Upsilon-invariants and Alexander polynomials of torus knots

丹下　基生　(筑波大学)*

1. 導入

1.1. Υ-不変量のケーブル公式

K を S^3 の結び目とする．V を K の管状近傍とする．K の (p,q)-ケーブル $K_{p,q}$ とは、∂V 上の単純閉曲線で、そのホモロジークラスが $p\cdot l+q\cdot m$ となるものとする．m と l は K のメリディアン、ロンジチュードとする．p,q を互いに素な正の整数であれば、$K_{p,q}$ は結び目となる．

結び目である (p,q)-ケーブルを (p,q)-ケーブル結び目という．(p,q)-ケーブル結び目のアレクサンダー多項式は

$$\Delta_{K_{p,q}}(t)=\Delta_K(t^p)\Delta_{T_{p,q}}(t).$$

としてよく知られている．また、ω を $|\omega|=1$ となる複素数とし、$\sigma_K(\omega)$ を次のような Hermite 行列

$$(1-\omega)S+(1-\bar{\omega})^TS,$$

の指数とする．これを、Tristram-Levine signature という．(p,q)-ケーブル結び目の Tristram-Levine 指数公式は、[3] によって

$$\sigma_{K_{p,q}}(\omega)=\sigma_K(\omega^p)+\sigma_{T_{p,q}}(\omega)$$

として計算できる．

Ozsváth, Stipsicz, Szabó は [9] において、コンコーダンス準同型 $\Upsilon_*(t):\mathcal{C}\to C([0,2])$ を誘導する結び目 K のコンコーダンス不変量を定義した．それを Υ-不変量という．ここで、$C([0,2])$ は、区間 $[0,2]$ 上の連続関数である．この関数を、周期 2 の周期関数として、$\mathbb{R}$ 上の関数に自然に拡張させる．この周期関数も同じ $\Upsilon_K(t)$ と書くことにする．

この報告書の目的は、ケーブル結び目の Υ-不変量のある公式を与えることである．もし、K の正のデーン手術が L-空間であるとき、K は、L-空間結び目という．

定理 1 (T.[13]). K を L-空間結び目とする．p,q を $q\geq 2pg(K)$ を満たす互いに素な正の整数とする．このとき、$K_{p,q}$ の Υ-不変量は

$$\Upsilon_{K_{p,q}}(t)=\Upsilon_K(pt)+\Upsilon_{T_{p,q}}(t) \tag{1}$$

のように計算できる．

本研究は科研費 (課題番号:26800031) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 57M25, 57M27
キーワード：Heegaard Floer homology, cable knot
* 〒305-8571 茨城県つくば市天王台 1-1-1　筑波大学数理物質系
e-mail: tange@math.tsukuba.ac.jp
web: http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jndex.html

ここで、$\Upsilon_K(t)$ の積分

$$\int_{[0,2]} \Upsilon_K(t)dt.$$

もコンコーダンス不変量であり、ここで $I(K)$ とおく．このとき、トーラス結び目の I の値は以下のようにして計算できる．

命題 2 (T.[13])**.** p, q を正の互いに素な整数とする．

$$I(T_{p,q}) = -\frac{1}{3}(pq - \sum_{i=1}^{n} a_i),$$

ここで、各項 a_i は非負整数であり、以下の連分数展開の係数である．

$$q/p = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\cdots + \frac{1}{a_n}}} =: [a_1, \cdots, a_n]. \tag{2}$$

この等式は、$\Upsilon_{T_{p,q}}(t)$ のよく知られた公式を使って簡単に計算できる．この値は、$\sigma_K(\omega)$ の S^1-積分値、

$$\int_{S^1} \sigma_{T_{p,q}}(\omega) = -\frac{1}{3}\left(pq - \frac{p}{q} - \frac{q}{p} + \frac{1}{pq}\right)$$

とよく似ていることが観察される．

上のケーブル結び目公式 (1) を任意の iterated ケーブル L-空間結び目 $(\cdots(K_{p_1,q_1})_{p_2,q_2}\cdots)_{p_n,q_n}$ に対して応用することができる．

