3次元多様体の主イデール群の幾何的解釈について

Topological interpretation of principal idèles of 3-manifolds

新甫 洋史　(九州大学大学院数理学府)[*1]
植木 潤　　(東京大学大学院数理科学研究科)[*2]

概　要

3次元多様体のイデール的類体論の進展について解説する。これは局所理論を束ねて分岐アーベル被覆全体を記述する枠組みであり、整数論におけるArtin-高木、Chevalleyの理論の類似である。まず素数全体の集合の類似物である許容的絡み目の定義を改良し、ある種の関手性を担保する。次に新甫の主イデール群が2次相対ホモロジー群からイデール群への自然な射の像と一致することを示し、Mazur-Kapranov-Reznikov+森下の辞書の拡張を与える。

1. 背景

素数と結び目の概念的な類似が「辞書」の形に纏められている。この類似はMazur氏が最初に文献[Maz64]で指摘したと言われる。Kapranov氏（[Kap95]）とReznikov氏（[Rez97], [Rez00]）がMax-Plank研究所でこの類似を辞書の形に整理し「arithmetic topology（数論的位相幾何学）」と命名したようだ。日本では森下昌紀氏が独立に創始し、辞書に局所理論の類似を付け加えた（[Mor10], [Mor12]）。本稿では、それを$\mathrm{M}^2\mathrm{KR}$辞書と呼ぶ。そのうち今回の結果に関係する基本的な部分を以下に掲げる。

数論	低次元トポロジー
代数体k（整数環 $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k$） 素イデアル $\mathfrak{p}:\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_\mathfrak{p}\hookrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k$ 族 $S=\{\mathfrak{p}_1,...,\mathfrak{p}_s\}$ 体の (不分岐, 分岐) 拡大 F/k	有向連結閉 三次元多様体M 結び目 $K:S^1\hookrightarrow M$ 絡み目 $L:\sqcup S^1\hookrightarrow M$ 多様体の (不分岐, 分岐) 被覆 $h:N\to M$
étale基本群 $\pi_1^{\text{ét}}(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k)$ $\pi_1^{\text{ét}}(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k-S)$	基本群 $\pi_1(M)$ $\pi_1(M-L)$
イデアル群 I_k, 単項イデアル群 P_k $(\ ):k^\times\to I_k; a\mapsto (a)$	1-輪体群 $Z_1(M)$, 1-境界群 $B_1(M)$ $\partial: C_2(M)\to Z_1(M); s\mapsto \partial s$
イデアル類群 $\mathrm{Cl}(k)=I_k/P_k$ （事実： $\#\,\mathrm{Cl}(k)<\infty$）	$H_1(M)=Z_1(M)/B_1(M)$ （条件：$\#H_1(M)<\infty$）
Artin reciprocity: $\pi_1^{\text{ét}}(\overline{\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k})^{\mathrm{ab}}\cong \mathrm{Gal}(k_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{ur}}/k)\cong \mathrm{Cl}(k)$	Hurewicz map: $\pi_1(M)^{\mathrm{ab}}\cong \mathrm{Gal}(M_{\mathrm{ab}}/M)\cong H_1(M)$
ヒルベルトの分岐理論 イデール類体論	分岐被覆空間の理論, [Uek14] イデール類体論 ([Nii14], [NU])

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 57M12, Secondary 11R37, 11S31.
キーワード：idèle, class field theory, 3-manifold, branched covering, arithmetic topology

*1 〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡744 九州大学大学院数理学府
e-mail: h.niibo.411@s.kyushu-u.ac.jp
*2 〒153-8914 東京都目黒区駒場3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: uekijun46@gmail.com

本稿では結び目と言ったらS^1の埋め込みを指すものとし、アンビエントイソトピーで割らずに考える。また絡み目と言ったら有限個または可算無限個数の結び目の族であって自己交叉を持たないものとする。結び目や絡み目は、その像のことも同じ記号で表す。

