

# 32 equivalence relations on knot projections

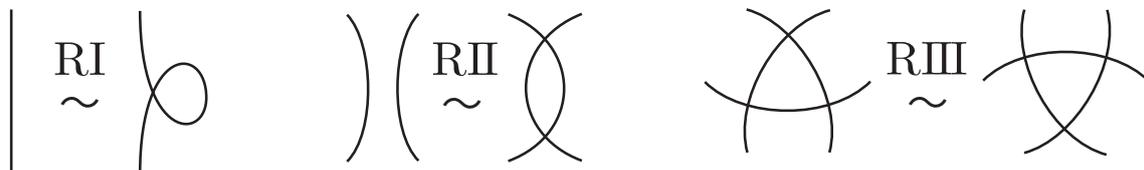
伊藤 昇 (東京大学大学院数理科学研究科)\*<sup>1</sup>

瀧村 祐介 (学習院中等科)\*<sup>2</sup>

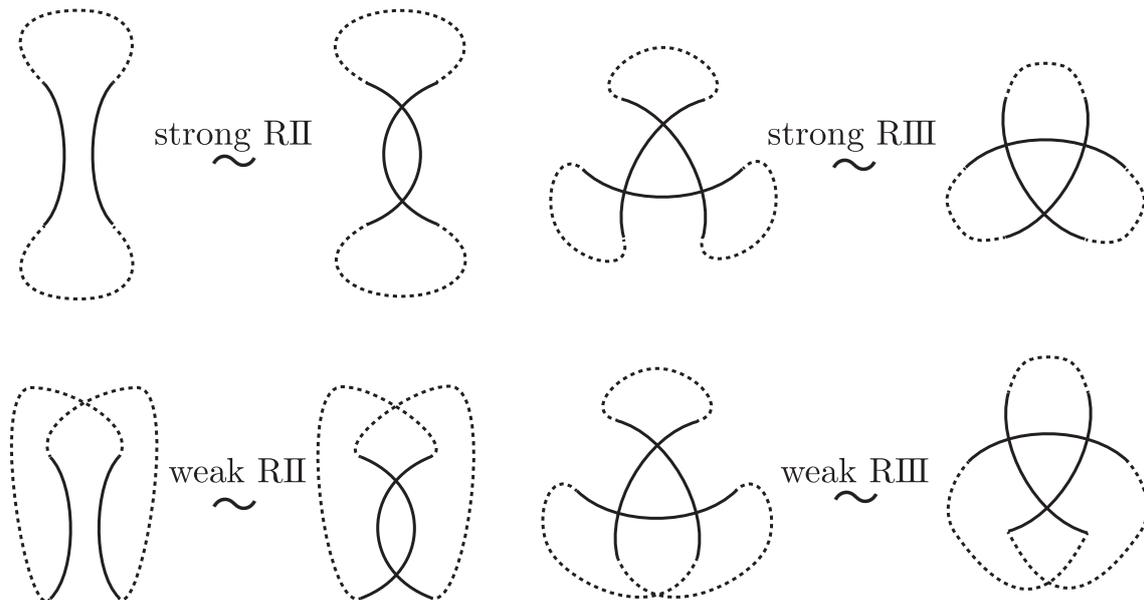
球面上の knot projection における、射影された Reidemeister move RI, strong RII, weak RII, strong RIII, weak RIII を用いた同値関係を全て ( $2^5 = 32$  通り) 考える。これらのどの同値関係が同じで、どの同値関係が異なるかを決定し、同値関係は異なる 21 種類に帰着することを示した [10]。

## Definition 1.

球面上の knot projection において、射影された RI, RII, RIII を図のように定義する。



このうち、RII, RIII をさらに細かく strong RII, weak RII, strong RIII, weak RIII として図のように定義する。点線は、つながり方を表している。



以後、球面上の knot projection を  $P$  で表す。ここでの  $P$  は鏡像を区別しないものとする。

伊藤昇は日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究(S) 研究課題番号 24224002「無限群と幾何学の新展開」(研究代表者 坪井俊) の補助を受けて研究をしている。また、この研究集会における研究活動は住友財団基礎科学研究助成(助成番号 160556、研究代表者 伊藤昇) の補助を受けている。

\*<sup>1</sup> 〒 153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科

e-mail: noboru@ms.u-tokyo.ac.jp

web: <http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~noboru/index.html>