定理 3 (T.[13])**.** $(p_i, q_i) \quad (i = 1, \cdots, n)$ を正の互いに素な正の整数で、以下を満たすとする．K を L-空間結び目とする．$L := (\cdots(K_{p_1,q_1})_{p_2,q_2}\cdots)_{p_n,q_n}$ とする．もし、(p_i, q_i) が任意の i に対して $q_i \geq 2g(L_i)p_i$ が成り立つなら、$I(L)$ は以下のように計算される．

$$I(L) = I(K) + \sum_{i=1}^{n} I(T_{p_i,q_i}).$$

2. 準備

このセクションでは、主定理 (定理 1) を証明する道具を紹介する．

2.1. L-空間ケーブル結び目

Y が有理ホモロジー球面で、全ての spin^c 構造 $\mathfrak{s}$ において、$\widehat{HF}(Y, \mathfrak{s}) \cong \widehat{HF}(S^3)$ を満たすものを L-空間という．ここで、ヒーゴールフレアホモロジー $\widehat{HF}(Y, \mathfrak{s})$ の定義を与えないが、$\widehat{HF}$ の詳しい定義は、[10], [11] を読むとよい．

Hedden と Hom は $K_{p,q}$ が L-空間結び目であるための必要十分条件を与えた．

定理 4 (Hedden [4], Hom [6])**.** $K_{p,q}$ が L-空間結び目であるためには、K が L-空間結び目であり、$q \geq p(2g(K) - 1)$ であることが必要十分条件である．ここで、$g(K)$ は K のザイフェルト種数である．

2.2. 形式半群

KがL-空間結び目であるとする．[12]によれば、Kのアレクサンダー多項式$\Delta_K(t)$が、平坦であり、非ゼロ係数は交替的である．ここで、整数係数多項式が平坦であるとは、任意の係数a_iが$|a_i| \leq 1$を満たすことをいい、$\Delta_K(t)$の非ゼロ係数が交替的であるとは、非ゼロ係数の符号が指数の順に交替的であることを意味する．

L-空間結び目Kのアレクサンダー多項式の次のような展開

$$\frac{\Delta_K(t)}{1-t} = \sum_{s \in S_K} t^s$$

に対して得られる$S_K \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$を$K$の形式半群という．任意の代数的結び目はL-空間結び目であり、その形式半群S_Kはある半群となる([14])．特に、Kがトーラス結び目$T_{p,q} \quad (p, q > 0)$であるとすると、$S_{T_{p,q}}$はp, qで生成される半群である．つまり、$S_{T_{p,q}} = \langle p, q \rangle = \{pa + qb \in \mathbb{Z} | a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$が成り立つ．L-空間結び目は一般に代数的結び目とは限らない．それは、任意のL-空間結び目Kの形式半群S_Kがいつでも半群であるとは限らないからである．例えば、$(-2, 3, 2n+1)$プレッツェル結び目K_n $(n \geq 1)$の形式半群は

$$S_{K_n} = \{0, 3, 5, 7, \cdots, 2n-1, 2n+1, 2n+2\} \cup \mathbb{Z}_{n \geq 2n+4}.$$

である．$K_1 = T_{3,4}, K_2 = T_{3,5}$であるが、$n \geq 3$の場合、$S_{K_n}$は半群でないことはすぐわかる．$(-2, 3, 2n+1)$プレッツェル結び目のアレクサンダー多項式は例えば、[5]をみるとよい．

Wangは、L-空間ケーブル結び目の形式半群を求めた．

命題 5 (ケーブル結び目公式[15])**.** Kを非自明なL-空間結び目とする．$p \geq 2$と$q \geq p(2g(K)-1)$を満たすとする．そのとき、形式半群は以下のように計算できる．

$$S_{K_{p,q}} = pS_K + q\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{pa + qb | a \in S_K, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

2.3. Υ-不変量

[9]に、Ozsváth、Stipsicz、Szabóは、不変量Υ_Kを結び目のフレアチェイン複体$CFK^\infty(S^3, K)$を用いて定義した．そのあと、Livingstonは[8]で$\Upsilon_K(t)$の別の定義を与えた．BorodzikとLivingstonはΥ_KのL-空間結び目Kの公式を証明した．ここで、$\Upsilon_K(t)$の定義は与えず、彼らのL-空間結び目公式から出発して、主定理(定理1)を証明する．

命題 6 ([1])**.** Kを種数gのL-空間結び目とする．このとき、任意の$t \in [0, 2]$に対して、

$$\Upsilon_K(t) = \max_{m \in \{1, \cdots, 2g\}} \{-2\#(S_K \cap [0, m)) - t(g - m)\}.$$

を満たす．

3. 命題 2と定理 3の証明.