結び目にはtameという条件を課す。MにC$^\infty$級三角形分割を固定したとき、これは次の同値な条件を満たすことである: (1) Mの自己同相でMのある細分に移る、(2) Mの自己同相でMのC$^\infty$部分多様体に移る、(3) 管状近傍を持つ。

この時、Sielpińskiの定理（[Eng89, Theorem 6.1.27]）によって、可算無限絡み目に対しても連結成分という言葉が通常通りに意味を持つ。

多様体（manifold）では、単に被覆と言ったら不分岐なものを指すのが通常である。本稿では分岐被覆と言ったら絡み目で分岐するものを指すとする。

$\#H_1(M)<\infty$という条件は、Mが有理ホモロジー3球面（$\mathbb{Q}$HS^3）であること、即ち$H_*(M;\mathbb{Q})\cong H_*(S^3;\mathbb{Q})$なることと同値である。$\mathbb{Q}$HS^{3}は大きなクラスであり豊かな理論を持つ。類数に関する理論の類似を論じる際には、この条件を仮定することがある。

$\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k$に$\mathcal{O}_k$の無限素点の全体を付け加えたものを$\overline{\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k}$と書く。無限素点の類似物は、多様体のEndであると言われるが（[Mor12]）、本稿ではMに閉を課しているため空である。（無限素点の類似についてはHajir氏の研究がある （[Haj12]）。）

類体論の3次元位相幾何における類似は、不分岐な場合にはよく知られている。kの(無限素点でも不分岐な)不分岐最大アーベル拡大を$k_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{ur}}/k$、$M$の(不分岐)最大アーベル被覆を$M_{\mathrm{ab}}\to M$と書く。

また分岐成分を固定した時に、「ヒルベルトの分岐理論」と呼ばれる分岐条件付きガロア理論の類似が知られる。分岐拡大・分岐被覆における素イデアル・結び目の振舞いは、分岐・分解・惰性の組合せで理解され、惰性群・分解群によって群論的に統制される（[Mor12, Chapter 5], [Uek14, §2]）。

イデールを用いた大域類体論の定式化は、局所理論を束ねて大域理論を記述する。その類似は、Sikora氏の個人ノート[Sik0s]と[Sik11]において最初に提案され、後に本稿の一人目の著者の修士論文[Nii14]の中で別の枠組みが記述された。後者の研究を徹底させ、Sikora氏の問いにも答えたのが論文[NU], [Nii17]である。本稿ではその概要を記す。

2. 結び目の局所類体論

3次元多様体M内の結び目Kを考え、管状近傍V_Kを取る。代数体kとその整数環の素イデアル$\mathfrak{p}$を取り、対応する局所体$k_\mathfrak{p}$、局所整数環$\mathcal{O}_\mathfrak{p}$と剰余体$\mathbb{F}_\mathfrak{p}$を考えると、次の辞書がある。ここに$\simeq$は（エタール）ホモトピー同値を表す。

$\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_\mathfrak{p}\simeq\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_\mathfrak{p}$	$V_K\simeq K$
$\mathrm{Spec}\,k_\mathfrak{p}\simeq\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_\mathfrak{p}-\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_\mathfrak{p}$	$\partial V_K\simeq V_K-K$

包含$\partial V_K\hookrightarrow V_K$が導く自然な射$H_1(\partial V_K)\to H_1(V_K)$と同型$H_1(V_K)\overset{\cong}{\to}\mathbb{Z}$の合成を$v_K$とする。$\mathrm{Ker}\,v_K$の生成元$\mu_K$を固定して、$K$のメリディアンと呼ぶ。自然な同型$\partial_*:H_2(V_K,\partial V_K)\overset{\cong}{\to}\langle\mu_K\rangle$がある。また$\lambda_K\in H_1(\partial V_K)$であって$v_K(\lambda_K)=1$なるものを固定して、$K$のロンジチュードと呼ぶ。次の並行な完全列があり、$v_K$は付値$v_\mathfrak{p}$の類似と見られる。

$$1 \to \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\times} \to k_{\mathfrak{p}}^{\times} \overset{v_{\mathfrak{p}}}{\to} \mathbb{Z} \to 0$$
$$0 \to H_2(V_K, \partial V_K) \overset{\partial_*}{\to} H_1(\partial V_K) \overset{v_K}{\to} \mathbb{Z} \to 0$$