\*<sup>2</sup> 〒 171-0031 東京都豊島区目白 1-5-1 学習院中等科

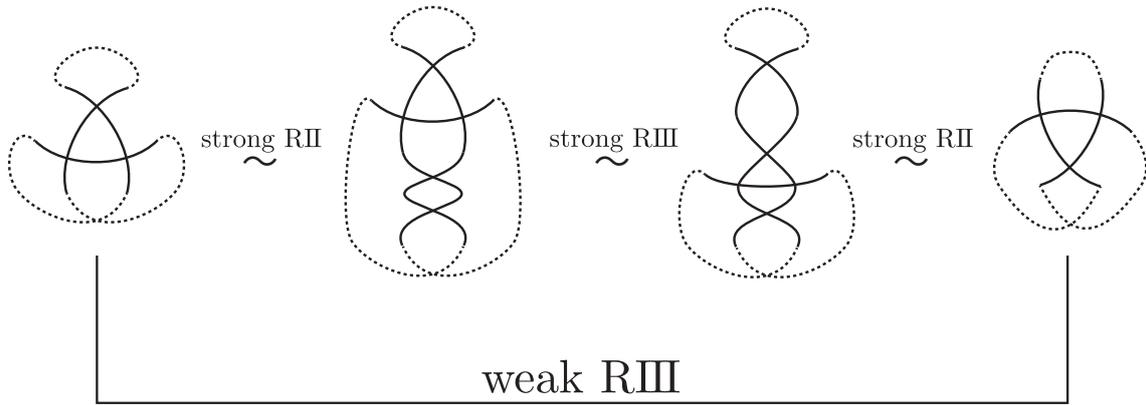
e-mail: Yusuke.Takimura@gakushuin.ac.jp

これらを用いて、次の32通りの同値関係を定義する。

(1)	$\emptyset$
(2)	{ RI, strong RII, weak RII, strong RIII, weak RIII }
(3)	{ RI, strong RII, weak RII, strong RIII, }
(4)	{ RI, strong RII, weak RII, weak RIII }
(5)	{ RI, strong RII, strong RIII, weak RIII }
(6)	{ RI, weak RII, strong RIII, weak RIII }
(7)	{ RI, strong RII, strong RIII, }
(8)	{ RI, strong RII, weak RIII }
(9)	{ RI, weak RII, strong RIII, }
(10)	{ strong RII, weak RII, weak RIII }
(11)	{ strong RII, weak RII, strong RIII, weak RIII }
(12)	{ strong RII, weak RII, strong RIII, }
(13)	{ strong RII, strong RIII, }
(14)	{ strong RII, strong RIII, weak RIII }
(15)	{ strong RII, weak RIII }
(16)	{ weak RII, strong RIII, }
(17)	{ weak RII, strong RIII, weak RIII }
(18)	{ strong RII, }
(19)	{ weak RII, }
(20)	{ strong RII, weak RII, }
(21)	{ weak RII, weak RIII }
(22)	{ strong RIII, weak RIII }
(23)	{ strong RIII, }
(24)	{ weak RIII }
(25)	{ RI, }
(26)	{ RI, strong RII, }
(27)	{ RI, weak RII, }
(28)	{ RI, strong RII, weak RII, }
(29)	{ RI, strong RIII, }
(30)	{ RI, weak RIII }
(31)	{ RI, strong RIII, weak RIII }
(32)	{ RI, weak RII, weak RIII }

この32通りの同値関係が、異なる21種類に帰着することを示す。

(3) は、図のように strong RII, strong RIII を用いて weak RIII を生成することが出来るので、(2) と同値である。同様に、(4) ~ (9) も (2) と同値であることが示せる。



