

曲線の和に関する Arnold 不変量の加法性

杉山 龍太郎 (信州大学大学院理工学系研究科)
境 圭一 (信州大学)

概 要

本稿では平面上の generic 閉曲線 (定義 2) の generic ホモトピー (定義 4) について論じる. 特に, generic 閉曲線に対する generic ホモトピー不変量である Arnold 不変量 St, J^\pm (定理 14, 15, 16) の, 曲線の和に関する加法性について考察する. また 2 つの曲線を分離する際の, 符号を含めた接触回数の計算方法についての研究結果を報告する.

1. 研究動機

generic 閉曲線を, 定義 5 の同値関係によって分類することを目標として研究が始められた. Arnold (1994) は 2 つの閉曲線の連結和 (connected sum) に関して, St, J^\pm が加法的であること, 連結和をより一般化した strange sum に関して, St が加法的であることを示した. その後 Mendes de Jesus-Romero Fuster (2002) が曲線同士が交差を持つ和における J^\pm の加法性について, ある特別な場合について考察した.

より一般化された曲線の和に関して, Arnold 不変量の加法性がどのようになっているのか疑問を抱き, Mendes de Jesus-Romero Fuster らの論文で定義された, 2 つの曲線を分離する際の符号を含めた接触回数を数えた T^\pm の計算方法を与えたい, と考えた. 一般化された連結和に対する不変量の振る舞いを記述する上で, 必ず T^\pm が必要であったので, 計算方法を与える必要があった.

2. Generic 閉曲線, Generic ホモトピー

定義 1. 閉曲線 $c : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が正則 (regular) であるとは, 任意の $t \in S^1$ に対して, $\dot{c}(t) \neq 0$ をみたすことである.

定義 2. 正則な閉曲線 $c : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が

(1) 任意の $v \in \mathbb{R}^2$ に対し, $\# c^{-1}(v) \leq 2$,

(2) $s \neq t, c(s) = c(t)$ となる任意の $s, t \in S^1$ に対し, $\dot{c}(s), \dot{c}(t)$ が一次独立,

をみたすとき, c を generic 閉曲線 (generic closed curve) という.

定義 3. 定義 2 のようなパラメータ付け可能な $C \subset \mathbb{R}^2$ も generic 閉曲線とよび, パラメータを指定したものを向き付けられた generic 閉曲線とよぶ.

以下, 向きのついていない曲線は大文字で表し, 向きの付いた曲線, またはそのパラメータについては小文字で表す事にする.

定義 4. $h : S^1 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$ を 2 つの generic 曲線を結ぶホモトピーとする. $h_t(s) = h(s, t)$ とあらわす. h が次の (1) ~ (3) を満たすとき, h は generic ホモトピーであるという:

(1) 各 $h_t : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は正則,

(2) 有限個の $t_i \in I (i = 1, 2, \dots, n)$ を除いて, h_t は generic 曲線,

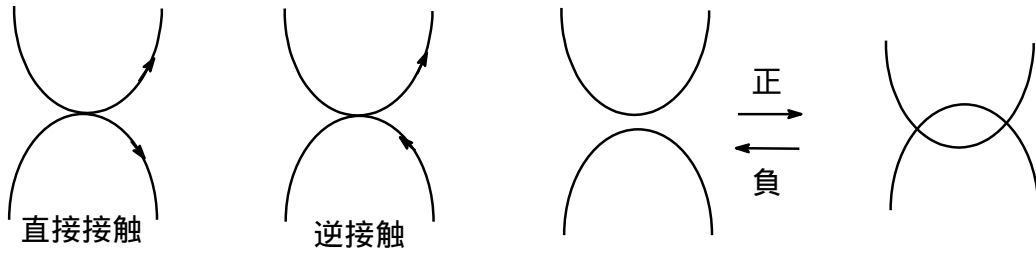


図 1: 接触の種類と正負

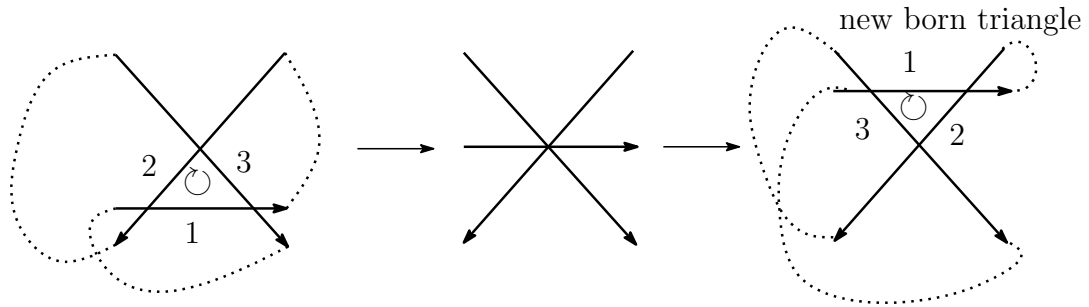


図 2: new born triangle

(3) 各 t_i において h_{t_i} は次のいずれか一方のみを満たす:

- (a) 3重点をただ1つだけ持ち, その3重点で交わる3本の接ベクトルのうち, どの2つも1次独立である.
- (b) 自己接触をただ1つだけ持ち, 接触する2本の辺の曲率が異なる.

Generic ホモトピー h について, h_t が自己接触を持つとき, h は t において自己接触を通過すると呼ぶ. また h_t が3重点を持つとき3重点を通過すると呼ぶ.

定義 5. 閉曲線 c_0, c_1 について, 2つを結ぶ generic ホモトピーで, 自己接触や3重点通過をしなものが存在するとき, $c_0 \sim c_1$ と定義する.

定義 5 の同値関係について, generic 閉曲線を分類することが本研究の目標である.

定義 6. 自己接触を通過する際, 接触する点における2本の辺の速度ベクトルが同じ向きであるとき, この接触は直接 (direct), 逆向きであるとき, この接触は逆 (inverse) であると言う.

注意 7. 自己接触が直接か逆かは, 曲線の向きを変えても変わらない. よって自己接触が直接か逆かは, 向き付けられていない閉曲線に対して定まる.

定義 8. 自己接触を通過した後, 2重点が増えるとき, この接触は正 (positive), 減るときを負 (negative) であると言う.

定義 9. generic ホモトピーの3重点通過が正 (positive) であるとは, new born triangle によって決まる値 q が偶数のときをいう. ただし new born triangle とは, 3重点通過後に出来る, 3本の辺によって作られる三角形のことである. q は, 3重点の近くの3本の辺を通る順序によって定まるサイクルの向きと同じ向きを持つ辺の数である.

図2の場合は1と2の辺の向きがサイクルの向きと一致しているため, $q = 2$ となる.

