

仮想トールス結び目の 仮想結び目解消数について

柳 宏和 (東北大学大学院理学研究科)*

1. 序文

論文 [6, 4] において, 標準的なトールス結び目のいくつかの交差を仮想交差にして得られる仮想トールス結び目の仮想結び目解消数の決定を行った. 本報告書では論文の結果について解説する.

仮想結び目とは Kauffman により導入された, 結び目理論を拡張した概念である [3]. 結び目の量子不変量の研究において, ガウス図式という図式が扱われるが, ガウス図式のうち結び目図式に対応しないものが存在するため, それらの結び目図式として実現するために, 仮想交差をもつ仮想結び目図式が導入された. Kauffman はさらに仮想ライデマイスター移動を導入することで, 仮想結び目図式の同値類を定義し, それらがガウス図式の観点から必要とされる諸性質をみたと記した. この同値類のことを仮想結び目という. 仮想結び目 K の仮想結び目解消数 $\text{vu}(K)$ とは, 仮想結び目 K を自明な結び目に変形するまでの交差交換の最小数である. 一般に, 古典的な結び目は交差交換を行うことで自明な結び目に変形できることが知られているが, すべての仮想結び目が交差交換を行うことで自明な結び目に変形できるとは限らない. また, 古典的な結び目は交差の数の半分以下の回数の交差交換を行うことで自明な結び目に変形できることが知られているが, 仮想結び目についてはそのような結果は知られていない. 最近, Kaur と鎌田, 河内, Prabhakar によって, 一般結び目解消数が導入され, 研究が進められている. 詳しくは [2] を参照.

主結果を述べる前に, まず, 標準的なトールス結び目及び, 仮想トールス結び目の定義を述べる.

定義 1.1. 互いに素な自然数 p と q に対して, S^3 に標準的に埋め込まれたトールス上をロンジチュード方向に p 回, メリディアン方向に q 回まわった単純閉曲線を (p, q) -トールス結び目といい, $T(p, q)$ で表す.

定義 1.2. (p, q) -トールス結び目図式 (p と q は互いに素な自然数) のいくつかの交差を仮想交差にした図式を仮想トールス結び目という. また, (p, q) -トールス結び目図式において上を通る紐 (overstrand) を a_1, a_2, \dots, a_q とする. a_1, a_2, \dots, a_n ($n = 1, \dots, q$) 上の交差を全て仮想交差にした図式を $VT_{p,q}^n$ で表す.

例として, 仮想トールス結び目 $VT_{7,3}^1$ は 図 1 の図式のブレイドの両端を自然に閉じることによって得られる仮想結び目である. ブレイドの両端を自然に閉じる操作のことを, ブレイドの閉包という. 以降, 仮想トールス結び目をブレイドで表記した場合, 結び目の両端をブレイドの上側で閉包をとっているものとする.

論文 [6, 4] では, あるクラスの仮想トールス結び目の仮想結び目解消数に関する以下の結果を示した.

* 〒 980-8578 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6 番 3 号 東北大学 大学院理学研究科
e-mail: sara.320.410@gmail.com

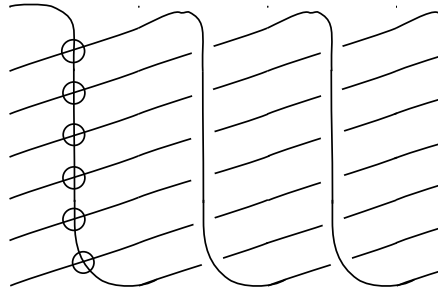


図 1: $VT_{7,3}^1$

主定理 1 (Y.). 仮想トーラス結び目 $VT_{p,q}^1$ に対して

$$\text{vu}(VT_{p,q}^1) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

が成り立つ.

また, より一般の仮想トーラス結び目 $VT_{p,q}^n$ に対して, 仮想結び目解消数の下からの評価を得た.

主定理 2 (Y.). p と n が互いに素のとき, 仮想トーラス結び目 $VT_{p,q}^n$ に対して

$$\text{vu}(VT_{p,q}^n) \geq \frac{(p-1)(q-n)}{2}$$

が成り立つ.