[2]において、その著者は$\Upsilon_{T_{p,q}}(t) = \Upsilon_{T_{p,q-p}}(t) + \Upsilon_{T_{p,p+1}}(t)$の漸化式を使って、次のようなトーラス結び目の$\Upsilon$-不変量の公式([2]の命題6)を証明した．

$$\Upsilon_{T_{p,q}}(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \Upsilon_{T_{p_i, p_i+1}}(t),$$

ここで、係数 a_i は、(2) で定義された同じ係数であり、p_i を $[a_i, a_{i+1}, \cdots, a_n]$ の分母とする．この公式は、一般に、連分数展開の仕方に依るが、非負整数による連分数展開の仕方には依らない.

命題 2 の証明. 公式 $\Upsilon_{T_{p,q}}(t) = \sum_{i=1}^n a_i \Upsilon_{T_{p_i,p_i+1}}(t)$ の $t=0$ での一次微分係数を比べることで、

$$(p-1)(q-1) = \sum_{i=1}^n a_i p_i (p_i - 1) \tag{3}$$

となる．$T_{p,p+1}$ を直接計算することで、$I(T_{p,p+1}) = -\frac{p^2-1}{6}$ をえる．従って、

$$I(T_{p,q}) = -\frac{1}{3}\sum_{i=1}^n a_i p_i (p_i+1) = -\frac{1}{3}\sum_{i=1}^n (a_i p_i (p_i - 1) - a_i + a_i p_i)$$

が成り立ち、$p_{i-1} = a_i p_i + p_{i+1}$ であることから、次が満たされる.

$$\sum_{i=1}^n a_i p_i = \sum_{i=1}^n (p_{i-1} - p_{i+1}) = q + p_1 - p_n = q + p - 1.$$

このとき、式 (3) を使って、次を得る.

$$I(T_{p,q}) = -\frac{1}{3}\left((p-1)(q-1) - \sum_{i=1}^n a_i + q + p - 1\right) = -\frac{1}{3}\left(pq - \sum_{i=1}^n a_i\right)$$

□

定理 3 の証明. $L' = L_{n-1}$ とする．定理 1 を使って次を得る.

$$\begin{aligned} I(L) &= \int_{[0,2]} (\Upsilon_{L'}(pt) + \Upsilon_{T_{p_n,q_n}}(t))dt \\ &= \int_{[0,2p]} \Upsilon_{L'}(s)\frac{1}{p}ds + \int_{[0,2]} \Upsilon_{T_{p_n,q_n}}(t)dt \\ &= p\int_{[0,2]} \Upsilon_{L'}(s)\frac{1}{p}ds + \int_{[0,2]} \Upsilon_{T_{p_n,q_n}}(t)dt \\ &= \int_{[0,2]} \Upsilon_{L'}(s)ds + \int_{[0,2]} \Upsilon_{T_{p_n,q_n}}(t)dt \\ &= I(L') + I(T_{p_n,q_n}) \end{aligned}$$

この関係を繰り返すことで、

$$I(L) = I(K) + \sum_{i=1}^n I(T_{p_i,q_i})$$

を得る.

□

4. 定理 1 の証明.

4.1. 証明

p, q を互いに素な正の整数とし、$q \geq 2pg(K)$ を満たすとする.

命題 5から、半群は$S_{K_{p,q}}$は$pS_K + q\mathbb{Z}_{\geq 0}$のようになる．ここで、$\#(S_{K_{p,q}} \cap [0,m))$を$\varphi_{K_{p,q}}(m)$とする．$\Upsilon$-不変量公式は次のように求められる．

$$\Upsilon_{K_{p,q}}(t) = -2 \min_{0 \leq m \leq 2g(K_{p,q})} \{\varphi_{K_{p,q}}(m) - tm/2\} - tg(K_{p,q}).$$

$I_n = S_{K_{p,q}} \cap [pn, p(n+1))$と定義すると、$\cup_{n=0}^{\infty} I_n = S_{K_{p,q}}$を満たす．$iq$を$p$で割った商を$n_i$とし、余りを$r_i$とすると、増加数列$0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_i < \cdots$が得られる．