局所類体論の相互写像・Hurewicz 同型により、中央の項たちは $k_{\mathfrak{p}}, V_K$ 上のアーベル拡大・芯 K で分岐するアーベル分岐被覆の全体を統制する。左から二番目の項たちは分岐を司る部分群（惰性群）である。これは大域理論において単数群 $\mathcal{O}_k^{\times}$ の類似物が $H_2(M)$ であるという [Mor12] の記述にも適合する。（M^{2}KR 辞書において単数の類似については諸説あるが、何れも曲面が関係する。）

局所体のエタール基本群 $\pi_1^{\text{ét}}(\operatorname{Spec} k_{\mathfrak{p}})$ は複雑な完備非可換群である。そのある商群は従順基本群と呼ばれ、$\langle \tau, \sigma \mid \tau^{q-1}[\tau, \sigma]\rangle$ (位相的に生成) という表示を持つ。ここで q は剰余体 $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$ の位数である。また τ はモノドロミー、σ はフロベニウスと呼ばれる元で、μ_K と λ_K に対応する役割を果たす。（$[a, b]$ で群の元 a, b の交換子を表す。）結び目の側では $\pi_1(\partial V_K) \cong H_1(\partial V_K) = \langle \mu_K, \lambda_K \mid [\mu_K, \lambda_K]\rangle \cong \mathbb{Z}^2$ という同型があり、その局所理論は簡単である。

3. Very admissible link

3 次元多様体において局所と大域の描像を得るには、「素イデアル全体の集合」の類似を固定する必要がある。以後、3 次元多様体 M を固定し、有向連結閉であると仮定する。代数体の整数環の素イデアルの全体の対応物を次のように定める。これは [Nii14] における「very admissible knot set」を改良したものである。

定義 3.1 ([NU]) $\mathcal{K} \subset M$ が **very admissible link** であるとは、（有限個または可算無限個の tame な連結成分からなる）絡み目であって、次の条件を満たすことをいう：$\mathcal{K}$ 内の有限絡み目で分岐する任意の有限次分岐被覆 $h : N \to M$ に対して、$H_1(N)$ が $\mathcal{K}$ の逆像 $h^{-1}(\mathcal{K})$ の連結成分たちによって生成される。

たとえば S^3 内の自明な結び目は very admissible である。三葉結び目（最も簡単な非自明な結び目）を含む very admissible link は無限成分の絡み目であると予想される。以下では絡み目といったら、有限個または可算無限個の tame な連結成分からなるものとする。very admissible link $\mathcal{K}$ は M 内に集積点を持つ場合があるので、絡み目としての管状近傍を備えうるとは限らない。しかし各連結成分 K の管状近傍 V_K はアンビエントイソトピー同値を除き一意であり、$H_1(\partial V_K)$ の元などは V_K の取り方を気にせずに定めることができる。

定理 3.2 ([NU]) M 内の任意の絡み目 L に対し、L を含む very admissible link $\mathcal{K}$ が存在する。

証明には次の補題を用いる。

補題 3.3 L が M 内の絡み目のとき、L を含むある絡み目 $\mathcal{L}$ があって、L 内の有限絡み目で分岐するような任意の有限次アーベル分岐被覆 $h : N \to M$ に対し、$H_1(N)$ を $\mathcal{L}$ の逆像の連結成分たちが生成する。

補題 3.3 の証明の概略を述べる。分岐被覆は分岐成分の補空間の不分岐被覆から Fox 完備化によって得られ、不分岐被覆（正確には、基点付き多様体の被覆の同型類）は基本群の部分群と、被覆のガロア理論によって一対一に対応する。各有限絡み目 $L' \subset L$