主定理 1 により得られた仮想トーラス結び目 $VT_{p,q}^1$ の仮想結び目解消数は 1993 年に Kronheimer と Mrowka によって示された古典的なトーラス結び目における結び目解消数と一致している. また, 主定理 2 より, これらの仮想トーラス結び目については, 自明な結び目にするためには交差の数の半分以上の回数の交差交換が必要であることが分かる.

謝辞

第 2.3 節の増田氏の結果は, 研究集会の講演後に神戸大学大学院理学研究科の佐藤進先生より教えていただきました. 貴重なご助言をしてくださった佐藤進先生に感謝いたします.

2. 準備

2.1. 仮想結び目の定義

定義 2.1. 向きづけられた単純閉曲線の平面へのはめ込みで, 図 2 に示した上下の情報をもつ二重点の交差 (classical crossing) と交差点 (crossing point) に小さな円が書かれた仮想交差 (virtual crossing) をもつ図式を仮想結び目図式 (virtual knot diagram) という.

また, 交差のない結び目を自明な結び目図式 (unknot) という.

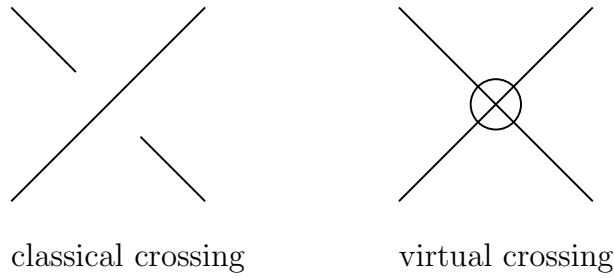


図 2: 交差の種類

定義 2.2. (Generalized Reidemeister moves) 図 3 に示した R_1, R_2, R_3 をライデマイスター移動 (Reidemeister moves), VR_1, VR_2, VR_3 を仮想ライデマイスター移動 (virtual Reidemeister moves), MR を混合ライデマイスター移動 (mixed Reidemeister moves) といい, 全て合わせて一般ライデマイスター移動 (generalized Reidemeister moves) という.

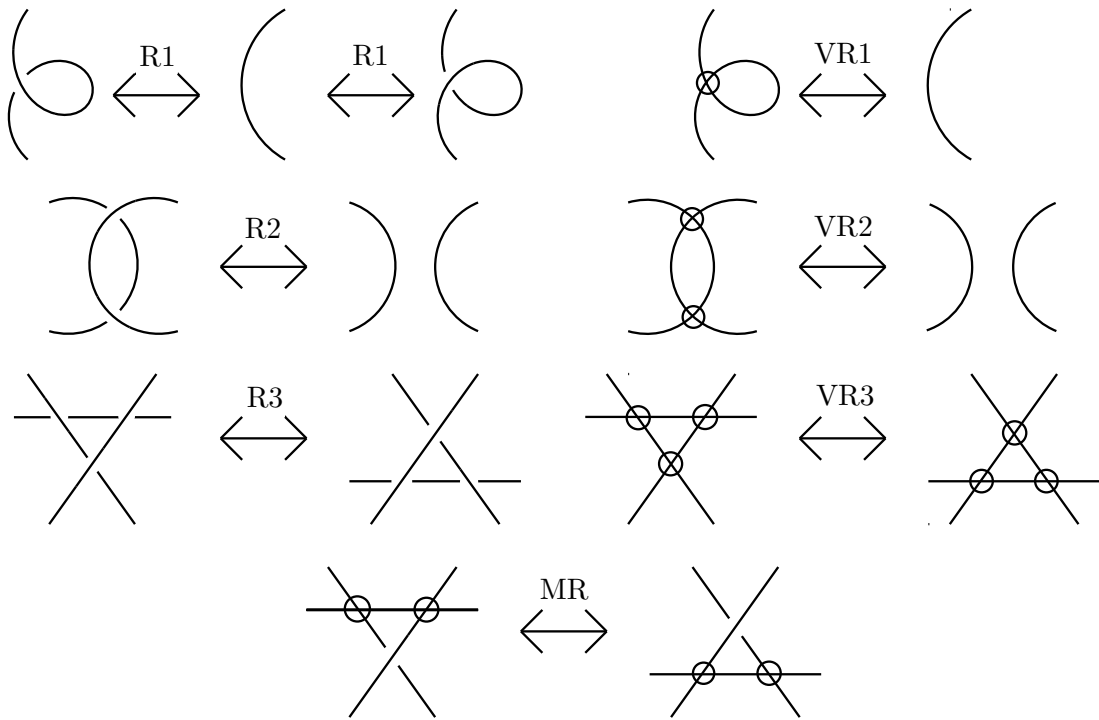


図 3: Generalized Reidemeister moves

定義 2.3. 仮想結び目 K, K' の仮想結び目図式 D, D' がアンビエントイソトピーと有限回の一般ライデマイスター移動で移りあうとき, K と K' は同値であるという.

