換にしないかもしれませんが, もしホモトピー $h : [0, 1] \times \partial \overline{D}^m \rightarrow B\mathcal{D}$ で

- $h(0, -) = \hat{g}|_{\partial \overline{D}^m}(-)$,
- $h(1, -) = \hat{f}(-)$,
- $h(s, -)$ はすべての $s \in [0, 1]$ に対し $f|_{\partial \overline{D}^m}$ の持ち上げ

をみたすものを取れば, 求める g を

$$g(x) := \begin{cases} \hat{g}(2x) & |x| \leq 1/2, \\ h(2|x| - 1, x/|x|) & |x| \geq 1/2. \end{cases}$$

で定義することができます. 以下, このような h を構成します.

\hat{f} も $f|_{\partial \overline{D}^m}$ の持ち上げなので, $\sum_i \mu_i(x) = 1$ をみたすようなある $\mu_0, \dots, \mu_l \geq 0$ と, ある $b_0 < \dots < b_l$ を使って

$$\hat{f}(x) = \sum_{0 \leq i \leq l} \mu_i(x) b_i$$

と表せます (多様体 M は \hat{f} と f で共通です). $c_0 < \dots < c_n$ を, $\{a_i\}_i \cup \{b_j\}_j$ を小さい順に並べ直して得られる数列とします. 関係式 (2.1) を繰り返し使って, $\hat{g}|_{\partial \overline{D}^m}$ と \hat{f} を次のように書き換えられます:

$$\begin{aligned} \hat{g}|_{\partial \overline{D}^m}(x) &= \sum_{0 \leq i \leq n} \alpha_i(x) c_i, \quad \text{ただし } \alpha_0, \dots, \alpha_n \geq 0, \quad \sum_i \alpha_i = 1, \\ \hat{f}(x) &= \sum_{0 \leq i \leq n} \beta_i(x) c_i, \quad \text{ただし } \beta_0, \dots, \beta_n \geq 0, \quad \sum_i \beta_i = 1. \end{aligned}$$

ホモトピー h は, この表記と u のファイバーのアフライン構造を使って

$$h(s, x) := s \hat{g}|_{\partial \overline{D}^m}(x) + (1 - s) \hat{f}(x) := \sum_{0 \leq i \leq n} (s \alpha_i(x) + (1 - s) \beta_i(x)) c_i$$

で定義することができます. □

4. Short rope の空間

この章では、 ψ_s が **short rope** の空間とも弱ホモトピー同値であることを示します。系として、 $B\mathcal{K}$ が **short rope** の空間と弱ホモトピー同値であることがわかります。ただし“(short) rope”の意味には少し注意が必要です。

定義 4.1 ([7]). **Rope** とは、コンパクトで連結な 1 次元部分多様体 $r \subset \mathbb{R}^1 \times D^2$ で、空でない境界 $\partial r = \{r_0, r_1\}$ をもち、 $r_i \in \{i\} \times D^2$ をみたすもの。Rope r が **short** であるとは、 r が t において横断的であるような $t \in (0, 1)$ が存在すること。Short rope 全体の集合に ψ と同じ位相を入れた空間を \mathcal{R} と書く。

Mostovoy の short rope (定義 1.5) の像は必ず定義 4.1 のような $t \in (0, 1)$ を持つので、Mostovoy の short rope の像は定義 4.1 の意味でも short rope です。定義 4.1 の short rope は長さが 3 を超える場合がありますから、両者は異なるものですが、Mostovoy の short rope の空間 B_2 からの写像 $B_2 \rightarrow \mathcal{R}$ があり、後で示すように弱ホモトピー同値です。

向きを保つ微分同相写像 $f: (0, 1) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}$, 例えば $f(t) := \tan \pi(t - (1/2))$ を一つ選び固定します。“Cut-off”写像 $c: \mathcal{R} \rightarrow \psi_s$ を次で定義します：

$$c(r) := (f \times \text{id}_{D^2})(r|_{(0,1)}).$$

定義 4.1 の意味の short rope r に対し、 $r|_{(0,1)}$ は必ず“long”な連結成分をちょうど一つ持ちます。よって c は確かに定義されます。

