

Veering triangulations of mapping tori of some pseudo-Anosov maps arising from Penner's construction

阪田 直樹 (広島大学・日本学術振興会特別研究員PD)*

1. 導入

F を曲面、 φ を F の擬アノソフ写像とする。 F から、 φ の安定、不安定葉層構造の特異点を除いた穴あき曲面を F° で表わす。また φ の F° への制限を φ° とする。

Agol [1]は、写像トーラス $M_{\varphi^\circ} = F^\circ \times [0, 1]/(x, 0) \sim (\varphi^\circ(x), 1)$ は“標準的”であるような、veeringと呼ばれる構造を持った理想三角形分割を許容することを示した。(veeringは定義 2.3を参照。) またAgolは、このveeringな理想三角形分割はいつ幾何的になるのか、という問題を提起した。実際、円周上の一点穴あきトーラス束ではAgolが与えたveeringな理想三角形分割は幾何的となることが知られている。Hodgson-Rubinstein-Segerman-Tillmann [3]は、veeringな理想三角形分割は厳密的角度構造(strict angle structure)を許容することを示した。幾何的な理想三角形分割は厳密的角度構造を持つことから、veeringな理想三角形分割は、理想三角形分割が幾何的になるための必要条件を満たす。この結果により任意のveeringな理想三角形分割は幾何的なのではないかという期待が高まったが、しかしながらHodgson-Issa-Segerman [2]により幾何的でないようなveeringな理想三角形分割が発見された。このことから次の問題が提起される。

問題 1.1. 幾何的であるようなveeringな理想三角形分割を特徴付けよ。

本稿ではveeringな理想三角形分割を特徴付けるために、その写像トーラスを構成する擬アノソフ写像について考察する。特にPennerの構成法 [5]により構成された擬アノソフ写像を扱う。

定理 (Pennerの構成法). $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 、 $\mathcal{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ をそれぞれ曲面の互いに交わらない本質的単純閉曲線の族の組で、かつ $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ はその曲面を覆う(fill)とする。 α_i に関する右手デーンひねりと β_j に関する左手デーンひねりの合成から成る曲面の自己同相写像は、 $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ に含まれる $n + m$ 個の閉曲線に関して少なくともそれぞれ一回ずつデーンひねりを行なっているならば、擬アノソフ写像である。

この構成法に関して、Pennerは次のように予想した。

予想 1.2 (Penner). 任意の擬アノソフ写像に対して、その適当な累乗はPennerの構成法で構成出来る。

しかし、Shin-Strenner [6]は擬アノソフ写像の“coronal”と呼ばれる性質を用いてこの予想の反例を発見した。特に、coronalであるような擬アノソフ写像はPennerの構成法では得られないことを示した。

著者はコンピュータを用いた実験によって、Hodgson-Issa-Segerman [2]によって与えられている幾何的でないようなveeringな理想三角形分割を与える擬アノソフ写像はcoronalであることを確かめた。このことから、擬アノソフ写像のcoronal性と、その写像トーラスのveeringな幾何的理想三角形分割の間には関係があるのではないかとい

* web: <http://casis.sakura.ne.jp/>

う疑問が得られる。この疑問に解答を与えるため、まずは Penner の構成法で構成される擬アノソフ写像から得られる写像トーラスの veering な理想三角形分割がどのような組合せ構造を持っているのかを考察した。すなわち以下が主結果である。

主結果 1.3. φ を Penner の構成法から得られる擬アノソフ写像とする。このとき Penner の構成法で用いる単純閉曲線の族の任意の補領域 (complementary region) が四辺形でないものに対して、写像トーラス M_φ の veering な理想三角形分割の組合せ構造を完全に記述した。すなわち、 M_φ の veering な理想三角形分割の (Agol [1] のものと異なる) 構成法を与えた。

この構成法では各補領域に穴 (puncture) が必要であるが、四辺形である補領域には穴が出来ないことが分かっている ([5] 参照)。したがって今回の主結果は補領域が四辺形でないものに限定されている。

注意 1.4. 個々の例に関しては、例えばコンピュータソフトウェア Veering によって、写像トーラスの veering な理想三角形分割を得ることが出来る。

本稿では一般的な議論はせずに、具体的な例 (モノドロミーが Penner の構成法で構成される、ある双曲的ファイバー二橋絡み目の補空間) において veering な理想三角形分割が組合せ的に構成出来ることを確かめる。