補題 7. iを$0 \leq i < p$を満たす整数とする．もし、tが$2i/p < t \leq 2(i+1)/p$であるとき、$\varphi_{K_{p,q}}(m) - tm/2$の最小値は$(p(n_i - 1), p(n_i + g(K))]$においてとる．

Proof. まず、$\varphi_{K_{p,q}}(m) - tm/2$の最小値は、$(pn_{i-1}, pn_{i+1}]$でとる．なぜなら、$0 \leq n < n_{i-1}$において、$\varphi_{K_{p,q}}(m) - tm/2$の最小は、$(p(n_{i-1} - 1), pn_{i-1}]$でとり、$n \geq n_{i+1}$のとき、$(pn_{i+1}, p(n_{i+1} + 1)]$でとる．また、$(p(n_{i-1} - 1), pn_{i-1}]$の最小値より、$(pn_{i-1}, p(n_{i-1} + 1)]$の最小値の方が低い、また、$(pn_{i+1}, p(n_{i+1} + 1)]$の最小値より、$(p(n_{i+1} - 1), pn_{i+1}]$の最小値の方が低いので、

$$\min_{0 \leq m \leq 2g(K_{p,q})} \{\varphi_{K_{p,q}}(m) - tm/2\} = \min_{pn_{i-1} \leq m < pn_{i+1}} \{\varphi_{K_{p,q}}(m) - tm/2\}$$

となり、この補題が正しい． □

今、$\frac{2i}{p} \leq t \leq \frac{2(i+1)}{p}$が成り立つとする．$\frac{s}{p} = t - \frac{2i}{p}$とする．次に、$(pn_{i-1}, pn_{i+1}]$上で$\varphi_{K_{p,q}}(t) - tm/2$の最小値を考える．$(pn_{i-1}, pn_{i+1}]$を

$$(pn_{i-1}, p(n_{i-1}+2g(K))] \cup (p(n_{i-1}+2g(K)), pn_i] \cup (pn_i, p(n_i+2g(K))] \cup (p(n_i+2g(K)), pn_{i+1}]$$

のように分解すると、$\varphi_{K_{p,q}}(m) - tm/2$の最小値は$(p(n_i - 1), p(n_i + 2g(K) + 1)]$でとることがわかる．よって、$(p(n_i - 1), p(n_i + 2g(K) + 1)]$において、$\varphi_{K_{p,q}}(m) - tm/2$の最小値を調べればよい．$E_b(t)$を$\begin{cases} 0 & t \leq b \\ 1 & t > b \end{cases}$を満たす関数とする．$K$をL-空間結び目とすると、

$$\varphi_K(t) = \sum_{a \in S_K} E_a(t)$$

である．$\bigcup_{n_{i-1} \leq n < n_{i+1}} I_n$上での$\varphi_{K_{p,q}}(t)$は、以下の$[0,p)$上の関数

- A: $\sum_{j=0}^{i} E_{r_j}(m)$
- B: $\sum_{j=0}^{i+1} E_{r_j}(m)$

とすると、関数$\varphi_{K_{p,q}}(m) - tm/2$は、値$\varphi_{K_{p,q}}(pn_{i-1})$に沿って並べたものである．その並べ方を$AW$とすると、$W$は$A$もしくは$B$を$2g(K) + 1$個並べたものであり、$W$の$i$番目の文字は、$i - 1 \in S_K$なら$B$であり、$i - 1 \notin S_K$ならば、$A$であるとする．

よって、

$$\min_{p(n_i-1) \leq m < p(n_i+2g(K_{p,q}))} \{\varphi_{K_{p,q}}(m) - tm/2\} = \mu_0 + \min_{0 \leq m \leq 2g(K)} \left\{ \sum_{l=0}^{m} p\left(\frac{i + \epsilon(m)}{p} - \frac{t}{2}\right) \right\}$$

が成り立つ．ここで、$\epsilon(m)=\begin{cases}1 & m\in S_K\\ 0 & m\notin S_K\end{cases}$ であり、μ_0 を $\varphi_{K_{p,q}}(t)$ の $[p(n_i-1),p(n_i+1))$ での最小値とする．ここで、$\sum_{l=0}^{m}\epsilon(m)=\#S_K\cap[0,m)$ であるので、この右辺は、

$$\mu_0+\min_{0\le m\le 2g(K)}\left\{\left(i-\frac{pt}{2}\right)m+\#S_K\cap[0,m)\right\}=(*)$$

