

# 結び目の幽霊指標，指標多様体と可換ノットコンタクトホモロジー

長郷 文和 (名城大学)\*1  
鈴木 心之助 (名城大学)\*2

## 概要

本稿では，(5,6) トーラス結び目の幽霊指標を与え，それを用いての Ng 予想の反例を与える．

## 1. 本研究の背景

論文 [14] で，Ng はマグナス表現に対応する DGA を用いたブレード群の表現からホモロジーを構成した．このホモロジーはノットコンタクトホモロジー (knot contact homology) として現在知られている結び目不変量である．また，次数 0 の可換ノットコンタクトホモロジー ((degree 0 abelian knot contact homology, 0 次の可換化) に注目すると，このホモロジーはブレイド表示とは限らない結び目の射影図からも計算することができるということを Ng は発見した ([14, Section 4.3]). 本稿では，次数 0 の可換ノットコンタクトホモロジーについて，この視点から考察していく．

$\mathcal{A}_n^{ab}$  を不定元  $a_{ij} (1 \leq i < j \leq n, a_{ii} = -2)$  から生成される  $\mathbb{Z}$  上の多項式環とする． $n$  交点の結び目の射影図  $D_K$  から与えられる結び目  $K$  について， $\mathcal{I}_{D_K} \subset \mathcal{A}_n^{ab}$  を元  $a_{lj} + a_{lk} + a_{li}a_{ij}$  から生成されるイデアルと定義する．ここで， $i$  は  $D_K$  の交差の上部を通る弧であり， $j, k$  は下部を通る弧である (このような三つ組  $(i, j, k)$  をウィルティンガートリプル (Wirtinger triple) とよぶ)．また， $l = 1, \dots, n$  であり，三つ組  $(i, j, k)$  は結び目の射影図  $D_K$  の  $n$  個の交点全てにわたる．つまり， $\mathcal{I}_{D_K}$  は以下のように表される．

$$\mathcal{I}_{D_K} = \langle a_{lj} + a_{lk} + a_{li}a_{ij} = 0 \mid (i, j, k): \text{ any Wirtinger triple, } l \in \{1, \dots, n\} \rangle.$$

このとき，結び目  $K$  の次数 0 の可換ノットコンタクトホモロジー  $HC_0^{ab}(K)$  は，多項式環の商  $\mathcal{A}_n^{ab}/\mathcal{I}_{D_K}$  として定義される：

$$HC_0^{ab}(K) := \frac{\mathbb{Z}[a_{12}, \dots, a_{nn-1}]}{\langle a_{lj} + a_{lk} + a_{li}a_{ij} = 0 \mid (i, j, k): \text{ any Wirtinger triple, } l \in \{1, \dots, n\} \rangle}.$$

一方， $\Sigma_2 K$  を結び目  $K$  で分岐する 3 次元球面  $S^3$  の二重分岐被覆とすると，L. Ng は [14] において， $HC_0^{ab}(K)$  が，以下のように計算される基本群  $\pi_1(\Sigma_2 K)$  の指標多様体の座標環と密接に関係していると予想し，2 橋結び目についてこの予想を証明した．以下にその予想を述べる．

まず， $p: C_2 K \rightarrow E_K$  を結び目外部空間  $E_K$  の二重巡回被覆とする．ここで， $C_2 K$  のメリディアン  $\mu_2$  の像， $p(\mu_2)$  は  $E_K$  のメリディアン  $m_i$  の平方  $m_i^2$  である．被覆射影  $p$  が

本研究は科研費 (課題番号:26800046) の助成を受けたものである．

\*1 〒468-8502 愛知県名古屋市中天白区塩釜口 1-501 名城大学理工学部数学科

e-mail: fukky@meijo-u.ac.jp

\*2 〒468-8502 愛知県名古屋市中天白区塩釜口 1-501 名城大学大学院理工学研究科 修士 1 年

e-mail: nosuke.1128.suzu@gmail.com

単射準同形写像  $p_* : \pi_1(C_2K) \rightarrow G(K)$  を誘導することと、 $C_2K$  が (正則) 二重分岐被覆であることから、以下の短完全系列を得る。

$$1 \rightarrow \pi_1(C_2K) \xrightarrow{p_*} G(K) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 1.$$

このとき、二重分岐被覆  $\Sigma_2K$  は自明なソリッドトーラスを埋め込むことにより  $C_2K$  から構成される。この設定から、以下を得る。

$$\pi_1(\Sigma_2K) \cong \text{Im}(p_*) / \langle\langle m_1^2 \rangle\rangle.$$

但し、 $\langle\langle * \rangle\rangle$  は群  $\langle * \rangle$  の正規閉包である。 $\mathfrak{R}(G)$  を  $G$  の  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  表現とする。このとき、 $\mathfrak{R}(\Sigma_2K) := \mathfrak{R}(\pi_1(\Sigma_2K))$  は以下のように表される。

$$\mathfrak{R}(\Sigma_2K) = \{ \rho_* \in \mathfrak{R}(\text{Im}(p_*)) \mid \rho_*(m_1^2) = E \}.$$

この対応を用いることで、 $\pi_1(\Sigma_2K)$  の  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  表現の指標の集合  $\mathfrak{X}(\Sigma_2K) := \mathfrak{X}(\pi_1(\Sigma_2K))$  は以下のように表される。

$$\mathfrak{X}(\Sigma_2K) = \{ \chi_{\rho_*} \mid \rho_* \in \mathfrak{R}(\text{Im}(p_*)), \rho_*(m_1^2) = E \}.$$

また、指標多様体  $X(\Sigma_2K)$  は以下のような複素空間  $\mathbb{C}^N$  内の代数的集合として表される。  $\pi_1(\Sigma_2K)$  が以下のような表示で与えられるとする。

$$\langle g_1, \dots, g_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle.$$