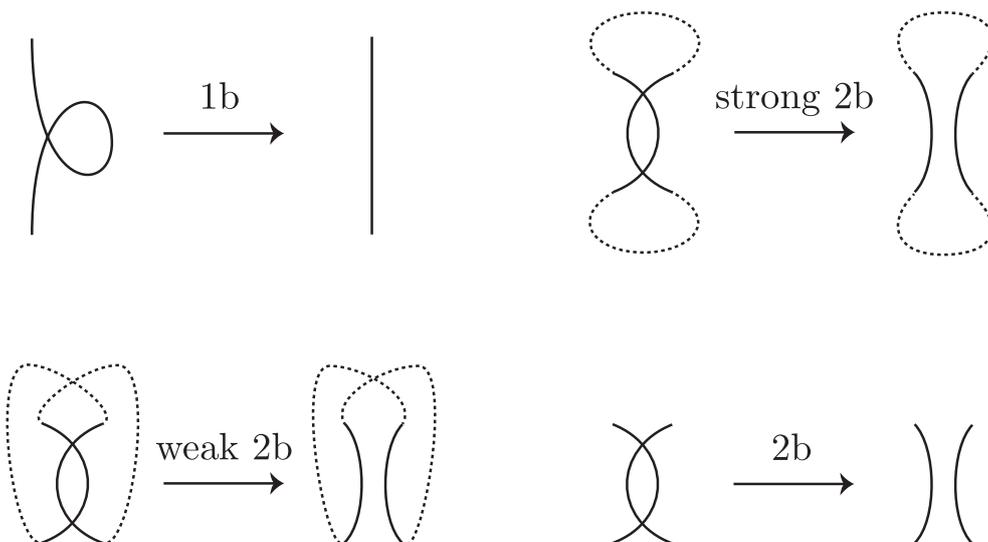
(10) ~ (32) の 23 通りを、次のように 2 つに分ける。

- (A) RI を含む (25) ~ (32) の 8 通り
- (B) RI を含まない (10) ~ (24) の 15 通り

**(A) RI を含む (25) ~ (32) の 8 通り**

**Definition 2.** ([4], [9], [10])

- (1)  $P$  を 1b で reduced にしたものを  $P^{1r}$  と表す。
- (2)  $P$  を 1b, strong 2b で reduced にしたものを  $P^{sr}$  と表す。
- (3)  $P$  を 1b, weak 2b で reduced にしたものを  $P^{wr}$  と表す。
- (4)  $P$  を 1b, 2b で reduced にしたものを  $P^{12r}$  と表す。
- (5)  $P$  を strong 2b で reduced にしたものを  $P^{2sr}$  と表す。
- (6)  $P$  を 2b で reduced にしたものを  $P^{2r}$  と表す。
- (7)  $P$  を weak 2b で reduced にしたものを  $P^{2wr}$  と表す。

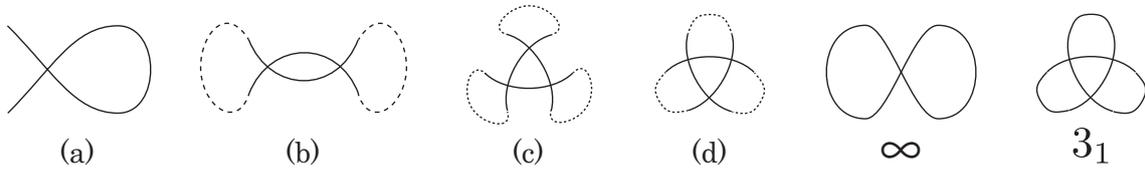


**Fact 1.** ([4, 5], [9], [10], [13]) 以下、 $\cong$  は球面イソトピーを表すことにする。

- (1)  $P_1, P_2$  が RI で移り合う  $\iff P_1^{1r} \cong P_2^{1r}$
- (2)  $P_1, P_2$  が RI, strong RII で移り合う  $\iff P_1^{sr} \cong P_2^{sr}$
- (3)  $P_1, P_2$  が RI, weak RII で移り合う  $\iff P_1^{wr} \cong P_2^{wr}$
- (4)  $P_1, P_2$  が RI, RII で移り合う  $\iff P_1^{12r} \cong P_2^{12r}$
- (5)  $P_1, P_2$  が strong RII で移り合う  $\iff P_1^{2sr} \cong P_2^{2sr}$
- (6)  $P_1, P_2$  が RII で移り合う  $\iff P_1^{2r} \cong P_2^{2r}$
- (7)  $P_1, P_2$  が weak RII で移り合う  $\iff P_1^{2wr} \cong P_2^{2wr}$

**Fact 2.** ([11])

$P_1$  が 図の (a), (b), (c), (d) を含まず、 $P_1, P_2$  が RI, strong RIII で移りあう  $\implies P_2$  は  $P_1$  に  $\infty, 3_1$  を有限個 connectd sum したものである。