注意 2.4. 仮想交差のみの仮想結び目図式は, 自明な結び目図式と同値である.

定義 2.5. 仮想結び目に任意の向きを与え, 各交点でのひもの向きが図 4 の左図のようなとき, その交差は正であるといい, 右図のようなとき, その交差は負であるという. 正の交差 c の符号 $\text{sign}(c)$ を $+1$, 負の交差 e の符号 $\text{sign}(e)$ を -1 と定める.

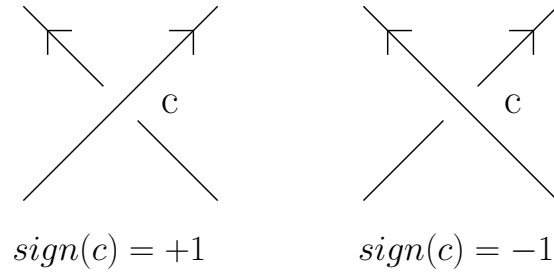


図 4: 交点の符号

2.2. ガウス図式

定義 2.6. n 個の交点をもつ結び目図式 D のガウス図式 (Gauss diagram) G_D とは以下のような手順で得られる有向コードをもつ円周である .

- n 個の交点に $1 \sim n$ の添え字をする .
- 図式に向きを与え , 結び目図式上の一点 a を固定し向きに従って結び目を辿る .
- 再度 a に戻るまでの各交差の上下の情報を得る .
- 円周上に上下の情報と交点の添え字をつける .
- 交点の添え字が同じものをコードで結ぶ .
- 各コードに上の交差 (over crossing) から下の交差 (under crossing) への向きをつける .
- 各コードに結び目図式 D の符号をつける .

ここで , コードのない自明なガウス図式 (empty Gauss diagram) を自明な図式 (unknot diagram) とする .

2.3. 仮想結び目の曲面上での実現

定義 2.7. 仮想結び目 K の仮想結び目図式 D に対して , 図 5 のように各交差と仮想交差で近傍 N をとった図式を抽象的結び目図式 (abstract knot diagram) といい , $P = (N, D)$ で表す .

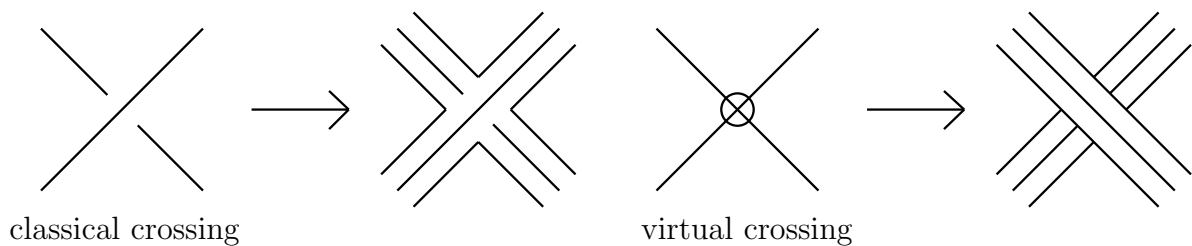


図 5: 各交差または仮想交差での近傍

定義 2.8. 仮想結び目図式 D の近傍をとった抽象的結び目図式を $P = (N, D)$ に対して, P の境界に沿って円盤 (disk) を貼って得られた閉曲面 F を D の台曲面という. また, F の種数を D の台種数 (supporting genus) といい, $sg(D)$ で表す.

定義 2.9. 仮想結び目 K の台種数とは, K の仮想結び目図式 D における $sg(D)$ の最小値で $sg(K)$ で表す.