以下、 c が弱ホモトピー同値であることを示します。 $B\mathcal{K} \sim \psi_s$ を示すのに $\mathcal{D}^{(\perp)}$ を間に挟んだように、 \mathcal{R} と ψ_s を仲介する半順序集合を導入します。

定義 4.2. 集合 \mathcal{E} を

$$\mathcal{E} := \{(t, r) \in (0, 1) \times \mathcal{R} \mid r \text{ は } t \text{ で横断的}\}$$

で定義し、 \mathcal{E} 上の半順序 \leq を、 $(t, r) \leq (t', r')$ となるのは $r = r'$ かつ $t \leq t'$ のときであるように定義する。 \mathcal{E} は \mathcal{D} と同じように位相圏とみなす。 \mathcal{E} の射の集合は $(\Delta \sqcup ((0, 1) \times (0, 1) \setminus \Delta)) \times \mathcal{R}$ の部分空間として位相を入れる。

半順序部分集合 \mathcal{E}^+ を、 r が t において水平であるような (t, r) 全体からなるものと定義する。

補題 4.3. $N_*\mathcal{E}$ と $N_*\mathcal{E}^+$ は良い単体的空間である。

証明. 補題 3.6 と同様。 □

$N_l\mathcal{E}$ の元は、組 $(0 < t_0 \leq \dots \leq t_l < 1; r)$ であって、 $r \in \mathcal{R}$ は各 t_i で横断的であるようなものとみなせます。

命題 4.4. 各次数でホモトピー同値であるような単体的写像の列 $N_*\mathcal{E} \xleftarrow{\cong} N_*\mathcal{E}^+ \xrightarrow{\cong} N_*\mathcal{D}^+$ が存在する。従って $B\mathcal{E}$ と $B\mathcal{D}$ は弱ホモトピー同値である。

証明. 包含写像 $\mathcal{E}^+ \rightarrow \mathcal{E}$ がホモトピー同値 $B\mathcal{E}^+ \xrightarrow{\cong} B\mathcal{E}$ を誘導することは、[4, Theorem 3.9] と同様に、[4, Lemma 3.4] を使って示されます (命題 3.7 の証明も参照のこと)。

$f(t) := \tan \pi(t - (1/2))$ とおきます。 $l \geq 0$ に対し、 $\Phi: N_l\mathcal{E}^+ \rightarrow N_l\mathcal{D}^+$ を

$$\Phi(t_0 \leq \dots \leq t_l; r) := (f(t_0) \leq \dots \leq f(t_l); c(r))$$

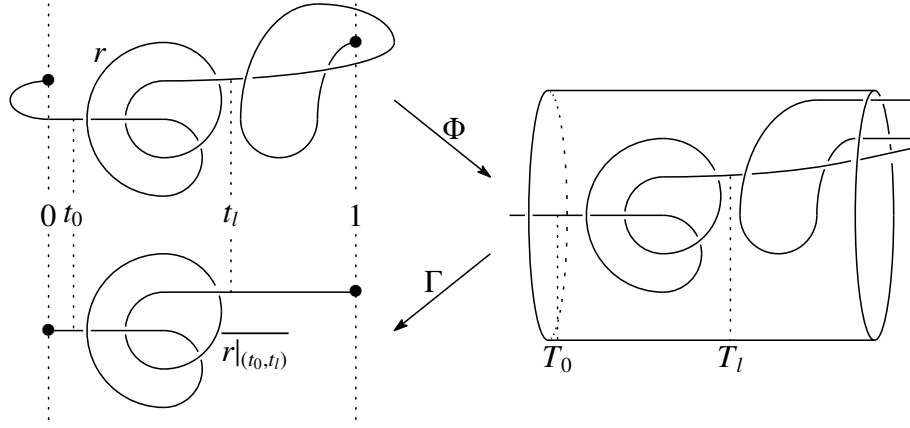


図 4.1: Φ と Γ

で定義します (図 4.1 参照). また, 写像 $\Gamma: N_I \mathcal{D}^1 \rightarrow N_I \mathcal{E}^1$ を

$$\Gamma(T_0 \leq \dots \leq T_l; M) := (t_0 \leq \dots \leq t_l; (f^{-1} \times \text{id}_{D^2})(\overline{M|_{[T_0, T_l]}}))$$