**Fact 3.** ([11])

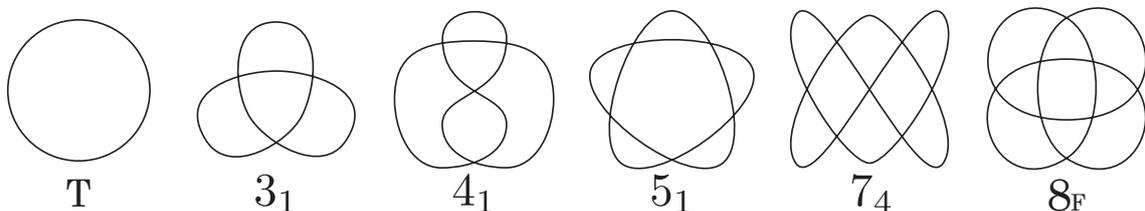
花木 [2] による  $P$  の trivializing number を  $tr(P)$  と表す。 $tr(P)$  は、RI, weak RIII において不変である。

**Fact 4.** ([7])

$P$  の canonical genus を  $g(P)$  と表す。 $tr(P) - 2g(P)$  は RI, weak RII, weak RIII において不変である。

Fact 1 ~ 4 を用いて、(25) ~ (32) を次のように分類することが出来る。

Case		Formulae				Key Fact
(25)	RI	$[8_F] \neq [T]$	$[3_1] \neq [T]$	$[4_1] \neq [T]$	$[3_1] \neq [4_1]$	Fact 1 (1)
(26)	RI, strong RII	$[8_F] \neq [T]$	$[3_1] \neq [T]$	$[4_1] = [T]$	$[5_1] \neq [T]$	Fact 1 (2)
(27)	RI, weak RII	$[8_F] \neq [T]$	$[3_1] = [T]$	$[4_1] \neq [T]$	$[5_1] = [T]$	Fact 1 (3)
(28)	RI, RII	$[8_F] \neq [T]$	$[3_1] = [T]$	$[4_1] = [T]$	$[5_1] = [T]$	Fact 1 (4)
(29)	RI, strong RIII	$[8_F] \neq [T]$	$[3_1] = [T]$	$[4_1] \neq [T]$	$[5_1] \neq [T]$	Fact 2
(30)	RI, weak RIII	$[8_F] \neq [T]$	$[3_1] \neq [T]$	$[4_1] \neq [T]$	$[3_1] = [4_1]$	Fact 3
(31)	RI, RIII	$[8_F] = [T]$		$[7_4] = [T]$		
(32)	RI, weak RII, weak RIII	$[8_F] = [T]$		$[7_4] \neq [T]$		Fact 4



**Proposition 1.**

$P$  が交点を持つか持たないかは、weak RII, strong RIII, weak RIII において不変である。

**(B) RI を含まない (10) ~ (24) の 15 通り**

Proposition 1 より、次のように 2 つに分ける。

- (a) strong RII を含む (10) ~ (15), (18), (20) の 8 通り
- (b) strong RII を含まない (16), (17), (19), (21) ~ (24) の 7 通り