本研究は科研費 (課題番号:15J06192) の助成を受けたものである。

2. 準備

この節では veering な理想三角形分割を定義する。 M を境界がトーラスの非交和であるようなコンパクトな 3 次元多様体とする。 M の内部 M° の理想三角形分割を \mathcal{D} とする。

定義 2.1 (cf. [3, 4]). 理想三角形分割 \mathcal{D} の理想四面体 σ に対して、 σ が面として持つ各理想三角形に横断的な向き (co-orientation) が定まっており、かつ 4 つの理想三角形に定まる横断的な向きのうちの 2 つは σ の内部へ向かう方向であり、また残りの 2 つは σ の外部へ向かう方向であるとき σ を **taut** と呼ぶ (図 1)。

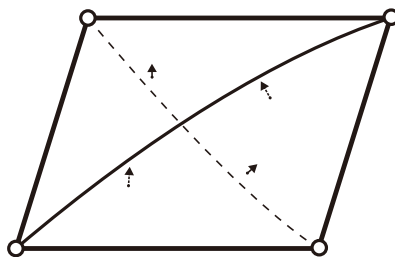


図 1: taut な理想四面体

以下、理想四面体 σ が taut であるとき、同じ横断的な向きが定まっている理想三角形に共有される辺における二面角の角度は π 、違う横断的な向きが定まっている理想三角形に共有される辺における二面角の角度は 0 となっているとする。

定義 2.2 (cf. [3, 4]). 理想三角形分割 \mathcal{D} が **taut** であるとは、 \mathcal{D} の全ての理想三角形に横断的な向きが定まっており、かつ以下の二つの条件を満たすことをいう。

- (1) \mathcal{D} の各理想四面体は、定まっている横断的な向きに関して taut である。

(2) \mathcal{D} の各理想辺に対して、その理想辺における各理想四面体の二面角の角度の合計は丁度 2π である。

この定義より taut な理想三角形分割は一般化角度構造 (generalized angle structure) を持つ。

定義 2.3 ([3]). 図 2 で示される通りに (二面角が 0 の) 理想辺が彩色された taut な理想四面体を **veering** と呼ぶ。また taut な理想三角形分割 \mathcal{D} が **veering** であるとは、 \mathcal{D} の各理想辺に (赤と青による) 二彩色が与えられていて、かつ任意の \mathcal{D} の理想四面体はその彩色によって veering であることである。

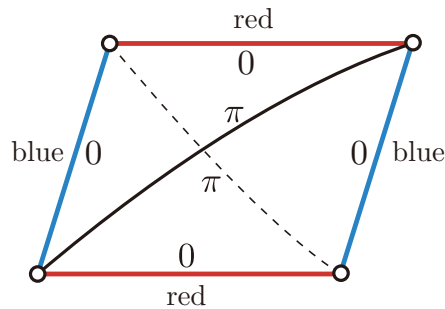


図 2: veering な理想四面体

3. 双曲的ファイバー二橋結び目 $K[2, 2, 2, 2]$ の補空間の veering な理想三角形分割

この節では双曲的ファイバー二橋結び目 $K = K[2, 2, 2, 2]$ (図 3) の補空間の veering な理想三角形分割を構成する。

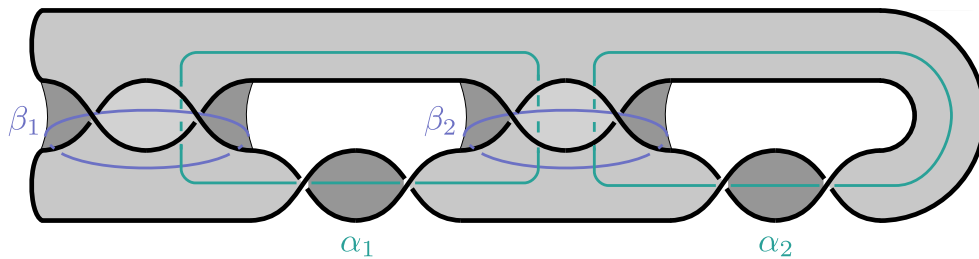


図 3: 双曲的ファイバー二橋結び目 $K[2, 2, 2, 2]$

ファイバー結び目 K の補空間のファイバー曲面 F は図 3 で示される通りである。 F は 2 つの正のホップバンドと 2 つの負のホップバンドのプランピングで構成されている。また本質的単純閉曲線 β_1, β_2 はそれぞれ正のホップバンドの、 α_1, α_2 はそれぞれ負のホップバンドの中央を通る曲線 (core curve) となっている。正のホップバンドと負のホップバンドは共にファイバー曲面であり、そのモノドロミーはそれぞれ中央を通る曲線に沿った左手デーンひねり、右手デーンひねりである。 F がホップバンドのプランピングから構成されていることから、 Gabai の定理よりファイバー曲面 F のモノドロミー φ は次の通りである。

$$\varphi = \tau_{\alpha_2}^{-1} \circ \tau_{\alpha_1}^{-1} \circ \tau_{\beta_2} \circ \tau_{\beta_1}$$