に対し、絡み目群 $\pi_1(M-L')$ の指数有限部分群は可算個であることに気をつけると、そのような分岐被覆は可算個であるから、その全体の集合を $\{h_i : N_i \to M\}_{i\in\mathbb{N}=\mathbb{N}\cup\{0\}}$ と書く。但し $h_0 = \mathrm{id}_M$ とする。絡み目の包含列 $L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_i \subset \cdots$ を次のように再帰的に構成する。まず $L_0 = L$ とする。次に $i \in \mathbb{N}_{>0}$ に対し、L_{i-1} が与えられていたとする。N_i はコンパクトなので $H_1(N_i)$ は有限生成である。N_i に C^∞ 級構造を固定すると、$\mathrm{C}^\infty(S^1, N_i)$ においてはコンパクト開位相と Whiteny 位相と呼ばれる 2 つの位相が一致し、Baire 条件をみたす（[Hir94, Chapters 1, 2]）。これを用いると、N_i 内の絡み目 $\widetilde{L}_i$ であって、$h_i^{-1}(L_{i-1})$ を含み、その成分たちが $H_1(N_i)$ を生成し、像 $h_i(\widetilde{L}_i)$ が再び M の絡み目であるようなものが取れる。ここで $L_i := h_i(\widetilde{L}_i)$ と置く。最後に $\mathcal{L} = \cup_{i\in\mathbb{N}} L_i$ とおけばよい。

次に定理 3.2 の証明の概略を述べる。M 内の絡み目の包含列 $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{K}_i \subset \cdots$ を次のように再帰的に構成する。まず $\mathcal{K}_0$ を L と $H_1(M)$ の生成元を含む絡み目とする。つぎに $i \in \mathbb{N}_{>0}$ に対し $\mathcal{K}_{i-1}$ が与えられていたとし、$\mathcal{K}_{i-1}$ から補題により得られる絡み目を $\mathcal{K}_i$ とする。最後に $\mathcal{K} := \cup \mathcal{K}_i$ とすればよい。

4. 3次元多様体のイデール

以後、M 内に very admissible link $\mathcal{K}$ を固定する。対 $(M,\mathcal{K})$ の**イデール群** $\mathbb{I}_{M,\mathcal{K}}$ を次のように定める。ここで $K \subset \mathcal{K}$ は部分結び目を走るとする。

$$\mathbb{I}_{M,\mathcal{K}} := \prod_{K\subset\mathcal{K}}' H_1(\partial V_K) = \left\{ (a_K)_K \in \prod_{K\subset\mathcal{K}} H_1(\partial V_K) \;\middle|\; v_K(a_K) = 0 \text{ for almost all } K \right\}.$$

なお各 $K \subset \mathcal{K}$ に対し $\langle \mu_K \rangle := \mathrm{Ker}\, v_K$ に副有限位相（局所ノルム位相と呼ぶ）を与える。また $H_1(\partial V_K)$ の局所位相を、$\langle \mu_K \rangle \hookrightarrow H_1(\partial V_K)$ が開かつ連続となる位相群としての位相と定める。すると $\mathbb{I}_{M,\mathcal{K}}$ は、開集合の族 $\{\langle \mu_K \rangle\}_{K\subset\mathcal{K}}$ に関する制限直積である。

以下では $L \subset \mathcal{K}$ は有限部分絡み目を走るとする。Milnor 完全列を用いた議論によって、自然な同型 $H_1(M-\mathcal{K}) \cong \varprojlim_{L\subset\mathcal{K}} H_1(M-L)$ がある。これを本稿では同一視して G_{ab} と書き、代数体の最大アーベル拡大のガロア群 $\mathrm{Gal}(k_{\mathrm{ab}}/k)$ の対応物として考える。自然な射 $\widetilde{\rho}_{M,\mathcal{K}} : \mathbb{I}_{M,\mathcal{K}} \to G_{\mathrm{ab}}$ がある。