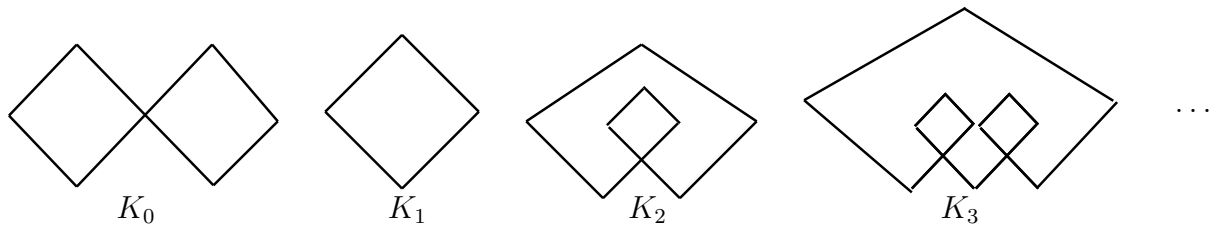


図 3: standard curve

注意 10. 曲線の向きを逆にしても, q の値は変わらない. また 3 本の辺の順序を巡回的に変えても q の値は変わらない. よって 3 重点通過の正負は, 向き付けられていない閉曲線に対し定まる.

定義 11. 正則曲線 $c: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対し, $\gamma_c: S^1 \rightarrow S^1$ を

$$\gamma_c(t) := \frac{\dot{c}(t)}{|\dot{c}(t)|}$$

とする. このとき $\deg \gamma_c$ を c の指数 (index) といい, $\text{ind}(c)$ と書く.

定理 12 ([3]). 正則曲線の指数は正則ホモトピー不変量である. さらに c_0 と c_1 が正則ホモトピックであるための必要十分条件は, これらの指数が等しいことである.

3. Arnold 不変量

定義 13. standard curve K_n を図 3 のような generic 閉曲線とする.

定理 14 ([1]). 向き付けられていない generic 閉曲線に対し, 3 重点を通過しない generic ホモトピーに関する不変量 St で,

(1) generic 閉曲線 c が, 3 重点を 1 つ正に通過して c' に変形したとき, $St(c') - St(c) = 1$,

(2) $St(K_0) = 0, St(K_{i+1}) = i$ ($i = 0, 1, \dots$)

となるものが一意に存在する.

定理 15 ([1]). 向き付けられていない generic 閉曲線に対し, 直接接触を通過しない generic ホモトピーに関する不変量 J^+ で

(1) generic 閉曲線 c が, 直接接触を 1 つ正に通過して c' に変形したとき, $J^+(c') - J^+(c) = 2$,

(2) $J^+(K_0) = 0, J^+(K_{i+1}) = -2i$ ($i = 0, 1, \dots$)

となるものが一意に存在する.

定理 16 ([1]). 向き付けられていない generic 閉曲線に対し, 逆接触を通過しない generic ホモトピーに関する不変量 J^- で

(1) generic 閉曲線 c が, 逆接触を 1 つ正に通過して c' に変形したとき, $J^-(c') - J^-(c) = -2$,

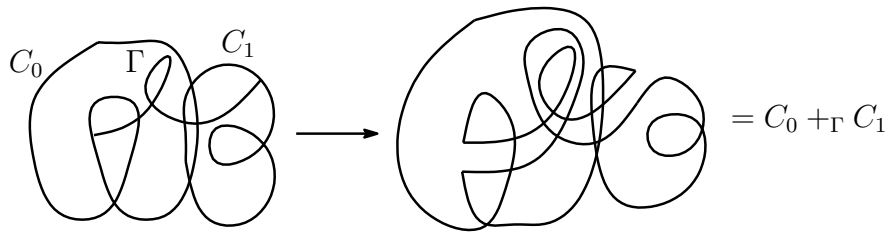


図 4: 一般化された連結和

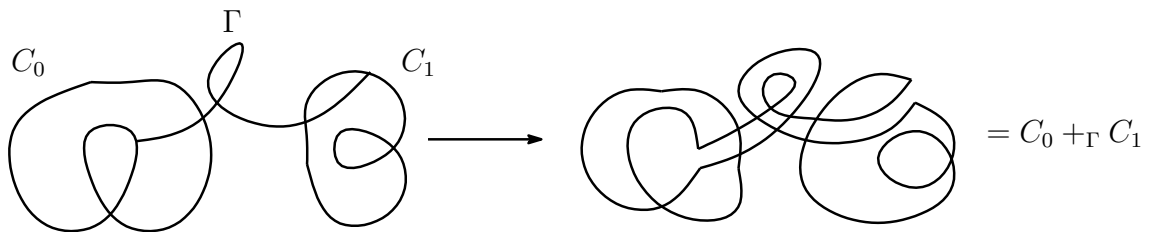


図 5: strange sum

(2) $J^-(K_0) = -1, J^-(K_{i+1}) = -3i (i = 0, 1, \dots)$

となるものが一意的存在する.

これらの不変量が存在することの証明については [1] を参照して頂きたい.

4. 一般化された連結和

定義 17. C_0, C_1 を generic 閉曲線とする. C_0, C_1 に対し generic な曲線 $\Gamma (\cong [0, 1])$ で, 端点の一つが C_0 上に, もう一つの端点が C_1 上にあるものを橋 (bridge) とよぶ.

定義 18. 橋 Γ に沿った一般化された連結和を, 図 4 によって定まる閉曲線の足しあわせとする.

必要に応じて足し合わせた曲線に向きを入れて考え, それに矛盾が無いように足し合わせる 2 つの曲線にそれぞれ向きを与える.

定義 19. C_0, C_1 を 2 つの generic 閉曲線とする. $C_0 \cap C_1 = \emptyset$ のときの一般化された連結和を strange sum と呼ぶ. 図 5 が strange sum の例である.

定義 20. 定義 19 と同じ仮定で, 更に Γ の 2 重点の個数 $n_\Gamma = 0$ のとき, $C_0 +_\Gamma C_1$ を連結和 (connected sum) と呼び, 単に $C_0 + C_1$ で表す (図 6).

