On shifted Q polynomials

杉野　裕子　(広島大学大学院教育学研究科)*

概　　要

結び目の Q 多項式に対して，変数変換を行ったずらし Q 多項式を定義する．もとの Q 多項式の最高次の係数が正のとき，ずらし Q 多項式の係数はすべて正になると予想する．この予想を種数 1 の交代結び目に対して証明する．また，11 交差点までのすべての結び目について予想を確認した．

1. 定義

まず，絡み目の Q 多項式を定義する．

定義 1.1. 絡み目 L に対する Q 多項式 Q_L を以下の (i)，(ii) で定義する．

(i) $\mathbb{O}$: 自明結び目 $\Rightarrow Q_{\mathbb{O}} = 1$

(ii) $Q_{L_+} + Q_{L_-} = x(Q_{L_0} + Q_{L_\infty})$

ここで，L_+, L_-, L_0, L_∞ は以下のように定義している．

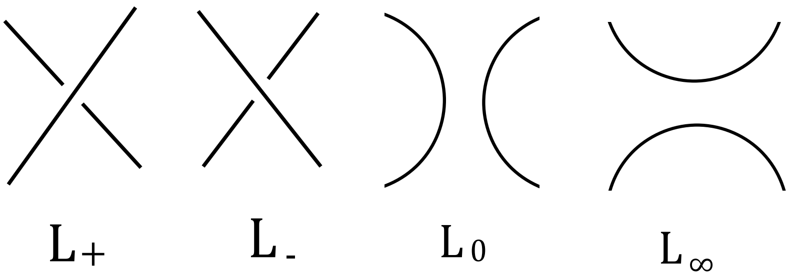

図 1: 絡み目 L_+，L_-，L_0，L_∞

例 1.2.

- 三葉結び目の Q 多項式

$$Q_L(x) = 2x^2 + 2x - 3$$

- 8 の字結び目の Q 多項式

$$Q_L(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 3$$

Q 多項式は，結び目に対しては負冪の項はなく，通常の多項式である．μ 成分の絡み目に対しては，$1 - \mu$ が最小次数となる．

* 〒739-8524 広島県東広島市鏡山 1-1-1 広島大学大学院教育学研究科 教科教育学専修 数学教育学専攻
e-mail: m164648@hiroshima-u.ac.jp

ここで，結び目のQ多項式の変数変換を考える．

命題 1.3. 結び目のQ多項式$Q(x)$の最高次の係数が正のとき，$Q(x+N)$の全係数が正になるような$N \in \mathbb{N}$がとれる．

証明. 結び目のQ多項式を，$a>0$，$b_i \in \mathbb{Z}$ $(b_i \geq 0)$を用いて

$$Q(x) = ax^n \pm b_1 x^{n-1} \pm b_2 x^{n-2} \pm \cdots \pm b_n$$

と表す．よって，xを$x+N$に変数変換した多項式は以下のようになる．

$$Q(x+N) = a(x+N)^n \pm b_1(x+N)^{n-1} \pm b_2(x+N)^{n-2} \pm \cdots \pm b_n$$

よって，

$$\begin{aligned}
Q(x+N) &= a(x^n + {}_nC_{n-1}Nx^{n-1} + {}_nC_{n-2}N^2x^{n-2} + \cdots + N^n) \\
&\pm b_1(x^{n-1} + {}_{n-1}C_{n-2}Nx^{n-2} + {}_{n-1}C_{n-3}N^2x^{n-3} + \cdots + N^{n-1}) \\
&\pm b_2(x^{n-2} + {}_{n-2}C_{n-3}Nx^{n-3} + {}_{n-2}C_{n-4}N^2x^{n-4} + \cdots + N^{n-2}) \\
&\pm \cdots \pm b_n \\
&= ax^n + ({}_nC_{n-1}aN \pm b_1)x^{n-1} + ({}_nC_{n-2}aN^2 \pm {}_{n-1}C_{n-2}b_1N \pm b_2)x^{n-2} \\
&+ \cdots + (aN^n \pm b_1N^{n-1} \pm b_2N^{n-2} \pm \cdots \pm b_n)
\end{aligned}$$