[5] より、すべての元  $g \in \pi_1(\Sigma_2K)$  について、トレース関数

$$t_g : \mathfrak{X}(\Sigma_2K) \rightarrow \mathbb{C}, t_g(\chi_\rho) := \text{tr}(\rho(g))$$

は  $\{t_{g_i}\}_{1 \leq i \leq n}$ ,  $\{t_{g_i g_j}\}_{1 \leq i < j \leq n}$ ,  $\{t_{g_i g_j g_k}\}_{1 \leq i < j < k \leq n}$  の多項式で与えられる。[2] より、以下で定義される写像  $t$

$$t : \mathfrak{X}(\Sigma_2K) \rightarrow \mathbb{C}^N, t(\chi_\rho) := (t_{g_i}; t_{g_i g_j}; t_{g_i g_j g_k}), N = n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$$

による  $\mathfrak{X}(\Sigma_2K)$  の像は代数的閉集合となることが知られている。これが  $\pi_1(\Sigma_2K)$  の指標多様体  $X(\Sigma_2K)$  である。一般に、有限生成群  $G$  の指標多様体  $X(G)$  は写像  $t$  の像として同様に構成される：

$$t : \mathfrak{X}(G) := \{ \chi_\rho \mid \rho \in \mathfrak{R}(G) \} \rightarrow \mathbb{C}^M.$$

さて、代数的集合  $A \subset \mathbb{C}^n$  は、座標環  $\mathbb{C}[A]$  により代数的に扱うことができる。

$$\mathbb{C}[A] := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] / \sqrt{\langle \text{polynomials in } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \text{ vanishing on } A \rangle}.$$

但し、 $\langle * \rangle$  は  $*$  により生成されるイデアルであり、 $\sqrt{\langle * \rangle}$  はその根基 (radical) である。この代数的な設定により、Ng 予想 (補正版)<sup>1</sup> の詳細を述べることができる。

<sup>1</sup> オリジナルの予想は、左辺の冪零根基 (nilradical) による商をとっていないものである。幾つかの研究から、冪零根基で補正するのが予想としては妥当であることがわかっている。

**予想 1.1 (Conjecture 5.7 in [14])** 任意の結び目  $K$  に対し, 次が成立する.

$$(HC_0^{ab}(K) \otimes \mathbb{C})/\sqrt{0} \cong \mathbb{C}[X(\Sigma_2 K)].$$

本稿では, この予想の反例を挙げる.

**定理 1.2 (cf. Theorem 3.3)** 予想 1.1 は (5.6) トーラス結び目  $T_{5,6}$  に対し成立しない.

この定理の鍵は [10] で導入された結び目の幽霊指標 (ghost character) という概念である. 以下の章では, 初めに幽霊指標について考察し,  $T_{5,6}$  についてその例を与える. 次に, 幽霊指標が, 座標環  $\mathbb{C}[X(\Sigma_2 T_{5,6})]$  と  $HC_0^{ab}(T_{5,6})$  の複素化が同型になるための障害になっていることを概説する.

## 2. 結び目の幽霊指標

### 2.1. 指標多様体 $X(K)$ のトレースフリー断面 $S_0(K)$

結び目の幽霊指標は, トレースフリー断面とよばれる結び目群の特別な  $SL_2(\mathbb{C})$  表現の指標を用いて定義される.  $G(K)$  を  $K$  の結び目群,  $\mu$  を  $K$  のメリディアンとする. このとき,  $\text{tr}(\rho(\mu)) = 0$  を満たしていれば, 表現  $\rho: G(K) \rightarrow SL_2(\mathbb{C})$  はトレースフリー (trace-free)<sup>2</sup> であるという. その  $\rho$  の指標をトレースフリー指標という. トレースフリー指標の集合  $\mathfrak{S}_0(K)$  は,  $\mathfrak{X}(G(K))$  の部分集合であり, 以下のように表される.

$$\mathfrak{S}_0(K) = \{\chi_\rho \in \mathfrak{X}(G(K)) \mid \chi_\rho(\mu) = 0\}.$$

さらに [2] より,  $\mathfrak{S}_0(K)$  は指標多様体  $X(G(K))$  の代数的閉部分集合として実現される. それを  $S_0(K)$  と書き表す. 定義より,  $X(G(K))$  の部分集合  $S_0(K)$  は, 超平面  $t_\mu(\chi_\rho) = 0$  で切断された  $X(G(K))$  の断面として考えられる. 全てのメリディアンは共役であることから, 例えば, ヴィルティンガー (Wirtinger) 表示

$$G(K) = \langle m_1, \dots, m_n \mid r_1, \dots, r_{n-1} \rangle,$$

に対し,  $t_\mu(\chi_\rho) = 0$  は  $t_{m_i}(\chi_\rho) = 0$  ( $1 \leq i \leq n$ ) を意味する. よって, 以下の表示を得る.

$$S_0(K) = t(\mathfrak{S}_0(K)) = \left\{ (0, \dots, 0; t_{m_i m_j}(\chi_\rho); t_{m_i m_j m_k}(\chi_\rho)) \in \mathbb{C}^{n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}} \mid \chi_\rho \in \mathfrak{S}_0(K) \right\}.$$

トレースフリー断面はいくつかの興味深い性質をもっていることが知られている. 例えば, 結び目の符号数 (キャッソン-リン不変量 [7]), メタベリアン (metabelian) 表現が誘導する二重分岐被覆の構造 ([7, 12]), 次数 0 可換ノットコンタクトホモロジーとの関係 ([8]) などがある.

以下の定理はトレースフリー断面  $S_0(K)$  を計算するための強力な手段を与える.