**(B) (a) strong RII を含む (10) ~ (15), (18), (20) の 8 通り**

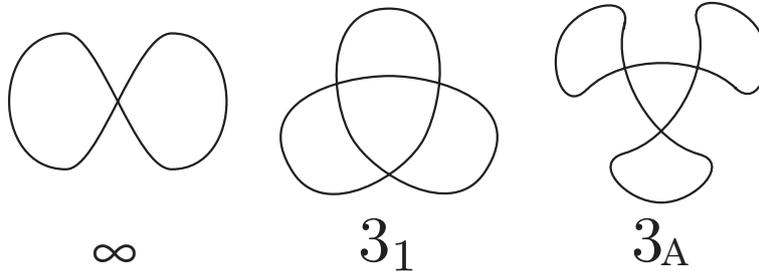
(10) ~ (12), (13) ~ (15) はそれぞれ同値である。

**Fact 5.** ([1], [14])

Arnold invariant  $J_S^+(P)$  は strong RII, strong RIII, weak RIII で不変である。

Fact 1, 5 を用いて、(10) ~ (15), (18), (20) を次のように分類することが出来る。

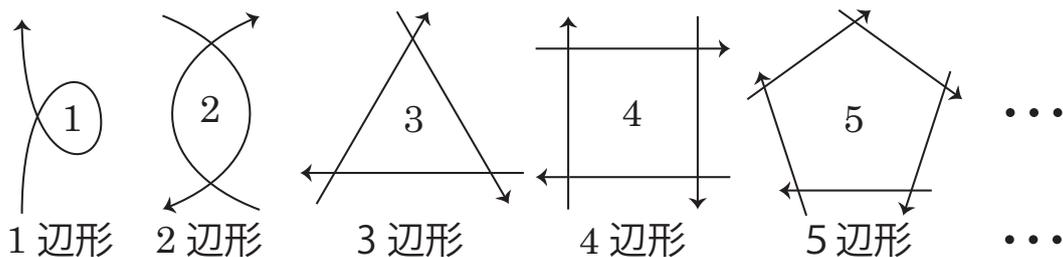
Case		Formulae	Key Fact
(10), (11), (12)	RII, RIII	$\infty = 3_1 = 3_A$	
(13), (14), (15)	strong RII, RIII	$\infty \neq 3_1 = 3_A$	Fact 5
(18)	strong RII	$\infty \neq 3_1 \neq 3_A$	Fact 1 (5)
(20)	RII	$\infty = 3_1 \neq 3_A$	Fact 1 (6)



**(B) (b) strong RII を含まない (16), (17), (19), (21) ~ (24) の 7 通り**

**Remark 1.** (cf. [12])

$P$  に任意の向きをつけたとき、図のような region を coherent region という。任意の  $P$  は、向きの付け方によらず coherent region を少なくとも 2 つ含む。



**Theorem 1.**

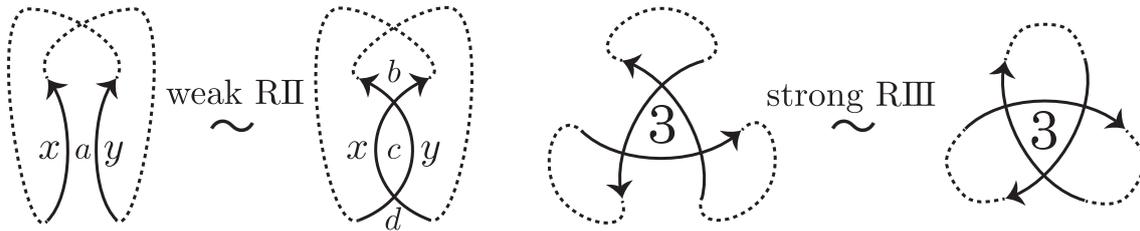
coherent region うち、領域の辺数が奇数、偶数のものをそれぞれ coherent odd region、coherent even region という。

(1)  $P$  が coherent odd region を含むか含まないかは、weak RII, strong RIII において不変である。

(2)  $P$  が coherent even region を含むか含まないかは、weak RII において不変である。

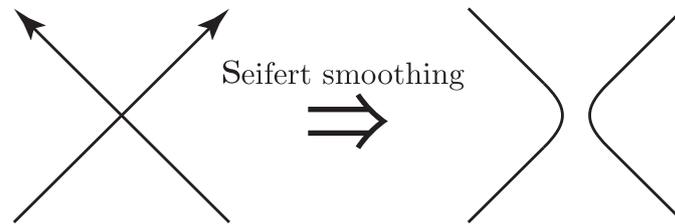
**Proof of Theorem 1.**

(1) weak RII において、図の  $x, y$  の領域が coherent odd region かどうかは不変である。また、 $a, b, c, d$  はいずれも coherent region ではない。strong RIII において、いずれも coherent な 3 辺形が存在する。これより、示された。(2) についても同様である。



**Fact 6.** ([7])

$P$  に向きをつけ、Seifert smoothing したときの circle の配置は、weak RII, weak RIII において不変である。circle の配置は、 $P$  の向きの付け方にはよらない。