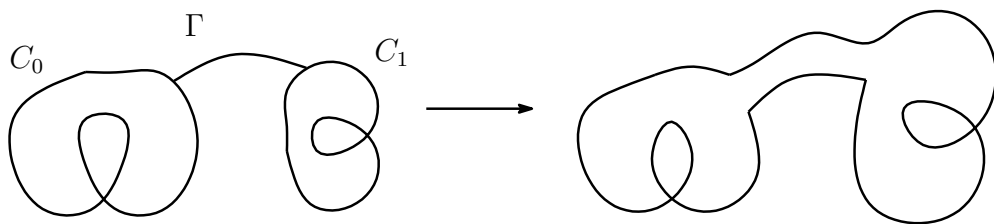


図 6: 連結和

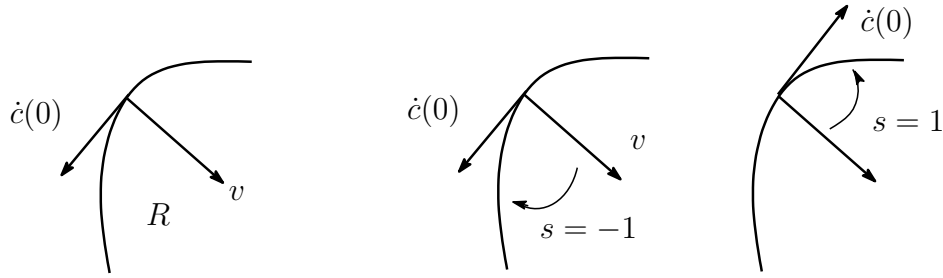


図 7: $s = \pm 1$ の決め方

定理 21 ([1]). 連結和に対して Arnold 不変量は加法的である. つまり C_0, C_1 を generic 閉曲線とすると

$$\begin{aligned} J^\pm(C_0) + J^\pm(C_1) &= J^\pm(C_0 + C_1), \\ St(C_0) + St(C_1) &= St(C_0 + C_1). \end{aligned}$$

定理 22 ([1]). Strange sum に関して, St は加法的である.

5. Alexander numbering, 法線指数, 曲線の分離

$C \subset \mathbb{R}^2$ を向きについていない generic 閉曲線とする. Mendes de Jesus-Romero Fuster が J^\pm に関して, 一般化された連結和の特殊な場合に関する加法的性を得ている (定理 38). それを更に一般化することを目標としている.

定義 23. $c: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を向き付けられた閉曲線とし, $C := c(S^1)$ とおく. R を $\mathbb{R}^2 \setminus C$ の連結成分の 1 つとし, p を R 内の任意の点とする.

$$e^{i\theta(t)} = \frac{c(t) - p}{|c(t) - p|}$$

となる連続関数 $\theta: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ を選ぶとき

$$\text{ind}^R(c) := \frac{\theta(2\pi) - \theta(0)}{2\pi}$$

を c に関する R の Alexander numbering と呼ぶ.

注意 24. Alexander numbering は p の選び方には依存しないが, 曲線の向きには依存する.

$x \in C$ を 2 重点でない点, v を x における C の単位法ベクトルとする. (x, v) に対して $\text{ind}_v(C) \in \mathbb{Z}$ を次のように定義する.

定義 25. R を v が指し示す $\mathbb{R}^2 - C$ の連結成分とする. このとき C のパラメータ c を一つ選んで

$$\text{ind}_v(C) := s \cdot \text{ind}^R(c)$$

とおき, C の v 方向の法線指数とよぶ. ただし, $s = \pm 1$ は, R から見て曲線が x の近傍で右(左)に進むとき $+1$ (-1) である (図 7).

補題 26. $\text{ind}_v(C)$ はパラメータ c の取り方によらず定まる. 特に $\text{ind}_v(C)$ は C の向きに関係なく定まる.

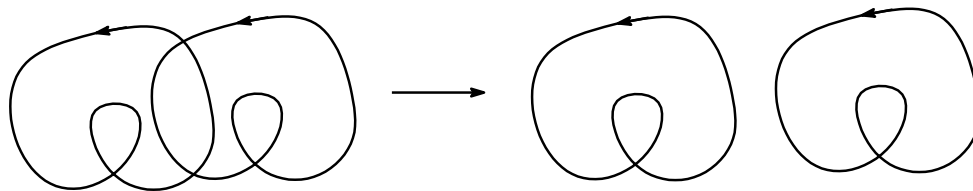


図 8: 分離の例

定義 27. C_0, C_1 を閉曲線とする. この2つの曲線を正則ホモトピーで動かす事で $C_0 \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$, $C_1 \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$ となるようにする操作を分離 (separation) と呼ぶ. 分離を行ったあとの2つの閉曲線 C_0, C_1 は分離されている (separated) という.

定義 28. A を2重点とする. A を1番目の速度ベクトルの向きに出発し, 次に A に戻ってくるまでの部分のパラメータ $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ をえらぶ. $\theta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$e^{i\theta(x)} = \frac{c(x) - c(0)}{|c(x) - c(0)|} \quad (0 < x < 1), \quad e^{i\theta(0)} = \frac{\dot{c}(0)}{|\dot{c}(0)|}, \quad e^{i\theta(1)} = -\frac{\dot{c}(1)}{|\dot{c}(1)|}$$

を満たす連続関数とする. このとき

$$\frac{2(\theta(1) - \theta(0))}{\pi}$$

を2重点 A の第一半指数 (half index) とよび, $i_1(A)$ とかく. A を2番目の速度ベクトルの向きに出発して同様に定義される値を A の第二半指数とよび, $i_2(A)$ と書く.

注意 29. 半指数 i_1, i_2 は θ の選び方によらない.

定義 30. 向きのついた generic 閉曲線 c の2重点 A に対し

$$i(A) = i_1(A) - i_2(A)$$

を A の指数 (index) とよぶ.

補題 31. 2重点の半指数は曲線の向きに依存するが, 指数は向きに依存しない.

定義 32. c を, 2重点 A_1, \dots, A_n を持つ, 向きのついた generic 閉曲線とする. このとき $I^\pm(c)$ を

$$I^\pm(c) = \frac{\sum_{k=1}^n i(A_k) \pm 2n}{4}$$

と定義する.

2重点の指数が曲線の向きによらないから, I^\pm も曲線の向きに関係なく定まり, 次の関係が成り立つ.

定理 33. $J^\pm = I^\pm - 3St$.