**定理 2.1 ([9, 10], cf. Theorem 3.2 in [5])**  $G(K) = \langle m_1, \dots, m_n \mid r_1, \dots, r_n \rangle$  をヴィルティンガー表示とする. このとき,  $S_0(K)$  は以下のように与えられる  $\mathbb{C}^{\binom{n}{2} + \binom{n}{3}}$  内の代数的集合と同型である:

$$S_0(K) = \left\{ (x_{12}, \dots, x_{nn-1}; x_{123}, \dots, x_{n-2, n-1, n}) \in \mathbb{C}^{\binom{n}{2} + \binom{n}{3}} \mid (F2), (H), (R) \right\},$$

ここで, (F2), (H), (R) は以下のように定義される方程式である:

<sup>2</sup> トレースレス (traceless) 表現ともよばれる.

(F2) 基本関係式 :  $x_{ka} = x_{ij}x_{ia} - x_{ja}$   
(但し,  $1 \leq a \leq n$ ,  $(i, j, k)$  : 全てのヴィルティンガートリプル),

(H) 六角関係式 :

$$x_{i_1 i_2 i_3} \cdot x_{j_1 j_2 j_3} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_{i_1 j_1} & x_{i_1 j_2} & x_{i_1 j_3} \\ x_{i_2 j_1} & x_{i_2 j_2} & x_{i_2 j_3} \\ x_{i_3 j_1} & x_{i_3 j_2} & x_{i_3 j_3} \end{vmatrix},$$

$$(1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n, 1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq n),$$

(R) 四角関係式 :

$$\begin{vmatrix} 2 & x_{12} & x_{1a} & x_{1b} \\ x_{21} & 2 & x_{2a} & x_{2b} \\ x_{a1} & x_{a2} & 2 & x_{ab} \\ x_{b1} & x_{b2} & x_{ba} & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3 \leq a < b \leq n).$$

ここで,  $x_{ij}$  と  $x_{ijk}$  は, それぞれ表現  $\rho : G(K) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  によって定まる  $-t_{m_i m_j}(\chi_\rho)$  と  $-t_{m_i m_j m_k}(\chi_\rho)$  に対応する. よって,  $x_{ii} = 2$ ,  $x_{ji} = x_{ij}$ ,  $x_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} i_{\sigma(3)}} = \mathrm{sign}(\sigma) x_{i_1 i_2 i_3}$  が成り立つ. 但し,  $\sigma$  は次数3対称群  $\mathfrak{S}_3$  の元である.

## 2.2. 結び目の幽霊指標

結び目  $K$  に対し, 結び目群  $G(K)$  のヴィルティンガー表示を用意する.

$$G(K) = \langle m_1, \dots, m_n \mid r_1, \dots, r_n \rangle.$$

このとき, 定理 2.1 の基本関係式 (F2) から,  $\mathbb{C}^N (N = n + \binom{n}{2})$  内の代数的集合  $F_2(K)$  を定義する. すなわち,

$$F_2(K) := \left\{ (x_{12}, \dots, x_{n-1, n}) \in \mathbb{C}^{\binom{n}{2}} \mid \begin{array}{l} x_{ka} = x_{ik}x_{ia} - x_{ja} \text{ for any } 1 \leq a \leq n \\ \text{and any Wirtinger triple } (i, j, k) \end{array} \right\}.$$

$F_2(K)$  を定義している基本関係式 (F2) は,  $HC_0^{ab}(K)$  を定義している関係式と類似していることがすぐわかる. これはヒルベルトの零点定理によって以下のように理解できる. (同様の解釈は [8] で 10 年以上前に述べられている.) ヒルベルトの零点定理から, 座標環  $\mathbb{C}[F_2(K)]$  は以下のように記述される:

$$\mathbb{C}[F_2(K)] = \frac{\mathbb{C}[x_{12}, \dots, x_{nn-1}]}{\sqrt{\langle x_{ij} + x_{ik} - x_{li}x_{ij} = 0, (i, j, k): \text{ any Wirtinger triple, } a \in \{1, \dots, n\} \rangle}}.$$

このとき,  $g(a_{ij}) := -x_{ij}$ ,  $g(1) = 1$  から定義される写像  $g : HC_0^{ab}(K) \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}[F_2(K)]$  は, 自然に環準同型を与えることがわかり, その核は明らかに  $\sqrt{0}$  である. よって, 以下を得る.

**命題 2.2 (Proposition 5.2 in [10], cf. Theorem 7.5 in [8])** 任意の結び目  $K$  に対し, 次が成立する :

$$(HC_0^{ab}(K) \otimes \mathbb{C}) / \sqrt{0} \cong \mathbb{C}[F_2(K)].$$

この定理から、代数的集合  $F_2(K)$  は結び目の不変量になっていることもわかる。また、この定理により、予想 1.1 は以下のように言い換えられる。

**予想 2.3 (cf. Conjecture 1.1)** 任意の結び目  $K$  に対し、 $\mathbf{C}[F_2(K)] \cong \mathbf{C}[X(\Sigma_2 K)]$  が成立する。すなわち、 $F_2(K) \cong X(\Sigma_2 K)$  が成立する。

トレースフリー断面の話に戻ると、 $S_0(K)$  を計算する際には、まず先ほど定義した代数的集合  $F_2(K)$  を計算し、次にその  $F_2(K)$  の点において四角関係式 (R) と六角関係式 (H) を満たす点を探す。このとき、 $F_2(K)$  において  $S_0(K)$  の解にならない点が存在する可能性がある。

**定義 2.4 (結び目の幽霊指標)** もし点  $(x_{ij}) \in F_2(K)$  が (H) もしくは (R) を満たさなければ、点  $(x_{ij}) \in F_2(K)$  を  $K$  の幽霊指標 (ghost character) とよぶ。

[10, Subsection 4.1] で述べられているように、ヴィルティンガー表示に対する (H), (R) は、基本関係式 (F2) により、ブリッジ表示に対する (H), (R) に自然に縮約されることがわかる。結果として、橋指数が 4 未満の結び目については幽霊指標が存在しないことがわかる。詳細は割愛する。