いま，$N = \max\left\{ \left\lceil \frac{b_1}{{}_nC_{n-1}a} \right\rceil, \left\lceil \frac{{}_{n-1}C_{n-2}b_1 + b_2}{{}_nC_{n-1}aN} \right\rceil, \cdots \right\}$とすると，題意を満たす． □

では，結び目のQ多項式$Q(x)$を変数変換して得られる$Q(x+N)$は，Nとしてどれくらいユニバーサルに最小の値がとれるのか考える．

- $N=1$のとき　すぐに反例が挙げられる．

  例 1.4. プレッツェル結び目$P(3,3,3)$に対して

$$\begin{aligned}
Q(x) &= 2x^8 + 8x^7 + 2x^6 - 28x^5 - 24x^4 + 34x^3 + 28x^2 - 18x - 3 \\
Q(x+1) &= 2x^8 + 24x^7 + 114x^6 + 264x^5 + 286x^4 + 90x^3 - 40x^2 - 12x + 1 \\
Q(x+2) &= 2x^8 + 40x^7 + 338x^6 + 1564x^5 + 4296x^4 + 7106x^3 + 6856x^2 \\
&\quad + 3510x + 729
\end{aligned}$$

- $N=2$のとき　Mathematicaで11交差まで計算し確認した．

以上より，結び目のQ多項式を変数変換して得られる多項式について以下のような性質が予想できる．

予想 1.5. 結び目に対して，Q多項式の最高次の係数が正ならば，xを$x+2$に変数変換して得られる多項式の全係数はすべて正である．

予想においてQ多項式の「最高次の係数が正」であることを仮定しているが，Q多項式の最高次の係数が負になる場合もある．

例 1.6. • 12_{n328} $Q(x) = -2x^7 + 20x^5 + 16x^4 - 28x^3 - 20x^2 + 10x + 5$

• 12_{n426} $Q(x) = -2x^7 - 2x^6 + 16x^5 + 22x^4 - 20x^3 - 30x^2 + 8x + 9$

しかし，交代的ならば最高次の係数が正であることはKidwellがすでに証明している．ここで，変数変換して得られる多項式を「ずらしQ多項式」と，新たに定義する．

定義 1.7. 絡み目LのQ多項式$Q_L(x)$について，xを$x+2$に変数変換して得られる多項式$Q_L^*(x)$をLの**ずらしQ多項式**という．

例1.2で挙げた2つの結び目のずらしQ多項式を，例として以下で紹介する．

例 1.8. • 三葉結び目

$$Q_L(x) = 2x^2 + 2x - 3$$

$$Q_L^*(x) = 2x^2 + 10x + 9$$

• 8の字結び目

$$Q_L(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 3$$

$$Q_L^*(x) = 2x^3 + 16x^2 + 38x + 25$$

2. 現時点までの成果

現時点までの成果は，

- $(2,n)$型トーラス結び目
- 種数1の交代結び目

  種数1の2橋結び目と種数1の交代プレッツェル結び目
- 11交差までの結び目すべて(801個)

である．$(2,n)$型トーラス結び目，種数1の交代結び目に関しては，予想が成り立つことを証明した．11交差までの結び目については，Mathematicaで801個すべて計算し，予想が成り立つことを確認した．種数1の交代結び目の内訳として，種数1の2橋結び目と種数1の交代プレッツェル結び目の2つを挙げているが，実際は，種数1の交代結び目はこの2つがすべてである．したがって，種数1の交代結び目すべてに関して，予想が成り立つことを証明できた．

本稿では，$(2,n)$型トーラス結び目に対する議論のみ紹介する．種数1の交代結び目に関しては，スケイン関係式を用いて交差点の数を減らしていくのだが，その際に$(2,n)$型トーラス結び目に対する結果を必要とする．