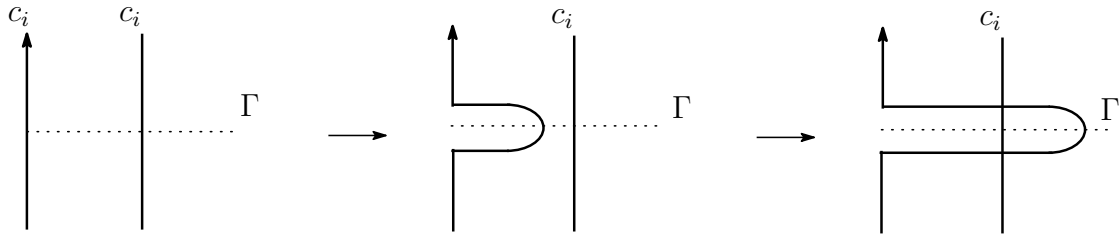


図 9: Push appendix による交点の増加の様子

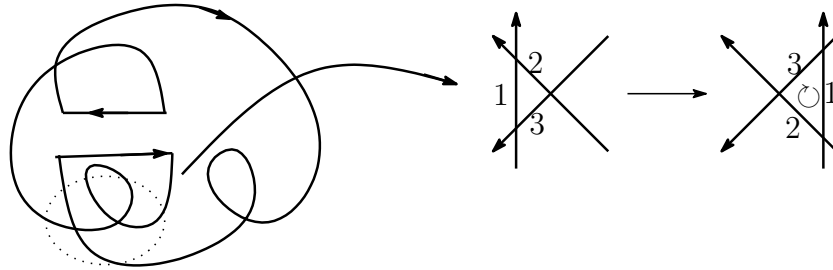


図 10: 和に関する3重点通過する辺の向き入れ方

6. strange sum に関する J^\pm の加法性

定理 34. C_0, C_1 を分離された generic 閉曲線とする. $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を C_0, C_1 をつなぐ橋のパラメータとし, $\Gamma := \gamma([0, 1])$ の2重点の個数を n_Γ とする. このとき

$$J^\pm(C_0 +_\Gamma C_1) = J^\pm(C_0) + J^\pm(C_1) + \text{ind}_{\gamma(0)}(C_0) + \text{ind}_{-\gamma(1)}(C_1) \pm 2n_\Gamma \pm |\text{Int}\Gamma \cap (C_0 \cup C_1)|.$$

証明の概要だけ記す. $C_0 +_\Gamma C_1$ の向きを一つ選び, その向きに矛盾がないように C_i ($i = 0, 1$) の向きを選ぶ. C_i の Γ に沿った push appendix という操作 [1] を考える (図9参照). この変形によって, $C_0 +_\Gamma C_1 = C'_0 + C'_1$ (右辺は連結和) となるような C'_i になるまで変形する. このとき C_i から C'_i への変形の途中での接触の様子を調べることで

$$I^\pm(C'_i) = I^\pm(C_i) + \text{ind}_{(-1)^i \gamma(i)}(C_i) \pm 2n_\Gamma \pm |\text{Int}\Gamma \cap C_i|$$

が得られる. これを定理33に適用すれば結果を得る.

7. 曲線の和から自然に入る向きに関する曲線の分離の際の接触回数

C_0 と C_1 を generic 閉曲線として変えないまま分離するとき, C_0 と C_1 は分離の途中で何度か接触や3重点通過を起こす. 例えば図8の場合, 直接接触や3重点通過はなく, 負の逆接触を1回起こすように分離することができる.

定義 35. C_0, C_1 を generic 閉曲線とし, Γ を C_0, C_1 を結ぶ橋とする. それぞれの向き c_0, c_1 を, $c_0 +_\gamma c_1$ に矛盾がないように選ぶ. c_0, c_1 を分離する際の3重点通過の符号は $(-1)^q$ によって与える. ただし vanishing / new born triangle の辺順序の付け方は, $c_0 +_\gamma c_1$ から自然に決まるものとする.

定義 36. c_0, c_1 を向きのついた閉曲線とし, Γ を C_0, C_1 を結ぶ橋とする. それぞれの向き c_0, c_1 を, $c_0 +_\gamma c_1$ に矛盾がないように選ぶ. c_0 と c_1 を generic 閉曲線として変えないまま分離するとき,

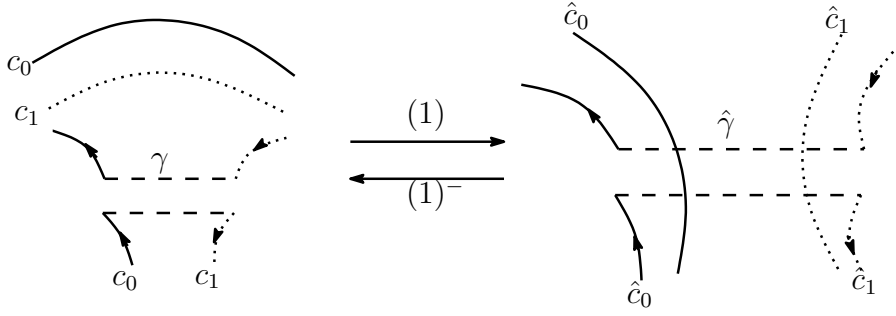


図 11: 曲線同士の交差の解消

- $T_{\Gamma}^{+}(c_0, c_1)$ を, c_0 と c_1 の間で起こる正の直接接触の回数から負の直接接触の回数を引いた値,
- $T_{\Gamma}^{-}(c_0, c_1)$ を, c_0 と c_1 の間で起こる正の逆接触の回数から負の逆接触の回数を引いた値,
- $T_{\Gamma}^{St}(c_0, c_1)$ を, c_0 と c_1 の間で起こる正の3重点通過の回数から負の3重点通過の回数を引いた値,

と定める.

これらは Γ に依存する値である. 混同のおそれが無い場合には Γ を省略し, $T^{\pm}(c_0, c_1)$, $T^{St}(c_0, c_1)$ などとも書く.

これらの値は [2] で導入された値だが, その計算方法は [2] では述べられていないので, 本稿の §10 で計算方法を与える,

8. 一般化された連結和の特別な場合に関する J^{\pm} の加法性

Γ は generic 閉曲線 C_0 と C_1 の間の橋で, そのパラメータ $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma([0, 1]) = \Gamma$ は $\gamma(i) \in C_i$ ($i = 0, 1$) となるように選ぶ. C_i の向き c_i を選ぶ場合は, $c_0 +_{\gamma} c_1$ に矛盾なく向きが入るものとする.

定義 37. C_0, C_1 を generic 閉曲線, Γ を C_0, C_1 の間の橋とする. $\Gamma \cap C_1$ 上の点 x について, C_1 と C_0 が $x, \gamma(0)$ において同じ向きであるとは, $\gamma(0)$ における C_0 の速度ベクトル (を Γ に沿って x まで平行移動したもの) が x における C_1 の速度ベクトルと $\pi/2$ 未満の角をなすこと, そうでないとき, C_1 と C_0 は $x, \gamma(0)$ において逆の向きであるという.

同様に, $\Gamma \cap C_0$ 上の点 y について, C_0 と C_1 が $y, \gamma(1)$ において同じ向きであるとは, $\gamma(1)$ における C_1 の速度ベクトル (を Γ に沿って y まで平行移動したもの) が y における C_0 の速度ベクトルと $\pi/2$ 未満の角をなすこと. そうでないとき, C_0 と C_1 は $y, \gamma(1)$ において逆の向きであるという.