計算機実験により、4 橋結び目と 5 橋結び目には幽霊指標を持つ結び目があることがわかった。例えば、[11] で考察された (4, 5) トーラス結び目  $T_{4,5}$  は橋指数が 4 であり、幽霊指標を持っている。ここでは、橋指数が 5 の (5, 6) トーラス結び目  $T_{5,6}$  についての計算を実践する。  $D$  を図 2.1 のような (5, 6) トーラス結び目の射影図とする。  $G(T_{5,6})$  のヴィルティンガー表示の生成元を与えるメリディアン  $m_1, \dots, m_{24}$  を図 2.1 のようにとる。

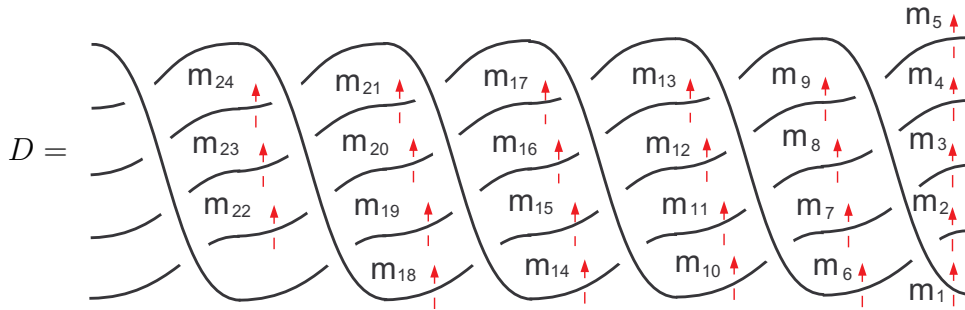


図 2.1: トーラス結び目  $T_{5,6}$  の射影図  $D$  とメリディアン  $m_1, \dots, m_{24}$ .

この設定のもとで、代数的集合  $F_2(T_{5,6})$  は以下ようになる。

$$F_2(T_{5,6}) = \left\{ (x_{12}, \dots, x_{23,24}) \in \mathbf{C}^{\binom{24}{2}} \mid \begin{array}{l} x_{ka} = x_{ik}x_{ia} - x_{ja} \text{ for any } 1 \leq a \leq 24 \\ \text{and any Wirtinger triple } (i, j, k) \end{array} \right\}$$

[11, Section 2] で見られるように、ブレード表示で与えられた結び目に対し、基本関係式 (F2) は非常に効率よく消去される。その工程を  $T_{5,6}$  について考察する。まず、 $T_{5,6}$

の  $D$  に付随した基本関係式 (F2) は次のようになる.  $1 \leq a \leq 24$  に対し,

$$\begin{aligned}
x_{a24} &= x_{14,18}x_{a18} - x_{a14}, & x_{a23} &= x_{18,21}x_{a18} - x_{a21}, \\
x_{a22} &= x_{18,20}x_{a18} - x_{a20}, & x_{a21} &= x_{10,14}x_{a14} - x_{a10}, \\
x_{a20} &= x_{14,17}x_{a14} - x_{a17}, & x_{a19} &= x_{14,16}x_{a14} - x_{a16}, \\
x_{a18} &= x_{14,15}x_{a14} - x_{a15}, & x_{a17} &= x_{6,10}x_{a10} - x_{a6}, \\
x_{a16} &= x_{10,13}x_{a10} - x_{a13}, & x_{a15} &= x_{10,12}x_{a10} - x_{a12}, \\
x_{a14} &= x_{10,11}x_{a10} - x_{a11}, & x_{a13} &= x_{1,6}x_{a6} - x_{a1}, \\
x_{a12} &= x_{6,9}x_{a6} - x_{a9}, & x_{a11} &= x_{6,8}x_{a6} - x_{a8}, \\
x_{a10} &= x_{6,7}x_{a6} - x_{a7}, & x_{a9} &= x_{1,5}x_{a1} - x_{a5}, \\
x_{a8} &= x_{1,4}x_{a1} - x_{a4}, & x_{a7} &= x_{1,3}x_{a1} - x_{a3}, \\
x_{a6} &= x_{1,2}x_{a1} - x_{a2}, \\
x_{a5} &= x_{18,19}x_{a18} - x_{a19}, & x_{a4} &= x_{5,18}x_{a5} - x_{a18} \\
x_{a3} &= x_{5,24}x_{a5} - x_{a24}, & x_{a2} &= x_{5,23}x_{a5} - x_{a23}, \\
x_{a1} &= x_{5,22}x_{a5} - x_{a22}.
\end{aligned}$$

消去法を効率よく実行するため. 基本関係式 (F2) によって与えられる以下の式を添加する:

$$\begin{aligned}
\boxed{x_{12}} &= x_{5,22}x_{2,5} - x_{2,22} = x_{5,22}x_{5,23} - x_{5,23}x_{5,22} + x_{22,23} = \boxed{x_{22,23}}, \\
\boxed{x_{13}} &= x_{5,24}x_{1,5} - x_{1,24} = x_{5,24}x_{5,22} - x_{5,22}x_{5,24} + x_{22,24} = \boxed{x_{22,24}}, \\
\boxed{x_{14}} &= x_{5,18}x_{1,5} - x_{1,18} = x_{5,18}x_{5,22} - x_{5,22}x_{5,18} + x_{18,22} = \boxed{x_{18,22}}, \\
\boxed{x_{15}} &= x_{5,22} = \boxed{x_{18,19}x_{18,22} - x_{19,22}}, \\
\boxed{x_{23}} &= x_{5,23}x_{3,5} - x_{3,23} = x_{5,23}x_{5,24} - x_{5,24}x_{5,23} + x_{23,24} = \boxed{x_{23,24}}, \\
\boxed{x_{24}} &= x_{5,23}x_{4,5} - x_{4,23} = x_{5,23}x_{5,18} - x_{5,18}x_{5,23} + x_{18,23} = \boxed{x_{18,23}}, \\
\boxed{x_{25}} &= x_{5,23} = \boxed{x_{18,19}x_{18,23} - x_{19,23}}, \\
\boxed{x_{34}} &= x_{5,24}x_{4,5} - x_{4,24} = x_{5,24}x_{5,18} - x_{5,18}x_{5,24} + x_{18,24} = \boxed{x_{18,24}}, \\
\boxed{x_{35}} &= x_{5,24} = \boxed{x_{18,19}x_{18,24} - x_{19,24}}, \\
\boxed{x_{45}} &= x_{5,18} = \boxed{x_{18,19}}.
\end{aligned}$$