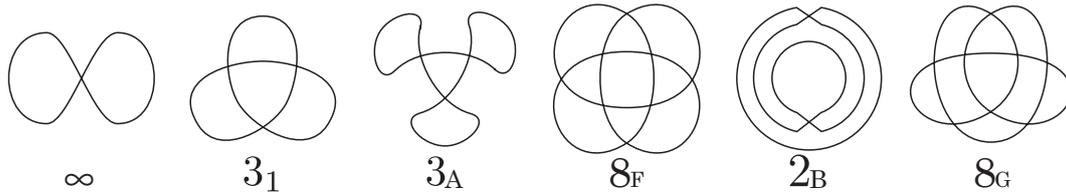


**Fact 7.**

$P$  の交点数は、strong RIII, weak RIII で不変である。

Theorem 1, Fact 1, 3, 6, 7 を用いて、(16), (17), (19), (21) ~ (24) を次のように分類することができる。

	Case	Formulae		Key Fact
(16)	weak RII, strong RIII	$\infty = 3_1 = 3_A$	$8_F \neq 2_B$	Theorem 1 (1)
(17)	weak RII, RIII	$\infty = 3_1 = 3_A$	$8_F = 2_B$	
(19)	weak RII	$\infty = 3_1 \neq 3_A$	$8_F \neq 8_G$	Fact 1 (7)
(21)	weak RII, weak RIII	$\infty = 3_1 \neq 3_A$	$8_F = 8_G$	Fact 6
(22)	RIII	$\infty \neq 3_1 = 3_A$	$8_F = 8_G$	Fact 7
(23)	strong RIII	$\infty \neq 3_1 = 3_A$	$8_F \neq 8_G$	Fact 7, Theorem 1
(24)	weak RIII	$\infty \neq 3_1 \neq 3_A$		Fact 3