で定義します. ただし, $\overline{M|_{[T_0, T_l]}}$ は (3.1) で定義された $M|_{[T_0, T_l]}$ の long-extension で, $t_i := f^{-1}(T_i) \in (0, 1)$ です (図 4.1 参照). 一般に $(T, M) \in \mathcal{D}$ のとき, M は無限遠で水平である必要はなく, これを f^{-1} で开区間 $(0, 1)$ に縮めると部分多様体にならない可能性があります. しかし $r := (f^{-1} \times \text{id}_{\mathbb{R}^2})(\overline{M|_{[T_0, T_l]}})$ については, $\overline{M|_{[T_0, T_l]}}$ がコンパクト多様体と水平な半直線 $(-\infty, T_0) \times M|_{T_0}$, $[T_l, \infty) \times M|_{T_l}$ の和集合であることから, $r \subset (0, 1) \times D^2$ は部分多様体になります.

Φ が単体的写像であることはすぐに確かめられます. 以下, Φ が各次数でホモトピー同値写像で, ホモトピー逆写像が Γ で与えられることを示します. まず $\Phi \circ \Gamma$ は

$$\Phi \circ \Gamma(T_0 \leq \dots \leq T_l; M) = (T_0 \leq \dots \leq T_l; \overline{M|_{[T_0, T_l]}})$$

で与えられ, 命題 3.7 の h_s と同様のホモトピーを使って $F \circ G \simeq \text{id}$ を示せます.

次に $\Gamma \circ \Phi$ は

$$\Gamma \circ \Phi(t_0 \leq \dots \leq t_l; r) := (t_0 \leq \dots \leq t_l; \overline{r|_{(t_0, t_l)}})$$

で与えられます. ただし

$$\overline{r|_{(t_0, t_l)}} := ([0, t_0] \times r|_{t_0}) \cup r|_{(t_0, t_l)} \cup ([t_l, 1] \times r|_{t_l}) \in \mathcal{R}$$

は $r|_{(t_0, t_l)}$ の “long-extension” です. Rope $\overline{r|_{(t_0, t_l)}}$ は r の両端 $r|_{(-\infty, t_0)} \sqcup r|_{(t_l, \infty)}$ をほどこくことで得られますが, これは [7, Lemma 10] で説明されている方法により標準的に行うことができます. 実際, $r|_{(-\infty, t_0)}$ は [7, p. 440] の “rope which extends to a (long) knot without singularities to the right” で, そのような rope のなす部分空間 W_R は [7, Lemma 10] で示されている通り可縮です. $r|_{(t_l, \infty)}$ についても同様です. さらに, その変形は $((-\infty, t_0) \sqcup (t_l, \infty)) \times D^2$ 内で行うことができ, $r|_{[t_0, t_l]}$ を変えません. よって $\overline{r|_{(t_0, t_l)}}$ は各 t_i で水平なまま r に変形でき, 従って $\Gamma \circ \Phi$ は恒等写像とホモトピックです. \square

定理 4.5. 忘却写像は弱ホモトピー同値 $v: B\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{R}$ を導く.

証明. 定理3.9の証明において, \mathcal{D} を \mathcal{E} で, ψ_s を \mathcal{R} で置き換え, a を開区間 $(0, 1)$ から取ることになれば, あとは全く同様です. \square

系 4.6. (弱) ホモトピー同値写像からなる可換図式

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow[\sim]{c} & \psi_s \\ v' \uparrow \sim & & u' \uparrow \sim \\ B\mathcal{E}^\perp & \xrightarrow[\sim]{\Phi} & BD^\perp \xrightarrow[\sim]{F} BK \end{array}$$

がある. ただし u', v' は u, v と包含写像の合成である.

系4.6により, “short rope”の意味が[7]のものと異なっているものの, 予想1.3が肯定的に解決されたこととなります. 以下, 包含写像 $B_2 \hookrightarrow \mathcal{R}$ は弱ホモトピー同値であること, つまり “short rope” の定義を変えたことは本質的には何ら変化をもたらさないことを見ます. これにより, 予想1.3は完全に解決します.