このとき, 基本関係式 (F2) と添加された上記の方程式の右辺に,  $x_{a24} = x_{14,18}x_{a18} - x_{a14}$  を適用することで  $x_{a24}$  を消去する. 同様の消去を  $x_{a23}$  から  $x_{a6}$  まで続ける. このとき,  $x_{a24}, \dots, x_{a1}$  ( $1 \leq a \leq 24$ ) は, 以下の多項式環の元として表される.

$$P := \mathbb{C}[x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{34}, x_{35}, x_{45}].$$

この消去法は, [10, Subsection 4.1] においてブリッジ表示の結び目で観察されるように, 基本関係式 (F2) が, 対応するループを射影図  $D$  に沿ってスライドさせる操作 (射影図  $D$  においては左から右へのスライド) に対応していることを用いて, スライドさせて得られたループの巻き付いている部分をトレースフリースkein関係式 (trace-free skein relation)



により解消するというトポロジカルな見方ができる. つまり, この消去法はトポロジカルには以下を意味する. まず,  $x_{ai}$  に対応するループ  $m_a m_i$  に対し,  $m_j$  ( $j = a, i$ ) に対応する  $x_{ai}$  上の弧を  $c_j$  と表す.

- (1)  $x_{ai}$  ( $1 \leq a, i \leq 5$ ) について: 弧  $c_i$  を  $D$  の左側から右側へスライドさせ, トレース フリースケイン関係式によって, 巻き付いている部分を解消する. 結果として得られた多項式環  $P$  の元を  $g_i(x_{ai})$  と表す.
- (2) 添加した関係式について:  $D$  の右側に到達するまで全てのループをスライドさせる. 今回の  $D$  の場合, 巻き付いている部分は生じない.
- (3) その他について:  $D$  の右側に到達するまで全てのループをスライドさせ, トレース フリースケイン関係式によって巻き付いている部分を解消する.

(2) の工程から,  $x_{12} = x_{23} = x_{34} = x_{45} = x_{15}$ ,  $x_{13} = x_{24} = x_{35} = x_{14} = x_{25}$  が得られ, (3) の工程から, 全ての  $x_{ij}$  は  $P$  の元として表されることがわかる. 結果として, 以下のように双正則写像 (同型射影)  $h: F_2(T_{5,6}) \rightarrow \text{Im}(h) \subset \mathbb{C}^{\binom{5}{2}}$

$$(x_{12}, \dots, x_{23,24}) \mapsto (x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{34}, x_{35}, x_{45})$$

を定義できる. このとき, (1) で得られる式  $g_i(x_{ai}) = x_{ai}$  は,  $\text{Im}(h)$  の定義多項式であることがわかる. 従って, 以下を得る.

$$F_2(T_{5,6}) \cong \left\{ (x_{12}, \dots, x_{45}) \in \mathbb{C}^{\binom{5}{2}} \left| \begin{array}{l} x_{ij} = g_i(x_{ij}), x_{ij} = g_j(x_{ij}) \quad (1 \leq i \leq j \leq 5) \\ x_{12} = x_{23} = x_{34} = x_{45} = x_{15}, \\ x_{13} = x_{24} = x_{35} = x_{14} = x_{25} \end{array} \right. \right\}.$$

また, 上記の  $F_2(T_{5,6})$  の表示は,  $m$  ブレード表示で与えられる結び目  $K$  について自然に一般化できる:

$$F_2(K) \cong \left\{ (x_{12}, \dots, x_{m-1,m}) \in \mathbb{C}^{\binom{m}{2}} \left| x_{ij} = g_i(x_{ij}), x_{ij} = g_j(x_{ij}) \quad (1 \leq i \leq j \leq m) \right. \right\}.$$

上記の表示を用いて, 実際に  $F_2(T_{5,6})$  を計算する. まず,  $x_{14}, x_{15}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{34}, x_{35}, x_{45}$  が, 添加された (2) の工程の帰結を用いて消去される:

$$x_{12} = x_{23} = x_{34} = x_{45} = x_{15}, \quad x_{13} = x_{24} = x_{35} = x_{14} = x_{25}.$$

このとき,  $x_{ij} = g_i(x_{ij}), x_{ij} = g_j(x_{ij})$  に  $x_{12} = x_{23}, x_{23} = x_{34}, x_{34} = x_{45}, x_{45} = x_{15}$  を代入し, 全ての添え字をシフトさせることで,  $x_{i+1,j+1} = g_{i+1}(x_{i+1,j+1}), x_{i+1,j+1} = g_{j+1}(x_{i+1,j+1})$  を得る. (もし  $i+1$  (または  $j+1$ ) が 6 ならば  $i+1$  (または  $j+1$ ) は 1 を意味する.) 従って, 関係式  $x_{ij} = g_i(x_{ij}), x_{ij} = g_j(x_{ij})$  ( $(i, j) = (1, 5), (2, 3), (3, 4), (4, 5)$ ) は,  $x_{12} = g_1(x_{12}), x_{12} = g_2(x_{12})$  まで消去され, 関係式  $x_{ij} = g_i(x_{ij}), x_{ij} = g_j(x_{ij})$  ( $(i, j) = (1, 4), (2, 4), (2, 5), (3, 5)$ ) は,  $x_{13} = g_1(x_{13}), x_{13} = g_3(x_{13})$  まで消去される. さらに,  $x_{ii} = g_i(x_{ii})$  は  $x_{11} = g_1(x_{11})$  まで消去される. 従って,  $F_2(T_{5,6})$  は以下と同型である.