台種数 1 の仮想結び目に対して, 次のことが知られている.

補題 2.10 (増田 [5]). 仮想結び目図式 D の台種数が 1 のとき, 以下の 2 つを満たす仮想結び目図式の列 $D = D_0, D_1, D_2, \dots, D_n = D'$ が存在する.

- (1) $\forall i, D_{i+1}$ は D_i に対して 1 回のライデマイスター移動または交差交換で得られる.
- (2) D_n は自明な結び目である.

2.4. Flip move

定義 2.11. ガウス図式のコードの向きと符号を変える変形を flip move という.

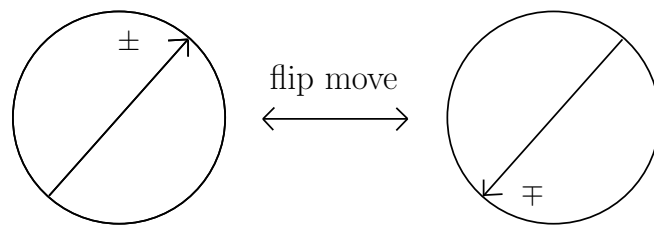


図 6: flip move

定義 2.12. 2 つのガウス図式がイソトピーと flip move で変形できるとき, ホモトピー同値であるという.

ガウス図式における flip move は, 結び目図式における交差交換 (switching) と同じである.

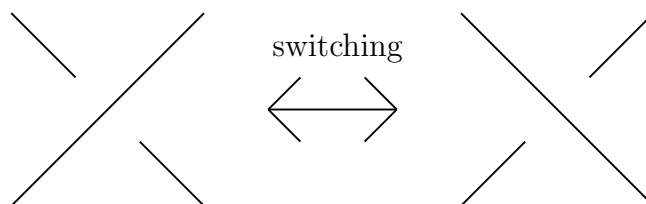


図 7: 交差交換

定義 2.13. 2 つの仮想結び目図式が有限回の一般ライデマイスター移動と交差交換で移り合うとき, それらはホモトピー同値 (virtually homotopic) であるという.

特に, 仮想交差をもたない任意の結び目 (つまり古典的な結び目) は交差交換により自明な結び目に変形できるから, 一般に, 古典的な結び目 (classical knot) は自明な結び

目に対してホモトピー同値であるが，仮想結び目は一般に自明な結び目にホモトピー同値ではない．

定義 2.14. 仮想結び目図式の交差を仮想交差に変える変形を仮想化 (virtualization) という¹．

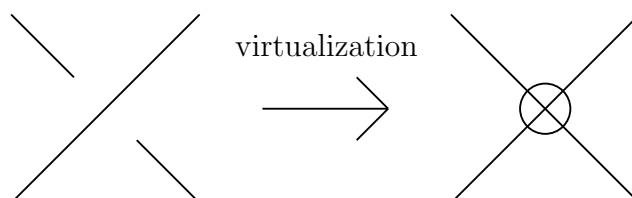


図 8: 仮想化

全ての仮想結び目は，交差交換と仮想化を行うことで自明な結び目に変形できる．

定義 2.15. 仮想結び目 K が自明な結び目に対してホモトピー同値なとき，自明な結び目にするために必要な交差交換の最小回数を K の仮想結び目解消数 (virtual unknotting number) $\text{vu}(K)$ と定義する．

2.5. 不変量 $P(K)$ の定義と性質

定義 2.16 (A. Henrich の不変量 $P(K)$, [1] を参照). 仮想結び目 K のガウス図式 G_D 内のコード c は G_D の円周を 2 つの弧 (arc) a_1, a_2 に分ける．コード c 以外のコードで flip move を行い全てのコードを弧 a_1, a_2 の一方に向ける． $i(c)$ を flip move をしたあとのコードの符号の和とし，コード c の符号を $\text{sign}(c) = \pm 1$ とする．このとき，多項式 $P(D)$ を以下で定義する．

$$P(D) = \sum_{c \text{ such that } i(c) \neq 0} \text{sign}(c)t^{|i(c)|}$$

$P(D)$ は K を表す結び目図式 D の選び方に依らず， $P(D)$ は整数係数の多項式になる．これを仮想結び目 K の不変量 $P(K)$ という．

補題 2.17 (Byberi-Chernov [1], Remark 3.2). 仮想結び目 K が自明な結び目にホモトピー同値とする． b_j を K の不変量 $P(K)$ の j 次の係数とする．すなわち， $P(K) = \sum_{j>0} b_j t^j$ とする．このとき，