3. $(2,n)$型トーラス結び目の例

ここで，実際に，$(2,n)$型トーラス結び目のずらしQ多項式について，予想が正しいことを証明していく．いま，T_nを$(2,n)$型トーラス結び目，$Q(T_n)$をT_nのQ多項式，T_n^*をT_nのずらしQ多項式とする．$(2,n)$型トーラス結び目のQ多項式に対して，以下の関係式が成り立つ．

$$Q(T_{n_+}) + Q(T_{n_-}) = x(Q(T_{n_\infty}) + Q(T_{n_0}))$$

$$Q(T_n) = x(Q(T_{n-1}) + 1) - Q(T_{n-2})$$

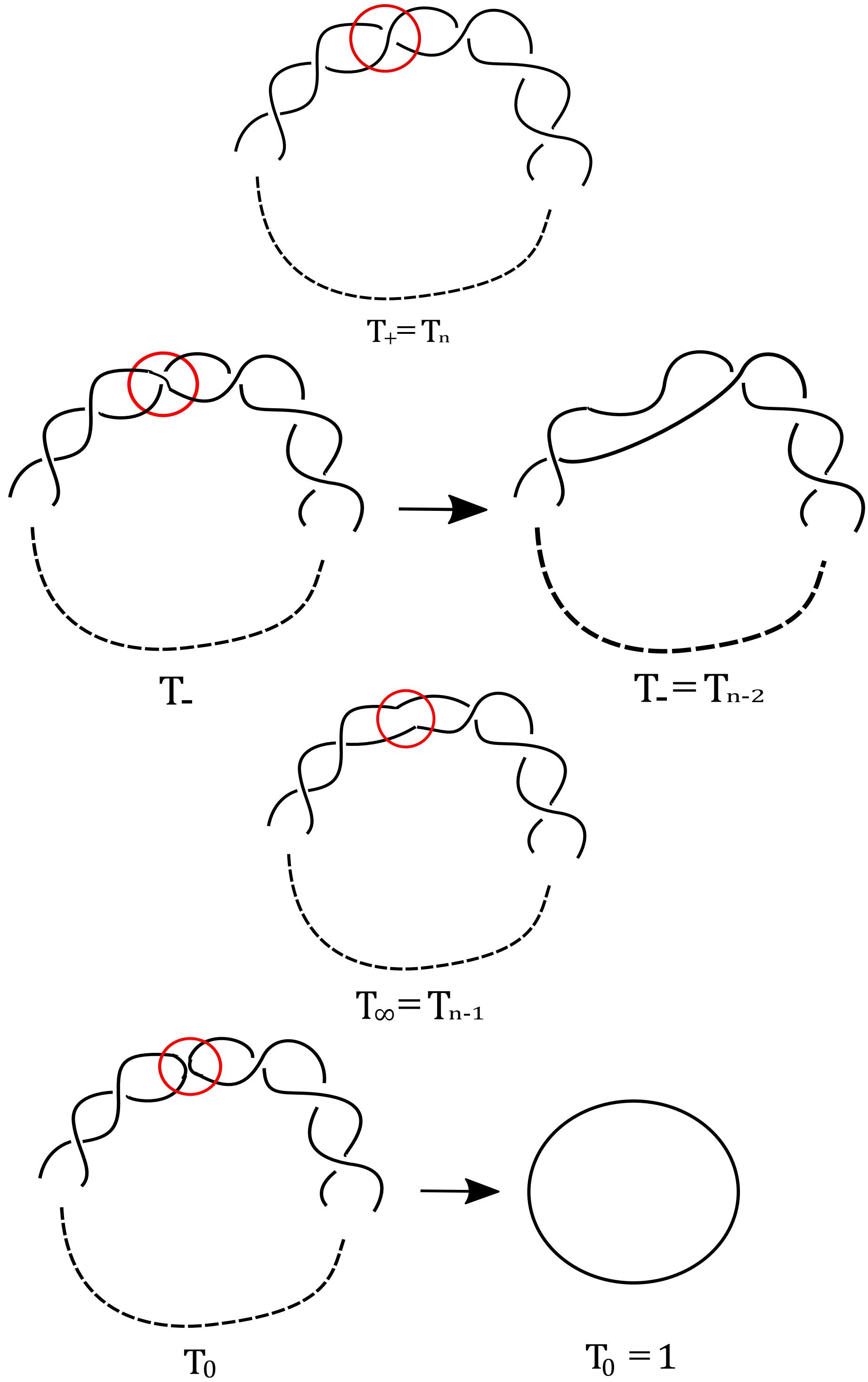

図 2: トーラス結び目 T

したがって，$(2, n)$ 型トーラス結び目のずらし Q 多項式は，以下の漸化式を満たす．

$$T_n^* = (x+2)(T_{n-1}^* + 1) - T_{n-2}^*$$

T_n^* の x^i の係数を C_n^i とする $(i \geq 0)$．$i \geq n$ のとき $C_n^i = 0$ である (T_n^* は $n-1$ 次)．

命題 3.1. $^\forall n \geq 1$: 奇数，$C_n^i \geq 0$ $(0 \leq i \leq n-1)$ が成り立つ．

ここで，n を1以上の奇数として考えるのは，結び目について考察するからである．

証明. n に関する帰納法を用いる．

$n=1$ のとき，$T_1^* = 1$ ゆえ $C_1^0 = 1$．$n=2$ のとき，$T_2^* = 2x+5-\dfrac{2}{x+2}$ ゆえ $C_2^1 = 2$，$C_2^0 = 5$．よって，$n=1, n=2$ のとき，命題は成り立つ．ここで，$n=2$ について考察しているのは，$(2,n)$ 型トーラス結び目のずらし Q 多項式が隣接3項間漸化式を満たしているので，偶数の場合についても考察せざるをえないからである．$C_k^t \quad (1 \leq k \leq n-1$，$0 \leq t \leq k-1)$ について，$C_k^t \geq 0$ が成り立つと仮定する．このとき，$C_n^{n-1}, \cdots, C_n^0 \geq 0$ を示せばよい．

(i) $C_n^{n-1}\ \ (n \geq 3)$

漸化式より，$C_n^{n-1} = C_{n-1}^{n-2}$ が成り立つ．

$$C_n^{n-1} = \cdots = C_2^1 = 2 \geq 0$$

(ii) C_n^{n-2} $(n \geq 3)$