$$F_2(T_{5,6}) \cong \left\{ (x_{12}, x_{13}) \in \mathbb{C}^2 \left| \begin{array}{l} x_{1j} = \tilde{g}_1(x_{1j}), x_{1j} = \tilde{g}_j(x_{1j}) \quad (j = 2, 3) \\ x_{11} = \tilde{g}_1(x_{11}) \end{array} \right. \right\},$$

但し,  $(\tilde{g}_i(x_{ij}), \tilde{g}_j(x_{ij}))$  は, それぞれ  $g_i(x_{ij}), g_j(x_{ij})$  に  $x_{14} = x_{13}, x_{15} = x_{12}, x_{23} = x_{12}, x_{24} = x_{13}, x_{25} = x_{13}, x_{34} = x_{12}, x_{35} = x_{13}, x_{45} = x_{12}$  を代入して得られる多項式とする. 計算機実験より, 以下のような  $F_2(T_{5,6})$  の定義多項式の表記を得る.  $a = x_{12}, b = x_{13}$  とする.

$$\begin{aligned} x_{11} = 2 &= a^6 - 5a^4b + 4a^3b + 6a^2b^2 - 3a^3 - 6ab^2 - b^3 + 2ab + b^2 + 3a - 2 = \tilde{g}_1(x_{11}), \\ a &= a^7 - 5a^5b - a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 - 3a^4 + 4a^3b - 6a^2b^2 - ab^3 - a^2b \\ &\quad - 2ab^2 + 5a^2 + 2b^2 - a - 2 = \tilde{g}_1(x_{12}), \\ a &= a^5b - a^4b - 4a^3b^2 + a^4 + 6a^2b^2 + 3ab^3 - 4a^2b - 2ab^2 - 3b^3 - a^2 \\ &\quad + 2ab - a + 3b = \tilde{g}_2(x_{12}), \\ b &= a^6b - a^6 - 5a^4b^2 + 4a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + a^4 - 6a^3b - 3a^2b^2 - 6ab^3 - b^4 \\ &\quad + 2a^3 - 3a^2b + 4ab^2 + b^3 + 5ab + b^2 - 3a - b = \tilde{g}_1(x_{13}), \\ b &= a^5b - a^5 - 4a^3b^2 + 3a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + a^3 - 4a^2b - ab^2 - 2b^3 \\ &\quad + a^2 - 2ab + 2b = \tilde{g}_3(x_{13}). \end{aligned}$$

これらの方程式を解くことで, 代数的集合  $F_2(T_{5,6})$  を定める 10 個の点  $(x_{12}, x_{13}) = (2, 2), (0, -1), (1, 1), (-2, 1), (Root(z^2 - 5z + 5), -1 + 2Root(z^2 - 5z + 5)), (Root(z^2 - z - 1), 1), (Root(z^2 + z - 1), -1 - Root(z^2 + z - 1))$  を得る.

ここで,  $(x_{12}, x_{13}) = (0, -1), (1, 1), (-2, 1)$  に注目すると, これらが以下の四角関係式 (R) のうち, 少なくとも 1 つを満たさないことは簡単に確認できる:

$$\begin{vmatrix} 2 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & 2 & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & 2 & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & x_{12} & x_{13} & x_{15} \\ x_{21} & 2 & x_{23} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & 2 & x_{35} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & x_{12} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & 2 & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & 2 & x_{35} \\ x_{51} & x_{52} & x_{54} & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

よって,  $(x_{12}, x_{13}) = (0, -1), (1, 1), (-2, 1) \in F_2(T_{5,6})$  は  $T_{5,6}$  の幽霊指標を与える. また, より深い議論から,  $T_{5,6}$  の幽霊指標は他にはないこともわかる. 詳細は割愛する.

### 3. 指標多様体 $X(K)$ , 代数的集合 $F_2(K)$ と Ng 予想

まず, [10] の定理 5.3 (の証明) で定義された多項式写像  $r : X(\Sigma_2 K) \rightarrow F_2(K)$  を振り返る. モノドロミー写像を使った Fox の手法 [4, 6] から得られる  $\pi_1(\Sigma_2 K)$  の以下の表示に注目する.

**補題 3.1 (Fox [4], cf. Kinoshita [6])** 結び目群  $G(K) = \langle m_1, \dots, m_p \mid r_1, \dots, r_{p-1} \rangle$  に対し. 次が成り立つ.

$$\pi_1(\Sigma_2 K) = \langle m_1 m_i \ (2 \leq i \leq p) \mid w(r_j), w(m_1 r_j m_1^{-1}) \ (1 \leq j \leq p-1) \rangle.$$

但し,  $w(r_j)$  (または  $w(m_1 r_j m_1^{-1})$ ) は, 生成元  $m_1 m_i$  によって  $r_j$  (または  $m_1 r_j m_1^{-1}$ ) を表した語である.