ただし γ が本質的単純閉曲線であるとき、 τ_γ は γ に沿った左手デーンひねりを表わすとする。ここで $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ 、 $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2\}$ とおくと φ は Penner の構成法で得られる擬アノソフ写像であることが分かる。

次にファイバー曲面 F の理想三角形分割 \mathcal{T}_0 を構成する。そのために、まず $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ から構成される以下の1次元セル複体 \mathcal{C} を考える。

$$\mathcal{C}^{(0)} = \{v \in \alpha_i \cap \beta_j \neq \emptyset \mid i, j \in \{1, 2\}\}$$

$$\mathcal{C}^{(1)} = \{\text{cl}(\delta) \mid \delta : \text{a connected component of } (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \setminus \mathcal{C}^{(0)}\}$$

ここで $\mathcal{C}^{(i)}$ は \mathcal{C} の i 次元セル全体が成す集合、 $\text{cl}(\delta)$ は δ の閉包である。補空間における理想三角形分割を考えることから、境界の結び目 K を1つの理想頂点と思えば、 \mathcal{C} の双対である2次元理想セル複体 \mathcal{Q} は各理想2セルが四辺形であるような F の理想セル分割となる (図4参照)。また各理想2セルは、 α_i を水平に、 β_j を垂直に置くことによ

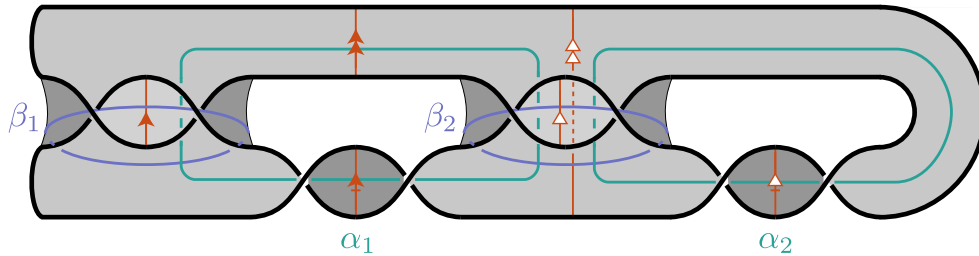


図4: \mathcal{C} の双対であるようなファイバー曲面 F の2次元理想セル複体 \mathcal{Q}

て、2つの対角線のうち一方が正の傾きを持ち、もう一方が負の傾きを持つように出来る。全ての理想2セルに正の傾きを持つ対角線を追加することによってファイバー曲面 F の理想三角形分割 \mathcal{T}_0 を得る。

\mathcal{T}_0 へ veering な理想四面体をはり付けてゆくことで、補空間の veering な理想三角形分割を構成する。ファイバー曲面 F のモノドロミー φ は $\tau_{\alpha_2}^{-1} \circ \tau_{\alpha_1}^{-1} \circ \tau_{\beta_2} \circ \tau_{\beta_1}$ と等しかった。このとき理想四面体は $\alpha_2, \alpha_1, \beta_2, \beta_1$ に対して順にはり付ける。

まず α_2 へ沿って理想四面体をはり付けることを考える。 α_2 と \mathcal{B} に含まれる曲線とは β_2 のみと丁度1回交わるから、 α_2 は \mathcal{Q} の丁度1つの理想2セル q_1 と交わる。 q_1 の面である理想1セルのうち、 α_2 と交わるものを v_1 とおく。このとき veering な理想四面体の角度 π の辺と \mathcal{T}_0 (または \mathcal{Q}) の辺 v_1 をはり合わせる。さらに、はり付けた理想四面体の辺を共有する理想三角形の組と v_1 を共有する \mathcal{T}_0 の理想三角形の組をはり合わせる。(ただしはり合わせる理想四面体の面に定まっている横断する方向は、理想四面体へ入る方向であるとする。) よって q_1 の理想辺のうち α_2 と交わらないものは赤色となり、 \mathcal{T}_0 へする際に追加された対角線は青色となる (図5)。