まず $r \in B_2$ は $i = 0, 1$ に対し $r(i) = (i, 0, 0)$ と固定された埋め込みでしたが, この条件を緩めて

$$B'_2 := \{r : [0, 1] \hookrightarrow \mathbb{R}^1 \times D^2 \mid i = 0, 1 \text{ に対し } r(i) \in \{i\} \times D^2, r \text{ は長さ} < 3\}$$

とおきます. 包含写像 $B_2 \hookrightarrow B'_2$ が存在します. また

$$\bar{\mathcal{R}} := \{r \in \mathcal{R} \mid \text{長さ} < 3\}$$

とおきます. すると, 埋め込みに対しその像を対応させることで $B_2 \rightarrow \bar{\mathcal{R}}$ と $B'_2 \rightarrow \mathcal{R}$ が定義されます. これらの写像はホモトピー同値です. 逆写像は, 速度ベクトルの大きさが一定 (弧長) になるよう多様体をパラメータ付けすることにより得られます. 最後に

$$\bar{\mathcal{E}} := \{(t, r) \in \mathcal{E} \mid r \text{ は長さ} < 3\} \subset \mathcal{E}$$

とおくと, 次の可換図式を得ます:

$$\begin{array}{ccccc} B\bar{\mathcal{E}} & \xrightarrow[\sim]{\bar{v}} & \bar{\mathcal{R}} & \xleftarrow[\sim]{} & B_2 \\ \cong \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B\mathcal{E} & \xrightarrow[\sim]{\text{定理4.5}} & \mathcal{R} & \xleftarrow[\sim]{} & B' \end{array}$$

$B\bar{\mathcal{E}} \rightarrow B\mathcal{E}$ は包含写像から, \bar{v} は $BD \rightarrow \psi_s$ や $B\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{R}$ と同様に, 忘却写像から誘導されます. $N_*\bar{\mathcal{E}}$ は良い単体的空間であることが補題3.6と同様に示され, さらに以下のことがわかります:

- $N_*\bar{\mathcal{E}} \rightarrow N_*\mathcal{E}$ は次数ごとのホモトピー同値写像です. 実際, ホモトピー逆写像 $N_t\mathcal{E} \rightarrow N_t\bar{\mathcal{E}}$ は, まず rope の両端 $r|_{(-\infty, t_0] \cup [t_1, \infty)}$ を命題4.4と同様に [7, Lemma 10] の方法に従ってほどいたあと, 得られた rope $r|_{(t_0, t_1)}$ の長さが3より小さくなるよう適当に縮小することで得られます. よって補題2.4により $B\bar{\mathcal{E}} \rightarrow B\mathcal{E}$ はホモトピー同値です.
- \bar{v} は弱ホモトピー同値です. これは定理4.5と同様の方法で示されます.

以上のことと上の可換図式から, Mostovoy の short rope の空間 B_2 は, 我々の short rope の空間 \mathcal{R} と弱ホモトピー同値であることがわかりました.

謝辞

研究集会「結び目の数学 IX」(2016年12月20日(火)～23日(金), 日本大学)で講演の機会をいただいたことにつきまして, 世話人の市原一裕氏(日本大学), 茂手木公彦氏(日本大学)に深く感謝申し上げます.

また渡邊忠之氏(島根大学)には, [7]の勉強の際, さらに[6]の初稿について, 有益なコメントをたくさんいただきました. 栗林勝彦氏(信州大学)には, 著者らの共同研究に際し援助をいただきました. ここに感謝の意を表します.

参考文献

- [1] M. G. Barratt, *A note on the cohomology of semigroups*, J. Lond. Math. Soc. **36** (1961), 496–498
- [2] R. Budney, *Little cubes and long knots*, Topology **46** (2007), no. 1, 1–27
- [3] R. Budney, F. Cohen, *On the homology of the space of knots*, Geom. Topol. **13** (2009), 99–139
- [4] S. Galatius and O. Randal-Williams, *Monoids of moduli spaces of manifolds*, Geom. Topol. **14** (2010), no. 3, 1243–1302
- [5] P. Goerss, J. F. Jardine, *Simplicial Homotopy Theory*, Progress in Mathematics **174**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1999
- [6] S. Moriya and K. Sakai, *The space of short ropes and the classifying space of the space of long knots*, arXiv.1610.03907
- [7] J. Mostovoy, *Short ropes and long knots*, Topology **41** (2002), no. 3, 435–450
- [8] G. Segal, *Categories and cohomology theories*, Topology **13** (1974), 293–312