この表示を用いることで, 第 1 節の写像  $t$  を通して指標多様体  $X(\Sigma_2 K)$  を記述すると, 以下ようになる.

$$X(\Sigma_2 K) = \left\{ \left( t_{(m_1 m_{i_1})}(\chi_\rho); t_{(m_1 m_{j_1})(m_1 m_{j_2})}(\chi_\rho); t_{(m_1 m_{k_1})(m_1 m_{k_2})(m_1 m_{k_3})}(\chi_\rho) \right) \in \mathbb{C}^N \mid \chi_\rho \in \mathfrak{X}(\Sigma_2 K) \right\}.$$



ここで、トレース恒等式により、 $t_{(m_1 m_{j_1})(m_1 m_{j_2})}(\chi_\rho)$ ,  $t_{(m_1 m_{k_1})(m_1 m_{k_2})(m_1 m_{k_3})}(\chi_\rho)$  は  $t_{m_i m_j}(\chi_\rho)$  ( $1 \leq i < j \leq p$ ) の多項式として記述されることから

$$X(\Sigma_2 K) \cong \{((t_{m_i m_j}(\chi_\rho)) \in \mathbb{C}^M \mid \chi_\rho \in \mathfrak{X}(\Sigma_2 K))\}$$

がわかる。但し、 $N = p + \binom{p}{2} + \binom{p}{3}$  である。このとき、写像  $r$  は以下の射影によって定義される。

$$r \left( (t_{m_1 m_{i_1}}(\chi_\rho); t_{(m_1 m_{j_1})(m_1 m_{j_2})}(\chi_\rho); t_{(m_1 m_{k_1})(m_1 m_{k_2})(m_1 m_{k_3})}(\chi_\rho)) \right) := (t_{m_i m_j}(\chi_\rho)).$$

写像  $r$  の像は  $G(K)$  についての基本関係式 (F2) を満たすことが群の構造を注意深く見ればわかることから、写像  $r$  は well-defined である。詳細は割愛する。

写像  $r$  は予想 1.1, 2.3 を考える上で、以下のような手段を与える。

**定理 3.2 (Theorem 5.8 in [10])** 以下が成立する。

- (1) 幽霊指標をもつ結び目  $K$  に対し、 $r$  が全射であれば、[12] で定義された  $\widehat{\Phi} : S_0(K) \rightarrow X(\Sigma_2 K)$  は全射ではない。
- (2) 幽霊指標をもつ結び目  $K$  に対し、 $r$  が全射でなければ、Ng 予想 (予想 1.1, 2.3) は成り立たない。
- (3) 幽霊指標をもたない結び目  $K$  に対し、 $\widehat{\Phi}$  は全射であり、かつ Ng 予想が成り立つ。

第 2.2 節で見たように、(5, 6) トーラス結び目  $T_{5,6}$  は、幽霊指標

$$(x_{12}, x_{13}) = (0, -1), (1, 1), (-2, 1) \in F_2(T_{5,6})$$

を持っているため、もし  $r$  が全射でなければ Ng 予想の反例になっている。実は、 $(x_{12}, x_{13}) = (1, 1), (-2, 1)$  が定める幽霊指標を用いることで、 $r$  が全射でないことがわかる。従って、以下を得る。

**定理 3.3** (5, 6) トーラス結び目  $T_{5,6}$  について、Ng 予想 (予想 1.1, 2.3) は成り立たない。

以下、この定理の証明の概略を述べる。初めに、補題 3.1 を用いることにより、 $\pi_1(\Sigma_2 T_{5,6})$  を計算する。  $x = m_1 m_2, y = m_1 m_3, z = m_1 m_4, w = m_1 m_5$  とするとき、次を得る。

$$\pi_1(\Sigma_2 T_{5,6}) = \langle x, y, z, w \mid w_i \ (1 \leq i \leq 8) \rangle,$$

ここで、 $w_i$  は以下のような関係子である：

$$\begin{aligned} w_1 &= w^{-1} x^{-1} y z^{-1} w x^{-1} w z^{-1} y x^{-1} w^{-1}, \\ w_2 &= w^{-1} x^{-1} y z^{-1} w y^{-1} w z^{-1} y x^{-1} w^{-1} x, \\ w_3 &= w^{-1} x^{-1} y z^{-1} w z^{-1} w z^{-1} y x^{-1} w^{-1} y, \\ w_4 &= w^{-1} x^{-1} y z^{-1} w z^{-1} y x^{-1} w^{-1} z, \\ w_5 &= w x y^{-1} z w^{-1} x w^{-1} z y^{-1} x w, \\ w_6 &= w x y^{-1} z w^{-1} y w^{-1} z y^{-1} x w x^{-1}, \\ w_7 &= w x y^{-1} z w^{-1} z w^{-1} z y^{-1} x w y^{-1}, \\ w_8 &= w x y^{-1} z w^{-1} z y^{-1} x w z^{-1}. \end{aligned}$$

この計算は、次のように実行される。初めに、基本的計算から、 $G(T_{5,6})$ は、下記のように、 $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5$  で生成され、 $G(T_{5,6})$  の関係子の集合は4つの関係式で生成されることがわかる。

$$G(T_{5,6}) = \langle m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 \mid w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle.$$

但し、 $w_1, w_2, w_3, w_4$  は以下の通りである：

$$\begin{aligned} w_1 &= m_5 m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 m_2 m_5^{-1} m_4^{-1} m_3^{-1} m_2^{-1} m_1^{-1} m_5^{-1} m_1^{-1}, \\ w_2 &= m_5 m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 m_3 m_5^{-1} m_4^{-1} m_3^{-1} m_2^{-1} m_1^{-1} m_5^{-1} m_2^{-1}, \\ w_3 &= m_5 m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 m_4 m_5^{-1} m_4^{-1} m_3^{-1} m_2^{-1} m_1^{-1} m_5^{-1} m_3^{-1}, \\ w_4 &= m_5 m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 m_4^{-1} m_3^{-1} m_2^{-1} m_1^{-1} m_5^{-1} m_4^{-1}. \end{aligned}$$