主イデール群 $\mathbb{P}_{M,\mathcal{K}}$ を以下のように定める ([NU]): Sielpiński の定理を用いると、自然な同型 $H_2(M,\mathcal{K}) \cong \varinjlim_{L\subset\mathcal{K}} H_2(M,L)$ が得られる。各階の射を考察すると、自然な射 $\Delta : H_2(M,\mathcal{K}) \to \mathbb{I}_{M,\mathcal{K}}$ が定まることが分かる。この像を主イデール群 $\mathbb{P}_{M,\mathcal{K}}$ と定める。

これは代数体 k に対して乗法群のイデール群への対角埋め込み $\Delta : k^\times \to \mathbb{I}_k$ の像を主イデール群 $\mathbb{P}_k$ と定めることの類似と見られる。なお [Nii14] では $\mathbb{P}_{M,\mathcal{K}}$ を $\mathrm{Ker}\, \widetilde{\rho}_{M,\mathcal{K}}$ で定義していた。次の定理は旧定義に "曲面的な" 解釈を与えたことを意味する。

定理 4.1 ([NU]) $\mathrm{Im}\, \Delta = \mathrm{Ker}\, \widetilde{\rho}_{M,\mathcal{K}}$ が成り立つ。

イデール類群を $\mathbb{C}_{M,\mathcal{K}} = \mathbb{I}_{M,\mathcal{K}}/\mathbb{P}_{M,\mathcal{K}}$ で定義する。

また**単イデール群**を $\mathbb{U}_{M,\mathcal{K}} := \mathrm{Ker}(\prod_{K\subset\mathcal{K}} v_K) \cap \mathbb{I}_{M,\mathcal{K}}$ で定める。これはメリディアン元たちによって生成される部分群である。同型 $\mathbb{I}_{M,\mathcal{K}}/(\mathbb{U}_{M,\mathcal{K}} + \mathbb{P}_{M,\mathcal{K}}) \cong H_1(M)$ がある。

得られた「辞書の拡張」をまとめる:

イデール群 $\mathbb{I}_k$	イデール群 $\mathbb{I}_{M,\mathcal{K}}$
対角埋め込み $\Delta : k^\times \to \mathbb{I}_k$	$\Delta : H_2(M,\mathcal{K}) \to \mathbb{I}_{M,\mathcal{K}}$
主イデール群 $\mathbb{P}_k := \mathrm{Im}\,\Delta$	主イデール群 $\mathbb{P}_{M,\mathcal{K}} := \mathrm{Im}\,\Delta$
イデール類群 $\mathbb{C}_k := \mathbb{I}_k/\mathbb{P}_k$	イデール類群 $\mathbb{C}_{M,\mathcal{K}} := \mathbb{I}_{M,\mathcal{K}}/\mathbb{P}_{M,\mathcal{K}}$
単イデール群 $\mathbb{U}_k$	単イデール群 $\mathbb{U}_{M,\mathcal{K}}$

イデール類群$\mathbb{C}_{M,\mathcal{K}}$には二つの自然な位相が入り位相群となる。一つは**ノルム位相**と名付けられ、これは$\mathcal{K}$の有限部分絡み目Lで分岐するような各有限次分岐アーベル被覆のイデール類群のノルムによる像を0の基本近傍系とするものである。もう一つは**標準位相**と名付けられ、これは局所位相の制限直積位相の商位相として定義される。もしMが有理ホモロジー球面ならばこの二つは一致するが、一般には異なる。ノルム位相についての開部分群の全体は、標準位相の指数有限な開部分群の全体と一致する。

代数体の乗法群$k^\times$の類似物が$C_2(M)$と$H_2(M,\mathcal{K})$の2つに分かれている。これについて、有限étale層なる概念を導入することで説明できるという報告があった([Mih16])。

5. 3次元多様体の大域類体論

次に述べる主定理の(2)と(3)は、代数体の大域類体論におけるArtin相互律と存在定理（[Neu99, Chapter VI, Theorems 5.5, 6.1]）の類似である。