$n=3$ のとき，$T_3^* = 2x^2+10x+9$ ゆえ $C_3^1 = 10$．$n \geq 4$ のとき，漸化式より，$C_n^{n-2} = C_{n-1}^{n-3} + 2C_{n-1}^{n-2}$ が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}
C_n^{n-2} &= C_{n-1}^{n-3} + 2C_{n-1}^{n-2} \\
&= C_{n-1}^{n-3} + 4 \\
&= (C_{n-2}^{n-4} + 4) + 4 \\
&= \cdots \\
&= (C_3^1 + 4) + 4 + \cdots + 4 \\
&= 10 + 4(n-3) \\
&= 4n - 2 \geq 0
\end{aligned}$$

(iii) C_n^i $(2 \leq i \leq n-3)$

漸化式より，$C_n^i = C_{n-1}^{i-1} + 2C_{n-1}^i - C_{n-2}^i$ が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}
C_n^i &= C_{n-1}^{i-1} + 2C_{n-1}^i - C_{n-2}^i \\
&= C_{n-1}^{i-1} + 2(C_{n-2}^{i-1} + 2C_{n-2}^i - C_{n-3}^i) - C_{n-2}^i \\
&= C_{n-1}^{i-1} + 2C_{n-2}^{i-1} + 3C_{n-2}^i - 2C_{n-3}^i \\
&= C_{n-1}^{i-1} + 2C_{n-2}^{i-1} + 3(C_{n-3}^{i-1} + 2C_{n-3}^i - C_{n-4}^i) - 2C_{n-3}^i \\
&= C_{n-1}^{i-1} + 2C_{n-2}^{i-1} + 3C_{n-3}^{i-1} + 4C_{n-3}^i - 3C_{n-4}^i \\
&= \cdots \\
&= C_{n-1}^{i-1} + \cdots + (n-(i+2))C_{i+2}^{i-1} + (n-(i+1))C_{i+2}^i - (n-(i+2))C_{i+1}^i \\
&= \sum_{j=1}^{n-i-2} jC_{n-j}^{i-1} + (n-i-1)(4(i+2)-2) - 2(n-i-2) \\
&= \sum_{j=1}^{n-i-2} jC_{n-j}^{i-1} + 4(n-i-1)(n+1) + 2 \geq 0
\end{aligned}$$