理想辺 v_1 を共有する2つの三角形の和集合は四辺形を成す。これを q'_1 で表わす。はり合わせた理想四面体のはり合っていない方の面は q'_1 の新しい三角形分割を与える (図6)。この分割は q'_1 の対角線 v_1 を無くして、 q'_1 のもう一方の対角線 v'_1 へおきかえるという操作で得られる。この操作を \mathcal{T}_0 に対して行なうことで得られた F の理想三角形分割を \mathcal{T}_1 で表わす。このとき理想2セル q_1 に追加された対角線を v'_1 へ写す自然な (単体的) 同型写像 $\psi_1 : \mathcal{T}_0 \rightarrow \mathcal{T}_1$ が存在する。 ψ_1 から得られる同相写像 $|\psi_1|$ は曲線 α_2 に沿った右手デーンひねり $\tau_{\alpha_2}^{-1}$ である。

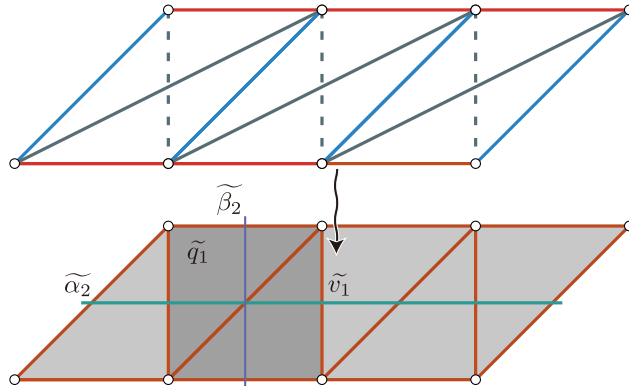


図 5: 閉曲線 α_2 が交わるセルの無限巡回被覆の一部と、veering な理想四面体のはり付け

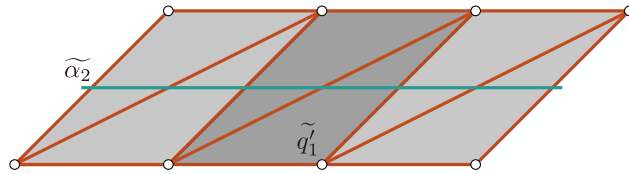


図 6: はり付けた veering な理想四面体の上面が与える理想三角形分割

次に曲線 $|\psi_1|(\alpha_1) = \alpha_1$ に沿って veering な理想四面体をはり付ける。一般には既に理想四面体をはり付けた上に理想四面体をはり付けるため α_1 はデーンひねり ψ_1 で別の曲線 $|\psi_1|(\alpha_1)$ となるから直接 α_1 に沿ってはり付けるわけではないが、この場合 α_1 と α_2 には交わりがないから α_1 へ沿ってはり付ければ良い。 α_1 は曲線 β_1 、 β_2 とそれぞれ1回ずつ交わるから、 Q の丁度2つの理想2セル q_{21} 、 q_{22} と交わる。 α_1 は q_{21} 、 q_{22} の2つの理想辺 v_{21} 、 v_{22} と交わる。 α_2 へ沿って veering な理想四面体をはり付けたのと同様に、 v_{21} 、 v_{22} を共有する三角形の組それぞれへも veering な理想四面体をはり付ける。またこの場合は α_1 と交わる Q の理想2セルは丁度2つあることから、先にはり付けた理想四面体の上に更に2つの veering な理想四面体をはり付ける。2つの理想四面体は q_{21} と q_{22} それぞれの対角線に沿って、 veering な理想四面体の角度 π の辺をはり付けるようにする (図 7)。これにより、はり付けた理想四面体の上面が F の新しい理想三角形分割 \mathcal{T}_2 を与える。

\mathcal{T}_2 は次の操作で \mathcal{T}_1 から得られる。まず理想辺 v_{21} と v_{22} をそれぞれ別の対角線 v'_{21} と v'_{22} へおきかえる。すると新たな理想三角形分割が得られる。更に q_{21} と q_{22} の対角線を共有する理想三角形の組はそれぞれ四辺形を成す。よってそれら対角線を、また別の対角線へおきかえる。おきかえた対角線を v''_{21} と v''_{22} で表わす。こうして得られた理想三角形分割は \mathcal{T}_2 である。このとき q_{21} と q_{22} の対角線を v'_{21} 、 v'_{22} へ写す自然な (単体的) 同型写像 $\psi_2 : \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ が存在する (図 8)。 ψ_2 から得られる同相写像 $|\psi_2|$ は曲線 α_1 に沿った右手デーンひねり $\tau_{\alpha_1}^{-1}$ である。