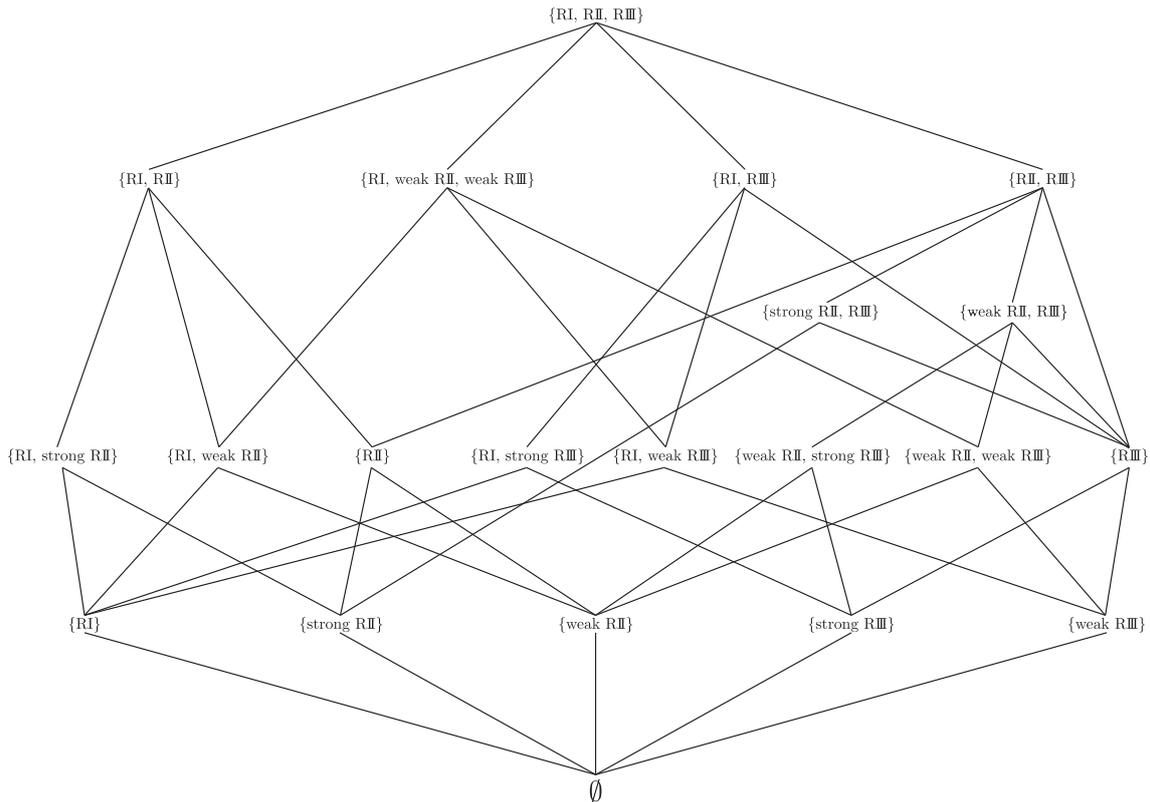


以上より、32通りの同値関係は、次の21通りの同値関係に帰着する。

Case		関連結果
(1)	$\emptyset$	
(2)	{ RI, strong RII, weak RII, strong RIII, weak RIII }	[7]
(11)	{ strong RII, weak RII, strong RIII, weak RIII }	[14]
(14)	{ strong RII, strong RIII, weak RIII }	Fact 5
(16)	{ weak RII, strong RIII, }	Theorem 1 (1)
(17)	{ weak RII, strong RIII, weak RIII }	[1]
(18)	{ strong RII, }	Fact 1 (5), [10]
(19)	{ weak RII, }	Fact 1 (7), [10]
(20)	{ strong RII, weak RII, }	Fact 1 (6), [4, 5]
(21)	{ weak RII, weak RIII }	Fact 4, 6
(22)	{ strong RIII, weak RIII }	Fact 7
(23)	{ strong RIII, }	Fact 5, 7
(24)	{ weak RIII }	Fact 3 ~ 7
(25)	{ RI, }	Fact 1 (1), [4, 5]
(26)	{ RI, strong RII, }	Fact 1 (2), [9]
(27)	{ RI, weak RII, }	Fact 1 (3), [9]
(28)	{ RI, strong RII, weak RII, }	Fact 1 (4), [4, 5]
(29)	{ RI, strong RIII, }	Fact 2, [6], [11]
(30)	{ RI, weak RIII }	Fact 3, 4, [4, 5], [11]
(31)	{ RI, strong RIII, weak RIII }	[3], [8]
(32)	{ RI, weak RII, weak RIII }	Fact 4, [7]

これら21種類の同値関係から、図のような pre-order が得られる。線の下側の同値関係で同値な2つの knot projection は、線の上側の同値関係でも同値であることを表している。この図は講演後、早稲田大学の谷山公規先生にコメントを頂き、作成したものである。

この度は、日本大学の茂手木公彦先生と市原一裕先生に大変お世話になりました。感謝申し上げます。



## 参考文献

- [1] V.I. Arnol'd, Topological invariants of plane curves and caustics, *American Mathematical Society, Providence, RI*, 1994.
- [2] R. Hanaki, Trivializing number of knots, *J. Math. Soc. Japan* **66** (2014), 435–447.
- [3] T. Hagge and J. Yazinski, On the necessity of Reidemeister move 2 for simplifying immersed planar curves. *Knots in Poland III. Part III*, 101–110, Banach Center Publ., 103, *Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw*, 2014.
- [4] N. Ito and Y. Takimura, (1, 2) and weak (1, 3) homotopies on knot projections, *J. Knot Theory Ramifications* **22** (2013), 1350085, 14pp.
- [5] N. Ito and Y. Takimura, Addendum: (1, 2) and weak (1, 3) homotopies on knot projections. *J. Knot Theory Ramifications* **23** (2014), no. 8, 1491001, 2 pp.
- [6] N. Ito and Y. Takimura, Sub-chord diagrams of knot projections, *Houston J. Math.* **41** (2015) no. 2, 701–725.
- [7] N. Ito and Y. Takimura, Strong and weak (1, 2, 3) homotopies on knot projections, *Internat. J. Math.* **26** (2015) 1550069 (8 pages).
- [8] N. Ito and Y. Takimura, On a nontrivial knot projection under (1, 3) homotopy, *Topology Appl.* **210** (2016), 22–28.
- [9] N. Ito and Y. Takimura, Strong and weak (1, 2) homotopies on knot projections and new invariants, *Kobe J. Math.*, **33** (2016), 13–30.
- [10] N. Ito and Y. Takimura, Thirty-two equivalence relations on knot projections, preprint.
- [11] N. Ito, Y. Takimura, and K. Taniyama, Strong and weak (1, 3) homotopies on knot projections, *Osaka J. Math.* **52** (2015) 617–646.
- [12] R. Shinjo and K. Tanaka, private communication.
- [13] M. Khovanov, Doodle groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **349** (1997) 2297–2315.
- [14] H. Whitney, On regular closed curves in the plane. *Compositio Math.* **4** (1937), 276–284.