$$\text{vu}(K) \geq \frac{\sum_{j>0} |b_j|}{2}$$

が成り立つ．

3. 主定理の証明の概略

3.1. 記号の準備

図 9 に示したブレイド (braid) を B_k で表す．二つのブレイドのブレイド指数が同じ値のとき，ブレイドを二つ繋げることで新たなブレイドを作ることができる．これをブレイド積という．

¹論文 [3] では，virtualization は別の意味で使われている．

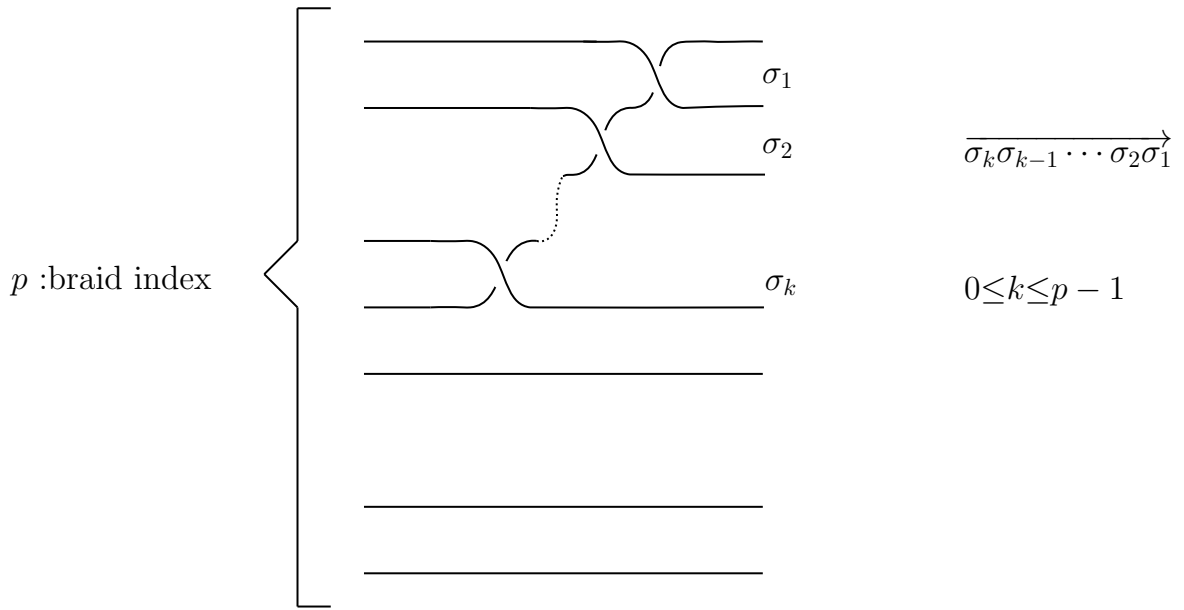


図 9: ブレイド

(r, s) -トーラス絡み目図式において上を通る紐 (overstrand) を a_1, a_2, \dots, a_s とする . a_1, a_2, \dots, a_k ($k \in \{1, \dots, s\}$) 上の交差を全て仮想交差にした図式のブレイド部分を $VB_{r,s}^k$ で表す .

定義 3.1. $VB_{i,j}^1$ と B_k のブレイド積の閉包を (i, j, k) と表記する .

一般に (i, j, k) は仮想絡み目になる場合もあるので , この論文では常に (i, j, k) は仮想結び目と仮定する .

例 3.2. 仮想結び目 $(7, 4, 2)$ は図 10 の図式にあるブレイドの閉包である .