定理 5.1 (大域類体論; [Nii14], [NU]) 標準的な同型 $\mathbb{C}_{M,\mathcal{K}} \overset{\cong}{\twoheadrightarrow} G_{\mathrm{ab}} = H_1(M-\mathcal{K})$が定まり次を満たす。
(1) 局所理論と整合的である。
(2) （大域相互律） $\mathcal{K}$内の有限絡み目で分岐する任意の有限次アーベル分岐被覆$h : N \to M$に対して、同型$\mathbb{C}_{M,\mathcal{K}}/h_*(\mathbb{C}_{N,h^{-1}(\mathcal{K})}) \cong \mathrm{Gal}(h)$ を導く。
(3)（存在定理）$\{H < \mathbb{C}_{M,\mathcal{K}} \mid$開(ノルム位相)$\} = \{H < \mathbb{C}_{M,\mathcal{K}} \mid$開(標準位相)、指数有限$\}$と$\{\mathcal{K}$内の有限絡み目で分岐する有限分岐アーベル被覆$h : N \to M$の基点付き同型類$\}$の間に自然な全単射を導く。

基点付き同型類（基点付き多様体の分岐被覆としての同型類）を考えることは、固定された十分大きな体（例えば$\mathbb{C}$）の中で代数体を考えることに対応する。実際、数論幾何では$\mathrm{Spec}\,\mathbb{C} \to \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k$が基点と呼ばれる。逆に$M$の「$\mathcal{K}$分岐最大アーベル被覆」を副有限被覆として取り、その商として得られる有限次分岐被覆の全体を考えてもよい。

定理の証明のポイントは、$\mathbb{I}_{M,\mathcal{K}} = (\text{meridian part}) \oplus (\text{longitude part}) \cong \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \oplus \mathbb{Z}^{\oplus \mathbb{N}}$から$\mathbb{C}_{M,\mathcal{K}}$への商写像が、扱いやすい商を経由することである。主張を述べるために$\mathcal{K}$を固定したことと、また$\mathbb{P}_{M,\mathcal{K}}$の曲面類による定義にも注意されたい。

数論では**類体公理**から(2), (3)を導く方法があった。$(M,\mathcal{K})$のイデール群やイデール類群のTate cohomologyは、代数体の場合と比べると、ノルムとトレースの役割が部分的に逆転しており、惰性成分を余計に数えてしまうため、見た目が異なる。

存在定理については、数論の側では**ノルム剰余記号**を導入して行われる証明があるが、結び目の側でも、そのようにもできる。

ノルム剰余記号の特別な場合として、ルジャンドル記号とmod 2の絡み目数を並行に見られる。代数体のArtin相互律からは、例えば$\mathbb{Q}$の2次拡大に対する平方剰余の相互法則が従うことが知られている。結び目の側でも、S^3上の2次岐被覆を考えると、大域相互律からmod 2の絡み目数の対称性を導くことができる。

6. 応用

代数体に対する「種の理論」の3次元多様体における類似が[Mor01], [Mor12, Chapter 6]や[Uek14]で議論されていた。本稿のイデール理論を用いることで、「相対的な種の理論」の公式（[Fur67]）の類似を、原証明と並行な形で示すことができる（[Uek16]）。この公式により、幾つかの古典的な岩澤理論の結果（[Iwa73], [Iwa81], [Kid80]）の類似が示される（[Uek], [Uek16]）。

謝辞

著者たちを励まし導いて下さった森下昌紀先生、講演の機会を下さった組織委員の先生方、本稿原案に詳細なコメントを下さった辻雄先生を始めとする先生方、色々な示唆や指摘を下さった三原朋樹氏、Sielpińskiの定理やBaireのカテゴリー定理についてご教示下さった山下温氏らに感謝します。本研究はJSPS科研費（課題番号25-2241, 27-7102）の助成を受けたものです。

参考文献

[Eng89] Ryszard Engelking. *General topology*, volume 6 of *Sigma Series in Pure Mathematics*. Heldermann Verlag, Berlin, second edition, 1989. Translated from the Polish by the author.

[Fur67] Yoshiomi Furuta. The genus field and genus number in algebraic number fields. *Nagoya Math. J.*, 29:281–285, 1967.

