Stick number of tangles

谷山　公規　(早稲田大学教育学部)[*1]
（Youngsik Huh 氏（Hanyang University）と
Jung Hoon Lee 氏（Chonbuk National University）との共同研究 ）

1. 序文

この報告は2016年12月20日（火）から23日（金）まで日本大学文理学部 百周年記念館 国際会議場にて開催された研究集会「結び目の数学 IX 」における表題の講演内容をまとめたものです。世話人の茂手木公彦先生、市原一裕先生に厚く御礼申し上げます。

与えられたknot typeを実現するn-gonのnの最小数は何かという問題は素朴な問題でして、古くは例えば[2]のChapter IのExercise 2. には「4-gonや5-gonは全てtrivial knotであることを示せ。また6-gonや7-gonではどのようなknot typeが作れるか？」という演習問題が収録されています。論文としてこの問題が考察されたのは[5]が最初だと思います。これに続く[4]でもJin先生はpolygon indexという用語を使われていますが、[1]でstick numberという用語が使われてからこちらの用語のほうがよく使われているようです。今回の共同研究者のYoungsik HuhさんとJung Hoon Leeさんはともに Jin先生のお弟子さんですがstick numberという用語を使われていますので、この報告の題名もStick number of tanglesとなっています。

knotのstick numberについてはいろいろと研究がなされています。ここではknotの代わりにtangleについて類似の問題を考えます。tangleについては今までこのような考察はなされていませんでした。一応まとまった結果が出ましたので以下にご報告致します。詳細につきましては[3]をご参照頂ければと思います。

$\mathbb{B}^3$ を xyz-空間 $\mathbb{R}^3$ 内の unit 3-ball とします。$T = t_1 \cup \cdots \cup t_n$ を $\mathbb{B}^3$ に properly embeddedされたn mutually disjoint simple arcsとします。このときpair $(\mathbb{B}^3, T)$ を*n-string tangle*と呼びます。tangle $(\mathbb{B}^3, T)$が*trivial*とは、$\mathbb{B}^3$にproperly embeddedされたdisk Dで$T \subset D$であるものが存在するときに云います。tangle $(\mathbb{B}^3, T)$が*stick tangle*であるとは、Tが有限個の直線分の和集合であるときに云います。$(\mathbb{B}^3, T)$をstick tangleとし、$T = t_1 \cup \cdots \cup t_n$とします。各$t_i$は有限個の直線分の和集合ですが、その最小数を$a_i$とします。適当に順番を入れ替えて$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$としておきます。このとき数列$a_1, a_2, \cdots, a_n$を$(\mathbb{B}^3, T)$の*order*と云うことにして$\mathrm{order}(\mathbb{B}^3, T) = a_1, a_2, \cdots, a_n$と記すことにします。さて、$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 1$を満たす整数列$a_1, a_2, \cdots, a_n$が*stick-tangle-order-trivial*とは、$\mathrm{order}(\mathbb{B}^3, T) = a_1, a_2, \cdots, a_n$である任意のstick tangle $(\mathbb{B}^3, T)$がtrivialであることとします。そうでないときに*stick-tangle-order-nontrivial*と云うことにします。

[*1] 〒169-8050 東京都新宿区西早稲田1-6-1 早稲田大学教育学部数学科
e-mail: `taniyama@waseda.jp`

定理 1.1 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ を $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 1$ を満たす整数列とする。このとき $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が stick-tangle-order-nontrivial であるための必要十分条件は次の (1) から (5) までのどれかが成立することである。

(1) $a_1 \geq 5$,

(2) $a_1 = 4$, $a_2 \geq 2$,

(3) $a_1 = a_2 = 3$,

(4) $a_1 = 3$, $a_2 = a_3 = 2$,

(5) $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 2$.