定理 38 ([2]). Generic 閉曲線 C_0, C_1 を結ぶ橋 Γ が $\Gamma \cap (C_0 \cup C_1) = \emptyset$ かつ $n_{\Gamma} = 0$ を満たすとき

$$J^{\pm}(C_0 +_{\Gamma} C_1) = J^{\pm}(C_0) + J^{\pm}(C_1) - 2T_{\Gamma}^{\pm}(C_0, C_1) + 2(\text{ind}_{\gamma(0)}(C_0) + \text{ind}_{\gamma(1)}(C_1)).$$

ただし Γ のパラメータ γ は $\gamma(i) \in C_i$ ($i = 0, 1$) となるように選ぶ.

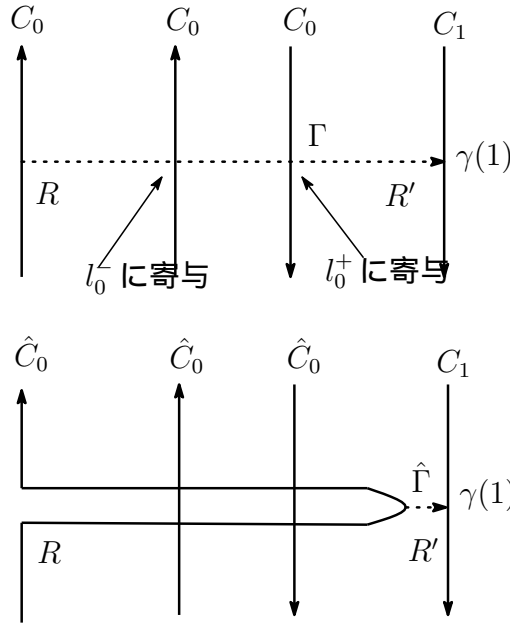


図 12: $s = +1$ のときの push appendix の様子

証明の概要だけ記す. 図 11 の (1) のように, c_0 を $-\dot{\gamma}(0)$ 方向に, c_1 を $\dot{\gamma}(1)$ 方向に平行移動して分離する. 分離後の曲線は \hat{c}_0, \hat{c}_1 で表すことにする. この変形に合わせて γ を引き伸ばして得られる曲線を $\hat{\gamma}$ とする. このとき $\hat{c}_0 +_{\hat{\gamma}} \hat{c}_1$ は $\hat{\gamma}$ に関する strange sum になっている. 今の状況では $n_{\hat{\gamma}} = 0$ だから, 定理 34 を適用する.

9. 一般化された連結和に関する J^\pm の加法性

定理 38 を使って, 一般化された連結和に関する J^\pm の加法性について考える.

補題 39. C_0, C_1 を generic 閉曲線とし, $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を C_0 と C_1 を結ぶ橋で, $\gamma(0) \in C_0$, $\gamma(1) \in C_1$ となるものとする. C_0 に $\Gamma := \gamma([0, 1])$ に沿った push appendix を行い, $C_0 +_\Gamma C_1 = \hat{C}_0 +_{\hat{\Gamma}} C_1$ で, $\hat{\Gamma}$ は自己交差を持たず, $\text{Int} \hat{\Gamma} \cap C_i = \emptyset$ となるような \hat{C}_0 に変形する (図 12). $y \in \text{Int} \Gamma \cap \hat{C}_0$ で, \hat{C}_0 と C_1 が $y, \gamma(1)$ において同じ向きであるようなものの数を l_0^+ , 逆向きであるようなものの数を l_0^- とおく. このとき

$$\text{ind}_{\dot{\gamma}(0)}(\hat{C}_0) = \text{ind}_{\dot{\gamma}(0)}(C_0) - l_0^- + l_0^+$$

が成り立つ.

定理 40. C_0, C_1 を generic 閉曲線とし, $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を C_0 と C_1 を結ぶ橋で, $\gamma(0) \in C_0$, $\gamma(1) \in C_1$ とする. $\Gamma \cap C_i$ ($i = 0, 1$) 上の点で, Γ に関して $\gamma(i+1)$ と同じ向きである点の個数を l_i^+ とおき, 逆向きの点の個数を l_i^- とおく. ただし $\gamma(2) = \gamma(0)$ とみなす. このとき

$$\begin{aligned} J^\pm(C_0 +_\Gamma C_1) &= J^\pm(C_0) + J^\pm(C_1) - 2T^\pm(C_0, C_1) \\ &\quad + 2(\text{ind}_{\dot{\gamma}(0)}(C_0) + \text{ind}_{-\dot{\gamma}(1)}(C_1)) \pm 2n_\gamma \pm 2(l_0^\pm + l_1^\mp). \end{aligned}$$

証明. Γ に沿った c_0 の push appendix を考え, $c_0 +_\Gamma c_1 = \hat{c}_0 +_{\hat{\Gamma}} c_1$ となるようにする. ただし $\hat{\Gamma}$ は定理 38 の Γ と同じ条件を満たすものとする.