次に、この表示に補題 3.1 を適用することによって、基本群  $\pi_1(\Sigma_2 T_{5,6})$  を計算する。 $w_5 := m_1 w_1 m_1^{-1}, w_6 := m_1 w_2 m_1^{-1}, w_7 := m_1 w_3 m_1^{-1}, w_8 := m_1 w_4 m_1^{-1}$  とする。関係子  $w_j$  ( $1 \leq j \leq 8$ ) は  $m_1 m_i$  ( $1 \leq i \leq 5$ ) によって表されなければならない。簡単のため、 $x := m_1 m_2, y := m_1 m_3, z := m_1 m_4, w = m_1 m_5$  とする。このとき、以下がわかる。

$$\begin{aligned} w_1 &= w^{-1} x^{-1} y z^{-1} w x^{-1} w z^{-1} y x^{-1} w^{-1}, \\ w_2 &= w^{-1} x^{-1} y z^{-1} w y^{-1} w z^{-1} y x^{-1} w^{-1} x, \\ w_3 &= w^{-1} x^{-1} y z^{-1} w z^{-1} w z^{-1} y x^{-1} w^{-1} y, \\ w_4 &= w^{-1} x^{-1} y z^{-1} w z^{-1} y x^{-1} w^{-1} z, \\ w_5 &= w x y^{-1} z w^{-1} x w^{-1} z y^{-1} x w, \\ w_6 &= w x y^{-1} z w^{-1} y w^{-1} z y^{-1} x w x^{-1}, \\ w_7 &= w x y^{-1} z w^{-1} z w^{-1} z y^{-1} x w y^{-1}, \\ w_8 &= w x y^{-1} z w^{-1} z y^{-1} x w z^{-1}. \end{aligned}$$

計算機実験により、 $(x_{12}, x_{13}) = (1, 1)$  が定める幽霊指標  $\mathbf{x} \in F_2(T_{5,6})$  の逆像  $r^{-1}(\mathbf{x})$  は空であることが証明された。具体的には、以下のような  $\pi_1(\Sigma_2 T_{5,6})$  の  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  表現  $\rho$  を考える。

$$\begin{aligned} &(\rho(m_1 m_2), \rho(m_1 m_3), \rho(m_1 m_4), \rho(m_1 m_5)) \\ &= \left( \left( \begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} b & c \\ d & e \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} f & g \\ h & i \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} j & k \\ l & m \end{array} \right) \right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})^4. \end{aligned}$$

このとき、計算機により  $(t_{m_1 m_2}(\rho), t_{m_1 m_3}(\rho), t_{m_1 m_4}(\rho), t_{m_1 m_5}(\rho)) = (1, 1, 1, 1)$  を満たす  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  表現  $\rho$  は存在しないことが確認できる。これにより、予想 1.1, 2.3 が成立しないことが証明される。

また、この結果は、定理 3.2(1) から、写像  $\hat{\Phi}$  が全射になっていない例を与えることにも注意する。(そのような結び目で初めて発見された例は (4, 5) トーラス結び目である [11]. )

参考までに、計算機により、 $(x_{12}, x_{13}) = (-2, 1)$  が定める幽霊指標  $\mathbf{y} \in F_2(T_{5,6})$  の逆像  $r^{-1}(\mathbf{y})$  も、また空であることがわかった。 $(x_{12}, x_{13}) = (0, -1)$  が定める幽霊指標

$\mathbf{z} \in F_2(T_{5,6})$  については,  $r(\chi_\rho) = \mathbf{z}$  を満たす以下のような表現  $\rho: \pi_1(\Sigma_2 T_{5,6}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  が見つかった.  $\mathbf{i} := \sqrt{-1}$  とする.

$$\begin{aligned}\rho(m_1 m_2) &= \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{tr}(\rho(m_1 m_2)) = 0, \\ \rho(m_1 m_3) &= \begin{pmatrix} -1/2 & -(\sqrt{5} + 2\mathbf{i})/4 \\ (\sqrt{5} - 2\mathbf{i})/3 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{tr}(\rho(m_1 m_3)) = -1, \\ \rho(m_1 m_4) &= \begin{pmatrix} -(1 + \mathbf{i})/2 & (\sqrt{5} - \mathbf{i})/4 \\ -(\sqrt{5} + \mathbf{i})/3 & (-1 + \mathbf{i})/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{tr}(\rho(m_1 m_4)) = -1, \\ \rho(m_1 m_5) &= \begin{pmatrix} -\mathbf{i}/2 & 3\mathbf{i}/4 \\ \mathbf{i} & \mathbf{i}/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{tr}(\rho(m_1 m_5)) = 0.\end{aligned}$$

## 参考文献

- [1] G. Burde: *Darstellungen von Knottengruppen*, Math. Ann. **173** (1967), 24–33.
- [2] M. Culler and P. Shalen: *Varieties of group presentations and splittings of 3-manifolds*, Ann. of Math. **117** (1983), 109–146.
- [3] G. de Rham: *Introduction aux polynômes d'un nœud*, Enseign. Math. **13** (1967), 187–194.
- [4] R. Fox: *Free differential calculus III, subgroups*, Ann. of Math. **64** (1956).
- [5] F. González-Acuña and J.M. Montesinos: *On the character variety of group representations in  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  and  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$* , Math. Z., **214** (1993), 627–652.
- [6] S. Kinoshita: 位相幾何学入門, 培風館 (2000年).
- [7] X.-S. Lin: *A knot invariant via representation spaces*, Jour. of Diff. Geom. **35** (1992), 337–357.
- [8] F. Nagasato: *Algebraic varieties via a filtration of the KBSM and knot contact homology*, unpublished paper.
- [9] F. Nagasato: *On the trace-free characters*, RIMS Kokyuroku “Representation spaces, twisted topological invariants and geometric structures of 3-manifolds”, **1836** (2013), 110–123.
- [10] F. Nagasato: *Trace-free characters and abelian knot contact homology I*, preprint.
- [11] F. Nagasato and S. Suzuki: *Ghost characters and character varieties of 2-fold branched covers*, preprint.
- [12] F. Nagasato and Y. Yamaguchi: *On the geometry of the slice of trace-free  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ -characters of a knot group*, Math. Ann. **354** (2012), 967–1002.
- [13] L. Ng: *Knot and braid invariants from contact homology II*, Geom. Topol. **9** (2005), 1603–1637.
- [14] L. Ng: *Knot and braid invariants from contact homology II*, Geom. Topol. **9** (2005), 1603–1637.