となる．

$$\begin{aligned}(*) &= \mu_0+\min_{0\le m\le 2g(K)}\left\{-\frac{s}{2}m+\#S_K\cap[0,m)\right\}\\ &= \mu_0+\min_{0\le m\le 2g(K)}\{\#S_K\cap[0,m)-sm/2\}\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}\Upsilon_{K_{p,q}}(t) &= -2\mu_0-2\min_{0\le m\le 2g(K)}\{\#S_K\cap[0,m)-sm/2\}-tg(K_{p,q})\\ &= -2\mu_0+\Upsilon_K(s)+sg(K)-t(pg(K)+g(T_{p,q}))\end{aligned}$$

となる．また、μ_0 を計算すると、

$$\mu_0=\min_{0\le m\le 2g(T_{p,q})}\{\varphi_{T_{p,q}}(m)-tm/2\}-ig(K)$$

となり、$s-tp=-2i$ であることから、

$$\begin{aligned}\Upsilon_{K_{p,q}}(t) &= -2\min_{0\le m\le 2g(T_{p,q})}\{\varphi_{T_{p,q}}(m)-tm/2\}+2ig(K)+\Upsilon_K(s)-2ig(K)-tg(T_{p,q})\\ &= \Upsilon_{T_{p,q}}(t)+\Upsilon_K(s)\end{aligned}$$

よって、

$$\Upsilon_{K_{p,q}}(t)=\Upsilon_K(s)+\Upsilon_{T_{p,q}}(t)$$

となり、定理 1 が成り立つ． □

4.2. L-空間ケーブル公式の反例

最後に、この公式 (1) は全ての結び目、もしくは、L-空間結び目に対していつでも成り立たないことを述べておく．Hedden と Hom の判定条件により、K が L-空間であれば、$(2g(K)-1)p\le q\le 2g(K)p$ を満たす p,q に対して、$K_{p,q}$ は L-空間であるが、

$$\Upsilon_{(T_{3,7})_{3,35}}(t)\neq\Upsilon_{T_{3,7}}(3t)+\Upsilon_{T_{3,35}}(t)$$

であることが簡単な計算によりわかる．例えば、[7] などで、計算してみるとよい．

参考文献

[1] M. Borodzik and C. Livingston, *Semigroups, d-invariants and deformations of cuspidal singular points of plane curves*, Journal of the London Mathematical Society (2016) 93 (2): 439-463.

[2] P. Feller and D. Krcatovich, *On cobordisms between knots, braid index, and the Upsilon-invariant*, arXiv:1602.02637

[3] R. A. Litherland, *Signatures of iterated torus knots,* Topology of low-dimensional manifolds (Proc. Second Sussex Conf., Chelwood Gate, 1977), pp. 71-84, Lecture Notes in Math., 722, Springer, Berlin, 1979.

[4] M. Hedden, *On knot Floer homology and cabling II*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2009), no. 12, 2248-2274.

[5] E. Hironaka, *The Lehmer polynomial and pretzel links*, Canad. Math. Bull. 44 (2001), no. 4, 440-451.

[6] J. Hom, *A note on cabling and L-space surgeries*, Algebr. Geom. Topol. 11 (2011), no. 1, 219-223.

[7] D. Krcatovich, *Upsilon of L-space knots*, Mathematica software

[8] C. Livingston, *Notes on the knot concordance invariant Upsilon*, arXiv:1412.0254

[9] P. Ozsváth, A. Stipsicz, and Z. Szabó, *Concordance homomorphisms from knot Floer homology*, arXiv:1407.1795

[10] P. Ozsváth and Z. Szabó, *Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds*, Ann. of Math. 159 (3): 1027-1158

[11] P. Ozsváth and Z. Szabó, *Holomorphic disks and three-manifold invariants: properties and applications*, Ann. of Math. 159 (3): 1159-1245

[12] P. Ozsváth and Z. Szabó, *On knot Floer homology and lens space surgeries*, Topology Volume 44, Issue 6, November 2005, Pages 1281-1300

[13] M. Tange, *Upsilon invariants of L-space cable knots*, preprint.

[14] C. T. C. Wall, *Singular Points of Plane Curves*, London Mathematical Society Student Texts 63, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[15] S. Wang, *Semigroups of L-space knots and nonalgebraic iterated torus knots*, arXiv:1603.08877.