注意 3.1. 一般に、 A または B の曲線 γ が A 、 B それぞれの曲線と合計で n 回交わるならば、デーンひねりを実現するために合計 n^2 個の veering な理想四面体を γ に沿ってはり付ける必要がある。

次に曲線 $|\psi_2| \circ |\psi_1|(\beta_2)$ に沿って α_2 の場合と同様にして理想四面体をはり付けるが、この場合は \mathcal{T}_2 から、新たに与えられる理想四面体 \mathcal{T}_3 への自然な (単体的) 同型写像

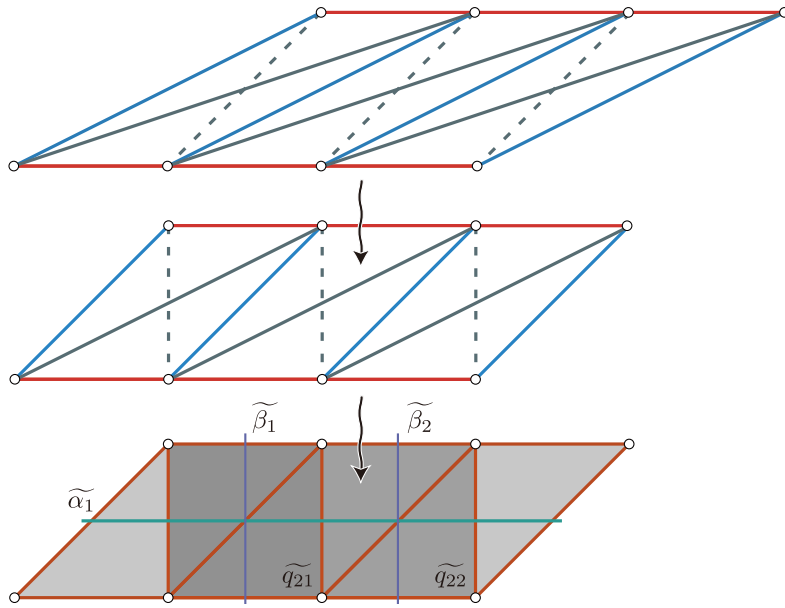


図 7: 閉曲線 α_1 が交わるセルの無限巡回被覆の一部と、veering な理想四面体のはり付け

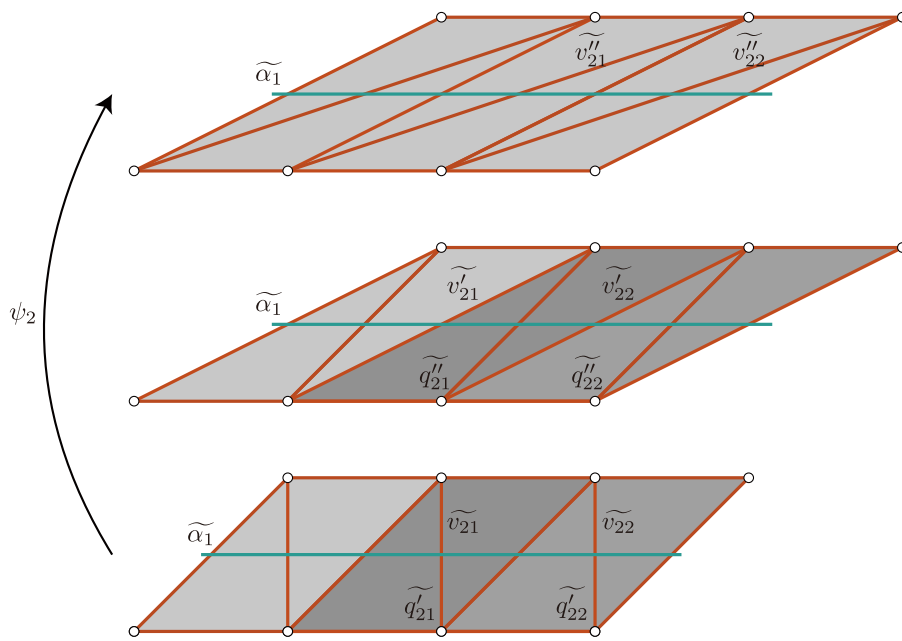


図 8: 理想三角形分割 \mathcal{T}_1 から \mathcal{T}_2 への同型写像 ψ_2

$\psi_3 : \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_3$ から得られる同相写像 $|\psi_3|$ は $|\psi_2| \circ |\psi_1|(\beta_2)$ へ沿った左手デーンひねりとなる。すなわち次の通り。

$$|\psi_3| = (|\psi_2| \circ |\psi_1|) \circ \tau_{\beta_2} \circ (|\psi_2| \circ |\psi_1|)^{-1}$$