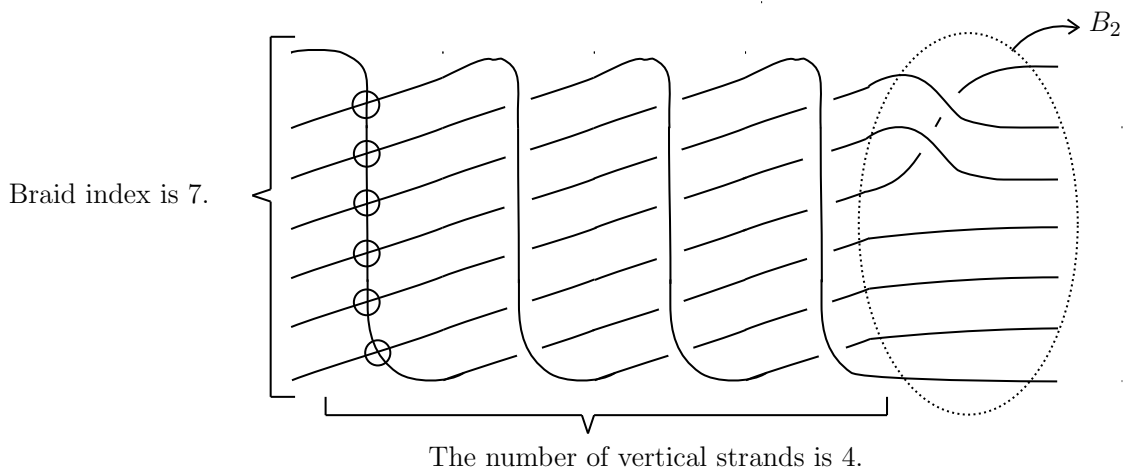


図 10: 仮想結び目 $(7, 4, 2)$

3.2. 主結果の証明

主定理 1 は次の定理より従う .

定理 3.3. $i, j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ とし $i > k$ とする . (i, j, k) が仮想結び目のとき ,

$$\text{vu}((i, j, k)) = \frac{(i-1)(j-1) + k}{2}$$

が成り立つ .

証明の概略 . 不等号 \geq は不変量 $P(K)$ を用いて示す . まず , 正ブレイドの閉包に対し , 不変量 $P(K)$ の係数を計算する際の $i(c)$ が 0 となることを確認する . これを利用して , その交差を仮想交差に変えた場合には , $i(c)$ が 0 にならないことが示せる . すべての交差が正であることから , $P(K)$ の係数は $i(c) \neq 0$ となる交点の数と一致する . 仮想結び目図式 (i, j, k) の交差の数は $(i-1)(j-1) + k$ であるから , 不等式 \geq が従う .

不等号 \leq は実際に結び目解消操作を見つけることで証明する . 証明では 以下の 3 つの操作を導入する :

- operation A: $k + j < i$ のとき , $(i, j, k) \mapsto (i-1, j, j+k-1)$
- operation B: $i < k + j < 2i - 1$ かつ $i \neq k + 1$ のとき ,
 $(i, j, k) \mapsto (i-1, j-1, j+k-i-1)$
- operation C: $i = k + 1$ かつ $j \geq 2$ のとき , $(i, j, k) \mapsto (i, j-1, 0)$.

Operation A では交差交換は使わない . Operation B と C では $i-1$ 回の交差交換を使う . (i, j, k) の場合分けに従い , operation A, B, C のいずれかを適用して , 仮想結び目を自明な結び目に変形できることを示し , さらにそのときに利用した交差交換の数が $((i-1)(j-1) + k)/2$ であることを示す . 証明は数学的帰納法を用いて行う . 詳しくは論文 [6, 4] を参照 . \square

4. 一般の $VT_{p,q}^n$ について

一般の $VT_{p,q}^n$ については , 序文で述べたように , p と n が互いに素という条件の下で , 仮想結び目解消数の下からの評価が得られる . これは , 定理 3.3 の証明と同様に , 不変量 $P(K)$ を用いて示すことができる . 詳しくは論文 [6, 4] を参照 .

例 4.1. $VT_{7,3}^2$ は図 11 の図式にあるブレイドの閉包である .

論文 [6] ではさらに $p, q \leq 8$ における仮想結び目 $VT_{p,q}^2, VT_{p,q}^3$ の仮想結び目解消数を調べた . 結果はそれぞれ表 1, 表 2 を参照 . 下からの評価は定理 4.2 を利用するか , p と n が互いに素でない場合は不変量 $P(K)$ を直接計算することで得られる . 上からの評価は結び目解消の列を直接見つけることで示す . $VT_{8,5}^2$ 以外についてはこの手法で仮想結び目解消数を決定することができた . $VT_{8,5}^2$ については結び目解消操作をまだ見つけられていない . これらの仮想結び目の具体的な結び目解消操作については論文 [6] を参照 .