[Haj12] Farshid Hajir. Fundamental groups of number fields. In *Low-Dimensional Topology and Number Theory*, number 42/2012 in Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, pages 2561–2564. Gunnells, Paul E. and Neumann, Walter and Sikora, Adam S. and Zagier, Don, August 26–September 1 2012.

[Hir94] Morris W. Hirsch. *Differential topology*, volume 33 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1976 original.

[Iwa73] Kenkichi Iwasawa. On the μ-invariants of Z_ℓ-extensions. In *Number theory, algebraic geometry and commutative algebra, in honor of Yasuo Akizuki*, pages 1–11. Kinokuniya, Tokyo, 1973.

[Iwa81] Kenkichi Iwasawa. Riemann-Hurwitz formula and p-adic Galois representations for number fields. *Tôhoku Math. J. (2)*, 33(2):263–288, 1981.

[Kap95] M. M. Kapranov. Analogies between the Langlands correspondence and topological quantum field theory. In *Functional analysis on the eve of the 21st century, Vol. 1 (New Brunswick, NJ, 1993)*, volume 131 of *Progr. Math.*, pages 119–151. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995.

[Kid80] Yûji Kida. l-extensions of CM-fields and cyclotomic invariants. *J. Number Theory*, 12(4):519–528, 1980.

[Maz64] Barry Mazur. Remarks on the Alexander polynomial. unpublished note, http://www.math.harvard.edu/~mazur/papers/alexander_polynomial.pdf, 1963–64.

[Mih16] Tomoki Mihara. On M^2KR dictionary for metrised 3-dimensional manifolds. slides for the workshop “Low dimensional topology and number theory VIII”, Fukuoka, March 2016.

[Mor01] Masanori Morishita. A theory of genera for cyclic coverings of links. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 77(7):115–118, 2001.

[Mor10] Masanori Morishita. Analogies between knots and primes, 3-manifolds and number rings [translation of mr2208305]. *Sugaku Expositions*, 23(1):1–30, 2010. Sugaku expositions.

[Mor12] Masanori Morishita. *Knots and primes.* Universitext. Springer, London, 2012. An introduction to arithmetic topology.

[Neu99] Jürgen Neukirch. *Algebraic number theory*, volume 322 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer-Verlag, Berlin, 1999. Translated from the 1992 German original and with a note by Norbert Schappacher, With a foreword by G. Harder.

[Nii14] Hirofumi Niibo. Idèlic class field theory for 3-manifolds. *Kyushu J. Math*, 68(2):421–436, 2014.

[Nii17] Hirofumi Niibo. *Idèlic class field theory for 3-manifolds.* PhD thesis, Kyushu University, (to appear on the website), March 2017.

[NU] Hirofumi Niibo and Jun Ueki. Idelic class field theory for 3-manifolds and very admissible links. submitted, http://arxiv.org/abs/1501.03890.

[Rez97] Alexander Reznikov. Three-manifolds class field theory (homology of coverings for a nonvirtually b_1-positive manifold). *Selecta Math. (N.S.)*, 3(3):361–399, 1997.

[Rez00] Alexander Reznikov. Embedded incompressible surfaces and homology of ramified coverings of three-manifolds. *Selecta Math. (N.S.)*, 6(1):1–39, 2000.

[Sik0s] Adam S. Sikora. Idelic topology, notes for personal use. unpublished note, (2000s).

[Sik11] Adam S. Sikora. slides for the workshop "Low dimensional topology and number theory III", March, 2011, Fukuoka. slides, 2011.

[Uek] Jun Ueki. On the Iwasawa invariants for links and Kida's formula. preprint, http://arxiv.org/abs/1605.09036.

[Uek14] Jun Ueki. On the homology of branched coverings of 3-manifolds. *Nagoya Math. J.*, 213:21–39, 2014.

[Uek16] Jun Ueki. On the Iwasawa μ-invariants of branched $\mathbb{Z}_p$-covers. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 92(6):67–72, 2016.