最後に $|\psi_3| \circ |\psi_2| \circ |\psi_1|(\beta_1)$ に沿ってはり付ける場合も同様にして、左手デーンひねりを導く以下のような(単体的)同型写像 $\psi_4 : \mathcal{T}_3 \rightarrow \mathcal{T}_4$ を得る。

$$|\psi_4| = (|\psi_3| \circ |\psi_2| \circ |\psi_1|) \circ \tau_{\beta_1} \circ (|\psi_3| \circ |\psi_2| \circ |\psi_1|)^{-1}$$

これにより、 $F \times [0, 1]$ の“理想三角形分割” $\widehat{\mathcal{D}}$ で、各理想四面体が veering であるものを得る。

ここまでで得た(単体的)同型写像の合成 $\psi = \psi_4 \circ \psi_3 \circ \psi_2 \circ \psi_1 : \mathcal{T}_0 \rightarrow \mathcal{T}_4$ は、次の通りファイバー曲面 F のモノドロミー φ と等しい。

$$\begin{aligned} |\psi_4| \circ |\psi_3| \circ |\psi_2| \circ |\psi_1| &= (|\psi_3| \circ |\psi_2| \circ |\psi_1|) \circ \tau_{\beta_1} \\ &\quad \circ (|\psi_3| \circ |\psi_2| \circ |\psi_1|)^{-1} \circ (|\psi_3| \circ |\psi_2| \circ |\psi_1|) \\ &= |\psi_3| \circ (|\psi_2| \circ |\psi_1|) \circ \tau_{\beta_1} \\ &= (|\psi_2| \circ |\psi_1|) \circ \tau_{\beta_2} \circ (|\psi_2| \circ |\psi_1|)^{-1} \circ (|\psi_2| \circ |\psi_1|) \circ \tau_{\beta_1} \\ &= |\psi_2| \circ |\psi_1| \circ \tau_{\beta_2} \circ \tau_{\beta_1} \\ &= \tau_{\alpha_2}^{-1} \circ \tau_{\alpha_1}^{-1} \circ \tau_{\beta_2} \circ \tau_{\beta_1} \\ &= \varphi \end{aligned}$$

したがって(単体的)同型写像 ψ で $\widehat{\mathcal{D}}$ の下面 ($F \times \{0\}$) と上面 ($F \times \{1\}$) をはり合わせることによって、双曲的ファイバー二橋結び目 $K[2, 2, 2, 2]$ の補空間の理想三角形分割 \mathcal{D} を得る。 \mathcal{D} の各理想四面体は veering であり、はり合わせ方から各理想辺には矛盾無く色が定まることが分かる。したがって \mathcal{D} は veering である。

参考文献

- [1] I. Agol, *Ideal triangulations of pseudo-Anosov mapping tori*, Topology and geometry in dimension three, Contemp. Math., vol. 560, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, pp. 1–17, DOI 10.1090/conm/560/11087.
- [2] C. D. Hodgson, A. Issa, and H. Segerman, *Non-geometric veering triangulations*, Exp. Math. **25** (2016), no. 1, 17–45, DOI 10.1080/10586458.2015.1005256.
- [3] C. D. Hodgson, J. H. Rubinstein, H. Segerman, and S. Tillmann, *Veering triangulations admit strict angle structures*, Geom. Topol. **15** (2011), no. 4, 2073–2089, DOI 10.2140/gt.2011.15.2073.
- [4] M. Lackenby, *Taut ideal triangulations of 3-manifolds*, Geom. Topol. **4** (2000), 369–395, DOI 10.2140/gt.2000.4.369.
- [5] R. C. Penner, *A construction of pseudo-Anosov homeomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. **310** (1988), no. 1, 179–197, DOI 10.2307/2001116.
- [6] H. Shin and B. Strenner, *Pseudo-Anosov mapping classes not arising from Penner’s construction*, Geom. Topol. **19** (2015), no. 6, 3645–3656, DOI 10.2140/gt.2015.19.3645.