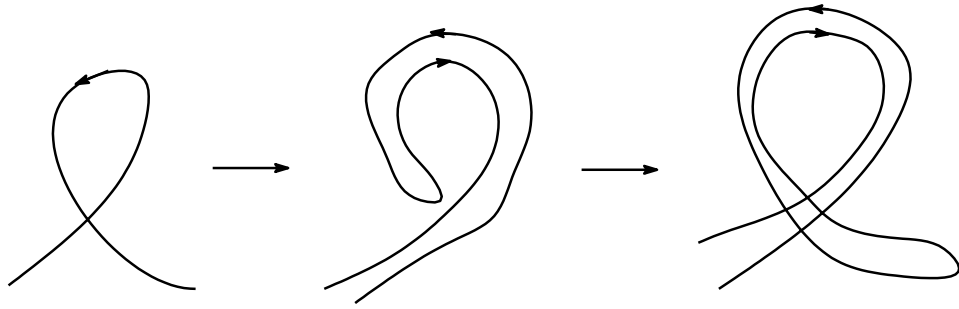


図 13: γ 由来の自己接触

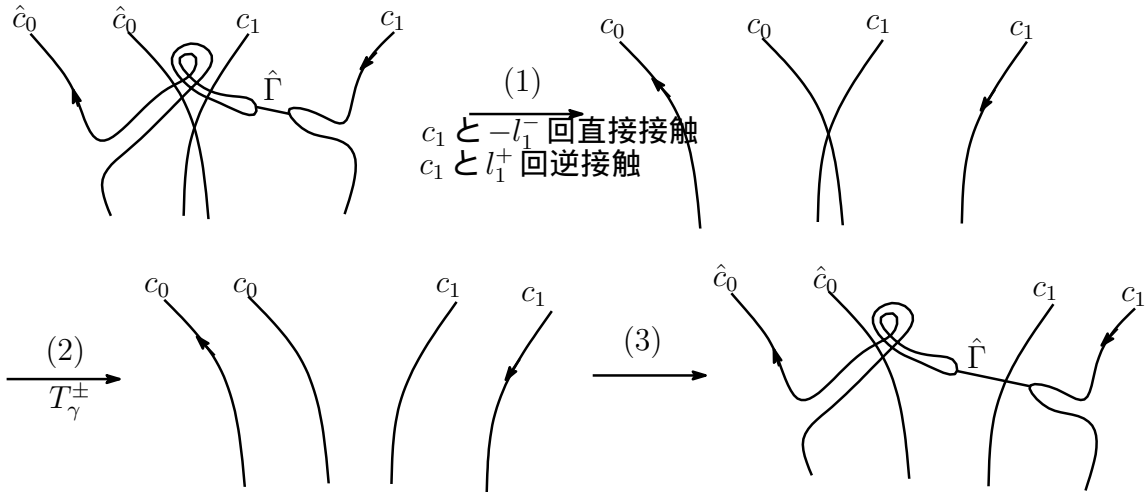


図 14: $T^\pm(\hat{c}_0, c_1)$ の計算手順

Push appendix によって生じる接触回数は次のとおりである。まず, c_0 と Γ の交点に由来して, l_0^- 回の直接接触と l_0^+ 回の逆接触が起こる。 γ がもつ 2 重点由来の自己接触は図 13 のようになっていて, 2 重点 1 つに対し, 直接接触が 1 回, 逆接触が 1 回起きている。よって

$$J^+(\hat{c}_0) = J^+(c_0) + 2l_0^- + 2n_\gamma, \quad J^-(\hat{c}_0) = J^-(c_0) - 2l_0^+ - 2n_\gamma.$$

$T^\pm(\hat{c}_0, c_1)$ を, \hat{c}_0 と c_1 の分離を次のような手順に分解することにより計算する:

- (1) \hat{c}_0 を一度 c_0 に戻し,
- (2) c_0 と c_1 を分離し,
- (3) c_0 を \hat{c}_0 に戻す。

という手順に分解して計算する。それぞれ図 14 より

- (1) のとき直接接触が $-l_1^-$ 回, 逆接触が $-l_1^+$ 回起こり,
- (2) のとき直接接触が $T^+(c_0, c_1)$ 回, 逆接触が $T^-(c_0, c_1)$ 回起こり,
- (3) では c_0 と c_1 の間で接触が起こらない。

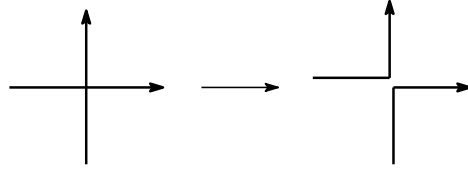


図 15: smoothing

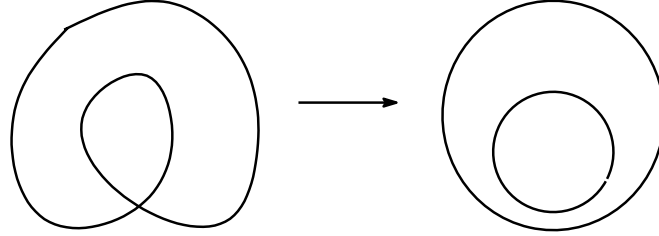


図 16: K_2 の smoothing

図 14 は $s = 1$ の場合だが, $s = -1$ の場合も同様である. よって

$$T_{\hat{\gamma}}^+(\hat{c}_0, c_1) = T_{\gamma}^+(c_0, c_1) - l_1^-, \quad T_{\hat{\gamma}}^-(\hat{c}_0, c_1) = T_{\gamma}^-(c_0, c_1) + l_1^+$$

となる. また $\text{ind}_{\dot{\gamma}(0)}(c_0) + l_0^- - l_0^+ = \text{ind}_{\dot{\hat{\gamma}}(0)}(\hat{c}_0)$ である. $c_0 +_{\Gamma} c_1 = \hat{c}_0 +_{\hat{\Gamma}} c_1$ であり, $\hat{c}_0 +_{\hat{\Gamma}} c_1$ には定理 38 を適用できるから

$$\begin{aligned} J^+(c_0 +_{\Gamma} c_1) &= J^+(\hat{c}_0 +_{\hat{\Gamma}} c_1) \\ &= J^+(\hat{c}_0) + J^+(c_1) - 2T_{\hat{\Gamma}}^+(\hat{c}_0, c_1) + 2(\text{ind}_{\dot{\hat{\gamma}}(0)}(\hat{c}_0) + \text{ind}_{-\dot{\hat{\gamma}}(1)}(c_1)) \\ &= J^+(c_0) + J^+(c_1) + 2l_0^+ + 2n_{\Gamma} - 2(T_{\Gamma}^+(c_0, c_1) - l_1^-) \\ &\quad + 2(\text{ind}_{\dot{\gamma}(0)}(\hat{c}_0) + l_0^- - l_0^+ + \text{ind}_{-\dot{\gamma}(1)}(c_1)) \\ &= J^+(c_0) + J^+(c_1) + 2n_{\Gamma} - 2T_{\Gamma}^+(c_0, c_1) \\ &\quad + 2(\text{ind}_{\dot{\gamma}(0)}(c_0) + \text{ind}_{-\dot{\gamma}(1)}(c_1)) + 2(l_0^+ + l_1^-). \end{aligned}$$

同様にして計算すると

$$J^-(c_0 +_{\Gamma} c_1) = J^-(c_0) + J^-(c_1) - 2n_{\Gamma} - 2T_{\Gamma}^-(c_0, c_1) + 2(\text{ind}_{\dot{\gamma}(0)}(c_0) + \text{ind}_{-\dot{\gamma}(1)}(c_1)) - 2(l_0^- + l_1^+).$$

□

10. T_{Γ}^{\pm} と T_{Γ}^{St} の計算方法

定義 41. c を向き付けられた generic 閉曲線とする. 2重点の近くで c をつなぎかえる操作の事を, c を smoothing すると言う (図 15 参照).

smoothing の結果, 任意の generic 閉曲線は単純閉曲線の和集合になる. 例えば K_2 を smoothing した結果, 図 16 のようになる. C_0, C_1 を generic 閉曲線とする. C_0, C_1 を結ぶ橋 Γ があって $C_0 +_{\Gamma} C_1$ に向きを選んで, これに合うように C_0, C_1 に向きが入っているものとする. このとき C_0, C_1 を分離するときの符号を含めた接触回数 $T_{\Gamma}^{\pm}(C_0, C_1)$ について考える.