2. 証明の概略

補題 2.1 $(\mathbb{B}^3, T)$ を tangle とする。T が端点以外に z 座標に関する local minimum を持たないならば $(\mathbb{B}^3, T)$ は trivial である。

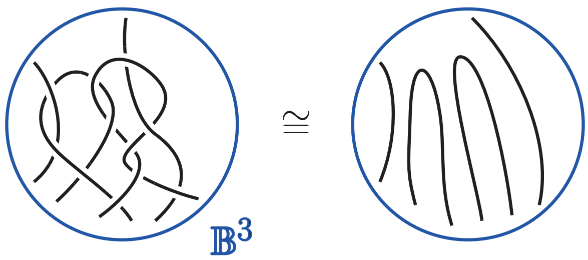

図 2.1: A tangle without local minima is trivial.

証明　上図のように上手に変形すれば示せます。□

補題 2.2 $\mathbb{R}^3$ 内に 3 本の直線分 l_1, l_2, l_3 があり $L = l_1 \cup l_2 \cup l_3$ は閉区間と同相であり、L は $\mathbb{R}^3$ のどの平面にも含まれないとする。このとき $\mathbb{R}^3$ のある方向が存在して、その方向に関して L は端点以外に local maximum も local minimum も持たない。

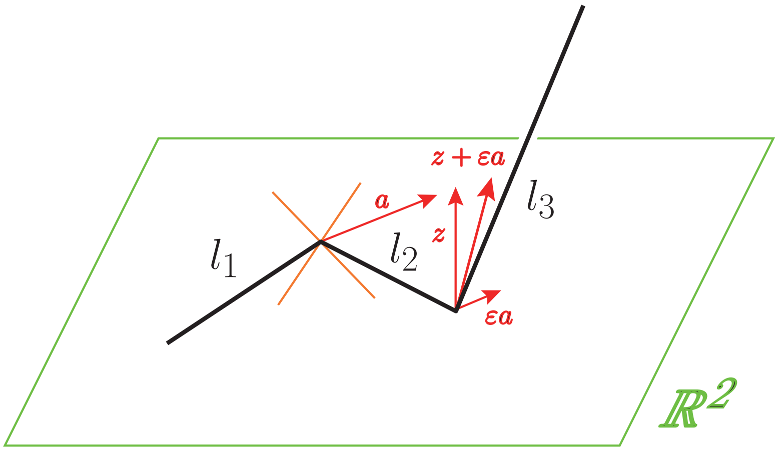

図 2.2: L has no local maxima nor minima with respect to $(z+\varepsilon a)$-direction.

証明　上図のように上手に方向を選べば示せます。$l_1 \cup l_2$ が xy-plane $\mathbb{R}^2$ にのっている場合に、$\mathbb{R}^2$ 上のベクトル a を $l_1 \cup l_2$ が端点以外に local maximum も minimum も持たない方向として選び、z-axis のベクトル z と十分小さい ε に関してベクトル $(z+\varepsilon a)$ を方向として選べばよいことが分かります。□

注 2.3 この補題2.2は素朴ですが knot の stick number の研究に関して効果的です。例えば5-gon は trivial knot であることは、この補題からある方向に関して critical points が高々3個、critical points は偶数個ですから2個、よって1-bridge knot であることから示せます。同様の議論で $(p,p+1)$-torus knot の bridge index が p であることと、この補題からその stick number は $2p+2$ 以上であることが分かり、一方で $2p+2$ 本の stick で実現出来るので stick number は $2p+2$ であると決定されます。

またこの補題と同じ仮定の下で、ある方向が存在して、その方向に関して L は端点以外に local maximum と local minimum をともに持つことが示せます。このことは空間曲線の total curvature の研究に関して基本的な事実となっています。文献としては [6] だけ挙げておきます。

定理の証明　最初に必要条件であることを示します。それには次の数列は全て stick-tangle-order-trivial であることを示せば十分です。

(a) $4,1,1,\cdots,1$

(b) $3,2,1,1,\cdots,1$

(c) $2,2,2,1,1,\cdots,1$

実際に定理の (1) から (5) までのどれも満たさない数列は上記の (a),(b),(c) のどれかの部分列になります。(a) と (b) については補題2.2より端点以外にはあったとしても local maximum か local minimum がどちらか1つだけの方向があるので補題2.1より trivial と分かります。(c) についてですが、2, 2, 2 のうちの2つの 2, 2 について、図2.3のよう

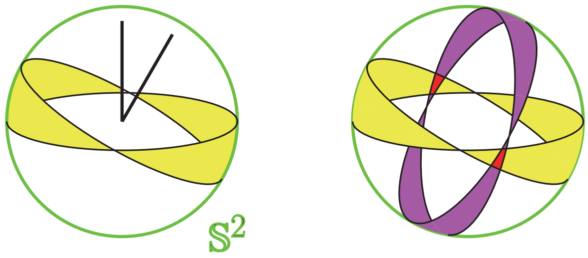

図 2.3: The common red direction has no critical points.