(iv) C_n^1

漸化式より，$C_n^1 = C_{n-1}^0 + 2C_{n-1}^1 + 1 - C_{n-2}^1$ が成り立つ．よって，

$$
\begin{aligned}
C_n^1 &= C_{n-1}^0 + 2C_{n-1}^1 + 1 - C_{n-2}^1 \\
&= C_{n-1}^0 + 1 + 2(C_{n-2}^0 + 2C_{n-2}^1 + 1 - C_{n-3}^1) - C_{n-2}^1 \\
&= (C_{n-1}^0 + 1) + 2(C_{n-2}^0 + 1) + 3C_{n-2}^1 - 2C_{n-3}^1 \\
&= (C_{n-1}^0 + 1) + 2(C_{n-2}^0 + 1) + 3(C_{n-3}^0 + 2C_{n-3}^1 + 1 - C_{n-4}^1) - 2C_{n-3}^1 \\
&= (C_{n-1}^0 + 1) + 2(C_{n-2}^0 + 1) + 3(C_{n-3}^0 + 1) + 4C_{n-3}^1 - 3C_{n-4}^1 \\
&= \cdots \\
&= ((C_{n-1}^0 + 1) + \cdots + (n-3)(C_3^0 + 1)) + (n-2)C_3^1 - (n-3)C_2^1 \\
&= \sum_{j=1}^{n-3} j(C_{n-j}^0 + 1) + 10(n-2) - 2(n-3) \\
&= \sum_{j=1}^{n-3} j(C_{n-j}^0 + 1) + 8n - 14 \geq 0
\end{aligned}
$$

(v) C_n^0

ここで，負冪について考える．漸化式より，T_n^* において

- n が奇数のとき，T_n^* は負冪なし
- n が偶数のとき，$\pm\frac{2}{x+2}$

そこで，C_n^{-1} を以下のように定義する．

$$
C_n^{-1} = \begin{cases} 0 & (n : \text{奇数}) \\ -2 & (n \equiv 2 \mod 4) \\ 2 & (n \equiv 0 \mod 4) \end{cases}
$$

これを用いて以下を示す．

$$C_i^0 > C_{i-1}^0 \ (i \geq 2)$$

n に関する帰納法を用いる．$C_1^0 = 1$，$C_2^0 = 5$ で，$C_2^0 > C_1^0$ が成立．$C_i^0 > C_{i-1}^0$ が $i \leq n-1$ で成立すると仮定する．漸化式より，

$$
\begin{aligned}
C_n^0 &= 2C_{n-1}^0 + 2 + C_{n-1}^{-1} - C_{n-2}^0 \\
&\geq 2C_{n-1}^0 - C_{n-2}^0 \\
&= C_{n-1}^0 + (C_{n-1}^0 - C_{n-2}^0) \\
&> C_{n-1}^0
\end{aligned}
$$

ゆえに，$C_n^0 > C_{n-1}^0 > \cdots > C_1^0 > 0$ となり示せた．

□

4. おわりに

今回，結び目のずらし Q 多項式についてのみ考察した．負冪をもつ絡み目の Q 多項式についてはまだ考察できていないが，以下を予想している．

予想 4.1. Q 多項式の最高次の係数が正ならば，ずらし Q 多項式は次のような形にかける．

$$Q(x+2) = \frac{g(x)}{f(x)}$$

ここで，$f(x)$，$g(x)$ は正係数多項式．

実際，$f(x) = (x+2)^n$ となる．

例 4.2. ホップ絡み目に対して

$$Q(x) = 2x + 1 - \frac{2}{x}$$

$$Q(x+2) = \frac{2x^2 + 7x + 4}{x+2}$$