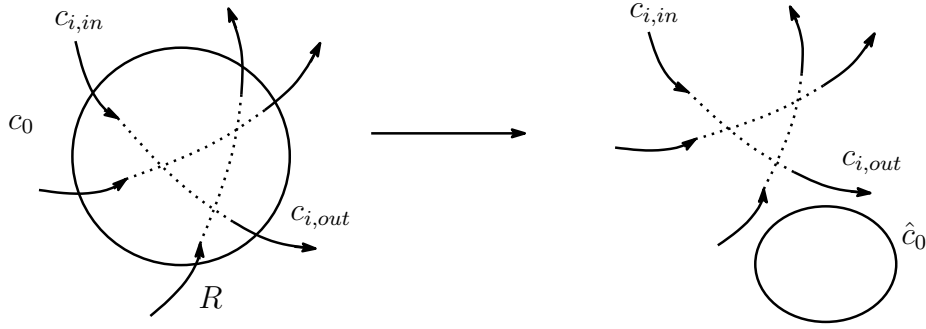


図 17: C_1 の領域指数最大領域への分離

補題 42. 上の状況で, C_0 を smoothing して単純閉曲線 C_0^k ($k = 1, 2, \dots, n$) に分解されたとする. 各 C_0^k には C_0 から導かれる向きを入れる. このとき

$$T_{\Gamma}^{\pm}(C_0, C_1) = \sum_{k=1}^n T_{\Gamma}^{\pm}(C_0^k, C_1).$$

c_0, c_1 を向き付けられた generic 閉曲線で, c_0 は単純閉曲線であるとする. $c_{i,in}, c_{i,out}$ ($i = 1, 2, \dots$) をそれぞれ c_1 における $c_0 \cap c_1$ の近傍で, c_0 の内部へ c_1 が入る部分と出る部分とする. また c'_i を, c_0 が囲む有界領域に含まれている, $c_{i,in}$ から $c_{i,out}$ までの部分とする. c'_i ($i = 1, 2, \dots, m$) によって, c_0 は $2m$ 個に分割される. 各弧 r_1, \dots, r_{2m} はある連結成分 $R_i \subset \mathbb{R}^2 \setminus c_1$ に含まれている. $\text{ind}^{R_i}(c_1)$ が最大になる R_i ($= R$) を選び, $\hat{c}_0 \subset R$ となるように c_0 を分離する (図 17).

定理 43. c_0, c_1 は向き付けられた閉曲線で, c_0 は単純閉曲線であるとする. $\mathbb{R}^2 \setminus c_1$ のある連結成分 R に対し, $c_0 \subset R$ となっているとする. このとき

$$T^{\pm}(c_0, c_1) = \text{ind}(c_0) \cdot \text{ind}^R(c_1).$$

補題 44. c_0, c_1 を向き付けられた generic 閉曲線とする. ある連結成分 $R \subset \mathbb{R}^2 \setminus c_1$ に対し, $c_0 \subset R$ になっているとする. このとき

$$T^{\pm}(c_0, c_1) = \text{ind}(c_0) \cdot \text{ind}^R(c_1).$$

これらによって, $T^{\pm}(c_0, c_1)$ は以下のように計算できる:

定理 45. c_0 を向き付けられた単純閉曲線, c_1 を向き付けられた generic 閉曲線とする. c_0 と交わるような c_1 の補領域のうち, 1 番領域指数が高い領域を R とする. このとき

$$T^{\pm}(c_0, c_1) = \sum_{i=1}^m (\text{ind}(c''_i) \cdot \text{ind}(c_0) - \varepsilon_{c_0, i}^{\pm}) + \text{ind}(c_0) \cdot \text{ind}^R(c_1).$$

ただし, $\varepsilon_{c_0, i}^{\pm}$ は

- $\text{ind}(c) = 1$ のとき, $\varepsilon_{c_0, i}^+ = 0$, $\varepsilon_{c_0, i}^- = -1$,
- $\text{ind}(c) = -1$ のとき, $\varepsilon_{c_0, i}^+ = 1$, $\varepsilon_{c_0, i}^- = 0$.

であり, c''_i は図 18 の操作によって, c'_i の右側に作る閉曲線である.

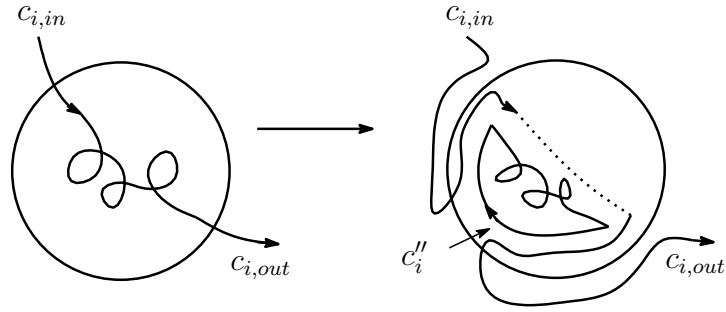


図 18: C' から C'' の作成

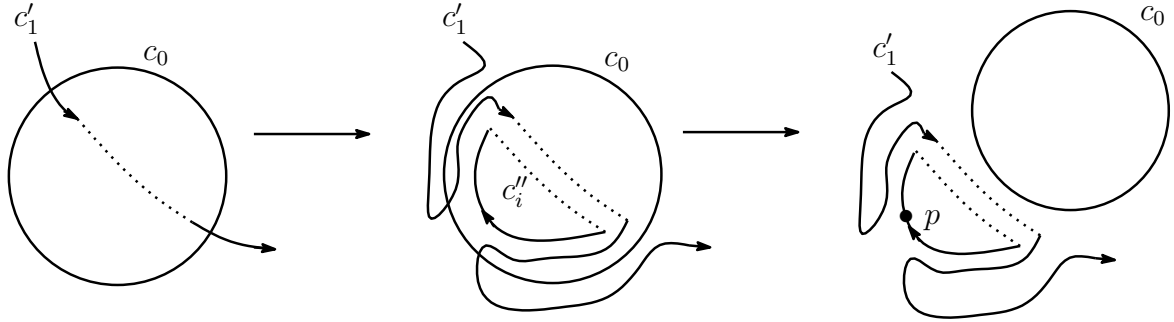


図 19: C'' の作成と分離

証明. c_0 を \hat{c}_0 まで移動するときの c_1 との接触回数を X とおくと,

$$T^\pm(c_0, c_1) = X + \text{ind}(\hat{c}_0) \cdot \text{ind}^R(c_1).$$

となる. X は c_0 を各 c'_i から分離するときの接触回数の和に等しい. それぞれの接触回数は c_0 と c''_i の接触回数から点 p (図 19) における接触回数を引いたものに等しいから

$$T^\pm(c_0, c''_i) - (p \text{ における } c_0, c''_i \text{ の接触回数})$$

となる. 一方, p における c_0, c''_i の接触回数は

- $\text{ind}(c_0) = 1$ のとき, 逆接触が +1 回,
- $\text{ind}(c_0) = -1$ のとき, 直接接触が +1 回

であるから, p における c_0, c''_i の接触回数は $\varepsilon_{c_0, i}^\pm$ に等しく

$$T^\pm(c_0, c''_i) - (p \text{ における } c_0, c''_i \text{ の接触回数}) = \text{ind}(c''_i) \cdot \text{ind}(c_0) - \varepsilon_{c_0, i}^\pm$$