に、どちらも端点以外に critical point を持たない方向が選べます。よって critical point は高々1つだけとなり補題2.1より trivial となります。

次に十分条件であることを示します。それには定理の (1) から (5) までのそれぞれを order とする nontrivial tangle が存在することを示せば十分です。(1) は図 2.4 の tangle がその例になります。

図 2.4: A nontrivial tangle with 5 sticks.

(2) は図 2.5 の tangle がその例になります。

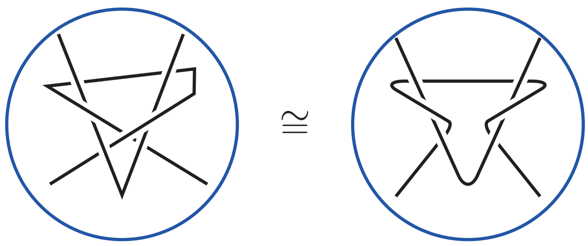

図 2.5: A nontrivial tangle with $4+2$ sticks.

(3) は図 2.6 の tangle がその例になります。

(4) は図 2.7 の tangle がその例になります。

(5) は図 2.8 の tangle がその例になります。各成分は緑の正 4 面体の各面を含む平面上にのっています。□

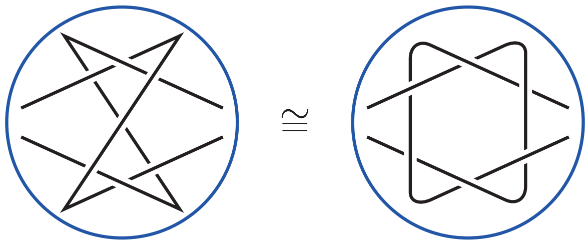

図 2.6: A nontrivial tangle with $3+3$ sticks.

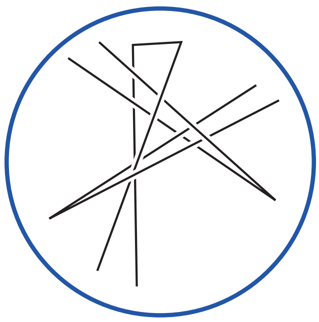

図 2.7: A nontrivial tangle with $3+2+2$ sticks.

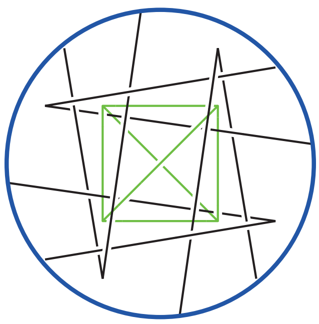

図 2.8: A nontrivial tangle with $2+2+2+2$ sticks.

参考文献

[1] C. Adams, B. Brennan, D. Greilsheimer, and A. Woo, Stick numbers and composition of knots and links, *J. Knot Theory Ramifications*, **6** (1997), 149-161.

[2] R. Crowell and R. Fox, Introduction to knot theory, Reprint of the 1963 original. Graduate Texts in Mathematics, No. 57. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. x+182 pp.

[3] Y. Huh, J. H. Lee and K. Taniyama, Stick number of tangles, preprint (2016).

[4] G. T. Jin, Polygon indices and superbridge indices of torus knots and links, *J. Knot Theory Ramifications*, **6** (1997), 281-289.

[5] G. T. Jin and H. S. Kim, Polygonal knots, *J. Korean Math. Soc.* **30** (1993), 371-383.

[6] J. Milnor, On the total curvature of knots, *Ann. Math.*, **52** (1950), 248-257.