となる. $\text{ind}(c_0) = \text{ind}(\hat{c}_0)$ であり, 全ての c'_k ($k = 1, 2, \dots, m$) について同じ議論を行い, 和を取れば

$$T^\pm(c_0, c_1) = \sum_{i=1}^m (\text{ind}(c''_i) \cdot \text{ind}(c_0) - \varepsilon_{c_0, i}^\pm) + \text{ind}(c_0) \cdot \text{ind}^R(c_1)$$

を得る. □

c_0 が単純閉曲線とは限らない場合, c_0 を smoothing して得られた単純閉曲線 c_0^1, \dots, c_0^k に対し定理 45 の議論を繰り返すと次の事が言える.

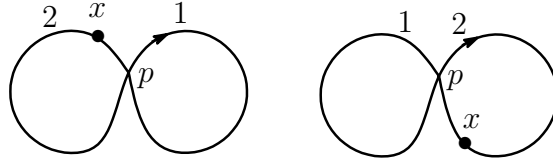


図 20: $\varepsilon_x(p)$ が異なる例

定理 46. c_0, c_1 を向き付けられた generic 閉曲線とする. c_0 を smoothing して単純閉曲線 $c_0^1, c_0^2, \dots, c_0^k$ に分かれたとする. このとき

$$T^\pm(c_0, c_1) = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^{m_i} \left(\text{ind}(c''_{i,j}) \cdot \text{ind}(c_0^i) - \varepsilon_{c_0^i, j}^\pm \right) + \text{ind}(c_0^i) \cdot \text{ind}^{R_i}(c_1) \right).$$

ただし $c''_{i,j}$ は各 c_0^j ($j = 1, 2, \dots, k$) が切り取る c_1 の弧 $c'_{i,j}$ に対して図 18 の操作を行ってできた閉曲線 c'' であり, R_i は各 c_0^j を含む, $c'_{i,j}$ で分けられた領域のうち, $\text{ind}^{R_i}(c_1)$ が最大になる領域である.

定義 47. C_0 を generic 閉曲線とし, その向きを c_0 とする. また x を c_0 上の点とする. x が曲線の向きに沿って動き, c_0 の 2 重点 p を 2 回通過するとき, 1 回目と 2 回目の速度ベクトルをそれぞれ v_1, v_2 とするとき, 順序づけられた組 v_1, v_2 が平面の正の向きを表すとき, p は x に関して正であるといい, そうでないときは負であるという. また x に関する p の符号 $\varepsilon_x(p)$ を p が x に関し正のとき $\varepsilon_x(p) = 1$, 負のとき $\varepsilon_x(p) = -1$ と定める.

図 20 の場合, 左は $\varepsilon_x(p) = 1$, 右は $\varepsilon_x(p) = -1$ である.

補題 48. C_0, C_1 を generic 閉曲線とし, $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を C_0 と C_1 を結ぶ橋で, $\gamma(0) \in C_0$, $\gamma(1) \in C_1$ とする. C_i ($i = 0, 1$) の向き c_i を, $c_0 + \gamma c_1$ に矛盾がないように選ぶ. $\gamma(0) = x_0$ とする. c_0 と c_1 を分離する途中で c_0 の 2 重点 p が左から右へ c_1 を横切るとき, この 3 重点通過の符号は, $\varepsilon_{x_0}(p)$ に等しい.

定理 49. C_0, C_1 を generic 閉曲線とし, $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を C_0 と C_1 を結ぶ橋で, $\gamma(0) \in C_0$, $\gamma(1) \in C_1$ となるものとし, $\Gamma := \gamma([0, 1])$ とする. C_i ($i = 0, 1$) の向き c_i を, $c_0 + \gamma c_1$ に矛盾がないように選ぶ. また $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$ とする. c_0 の 2 重点 p_0^1, \dots, p_0^m , c_1 の 2 重点 p_1^1, \dots, p_1^n が, それぞれ $\mathbb{R}^2 \setminus c_1$ の連結成分 R_0^k , $\mathbb{R}^2 \setminus c_0$ の連結成分 R_1^l ($k = 1, \dots, m, l = 1, \dots, n$) に含まれているとする. このとき

$$T_\Gamma^{St}(C_0, C_1) = \sum_{k=1}^m \varepsilon_{x_0}(p_0^k) \cdot \text{ind}^{R_0^k}(c_1) + \sum_{l=1}^n \varepsilon_{x_1}(p_1^l) \cdot \text{ind}^{R_1^l}(c_0).$$

証明. c_0 の 2 重点 p_0^k が領域 R_0^k から c_1 の外部領域まで移動する間に, c_1 を左から右へ l_1 回, 右から左へ l_2 回通過するとする. p_0^k が c_1 を通過することによって起こる 3 重点通過の回数は,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x_0}(p_0^k) \cdot l_1 - \varepsilon_{x_0}(p_0^k) \cdot l_2 &= \varepsilon_{x_0}(p_0^k) \cdot (l_1 - l_2) \\ &= \varepsilon_{x_0}(p_0^k) \cdot \text{ind}^{R_0^k}(c_1). \end{aligned}$$

これを c_0, c_1 の全ての 2 重点に対して同様の考察をすると

$$T_{\Gamma}^{St}(C_0, C_1) = \sum_{k=1}^m \varepsilon_{x_0}(p_0^k) \cdot \text{ind}^{R_k^1}(c_1) + \sum_{l=1}^n \varepsilon_{x_1}(p_1^l) \cdot \text{ind}^{R_l^0}(c_0).$$

□

参考文献

- [1] Arnol'd, V. I. Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications. With an appendix by F. Aicardi. Adv. Soviet Math., 21, Singularities and bifurcations, 33–91, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [2] Mendes de Jesus, C.; Romero Fuster, M. C. Bridges, channels and Arnold's invariants for generic plane curves. Topology Appl. 125 (2002), no. 3, 505–524.
- [3] Whitney, H. On regular closed curves in the plane. Compositio Math. 4 (1937), 276–284.