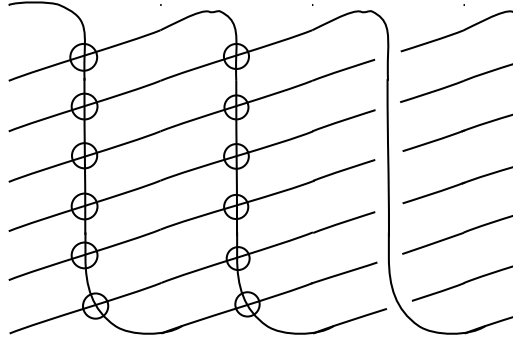


図 11: $VT_{7,3}^2$

$VT_{p,q}^2$	lower bound	upper bound	virtual unknotting number
(3,2)	0	0	$\text{vu}(VT_{3,2}^2) = 0$
(4,3)	1	1	$\text{vu}(VT_{4,3}^2) = 1$
(5,2)	0	0	$\text{vu}(VT_{5,2}^2) = 0$
(5,3)	2	2	$\text{vu}(VT_{5,3}^2) = 2$
(5,4)	4	4	$\text{vu}(VT_{5,4}^2) = 4$
(6,5)	7	7	$\text{vu}(VT_{6,5}^2) = 7$
(7,2)	0	0	$\text{vu}(VT_{7,2}^2) = 0$
(7,3)	3	3	$\text{vu}(VT_{7,3}^2) = 3$
(7,4)	6	6	$\text{vu}(VT_{7,4}^2) = 6$
(7,5)	9	9	$\text{vu}(VT_{7,5}^2) = 9$
(7,6)	12	12	$\text{vu}(VT_{7,6}^2) = 12$
(8,3)	3	3	$\text{vu}(VT_{8,3}^2) = 3$
(8,5)	9	10	$9 \leq \text{vu}(VT_{8,5}^2) \leq 10$
(8,7)	17	17	$\text{vu}(VT_{8,7}^2) = 17$

表 1: $VT_{p,q}^2$ における仮想結び目解消数

$VT_{p,q}^3$	lower bound	upper bound	virtual unknotting number
(4,3)	0	0	$\text{vu}(VT_{4,3}^3) = 0$
(5,3)	0	0	$\text{vu}(VT_{5,3}^3) = 0$
(5,4)	2	2	$\text{vu}(VT_{5,4}^3) = 2$
(6,5)	4	4	$\text{vu}(VT_{6,5}^3) = 4$
(7,3)	0	0	$\text{vu}(VT_{7,3}^3) = 0$
(7,4)	3	3	$\text{vu}(VT_{7,4}^3) = 3$
(7,5)	6	6	$\text{vu}(VT_{7,5}^3) = 6$
(7,6)	9	9	$\text{vu}(VT_{7,6}^3) = 9$
(8,3)	0	0	$\text{vu}(VT_{8,3}^3) = 0$
(8,5)	7	7	$\text{vu}(VT_{8,5}^3) = 7$
(8,7)	14	14	$\text{vu}(VT_{8,7}^3) = 14$

表 2: $VT_{p,q}^3$ における仮想結び目解消数

参考文献

- [1] E. Byberi and V. Chernov, *Virtual bridge number one knots*, Commun. Contemp. Math. **10** (2008), 1013–1021.
- [2] K.Kaur and S.Kamada and A.Kawauchi and M.Prabhakar, *Generalized unknotting numbers of virtual knot*, preprint.
- [3] L.H. Kauffman, *Introduction to Virtual Knot Theory*, J. Knot Theory Ramifications **21** (2012), no. 13, 1240007, 37 pp.
- [4] M.Ishikawa, H.Yanagi, *Virtual unknotting numbers of certain virtual torus knots*, arXiv1701.03999
- [5] 増田優祐, 結び目の図式とデーン表示群, 修士学位論文, 神戸大学, 2014.
- [6] 柳宏和, 仮想トーラス結び目の仮想結び目解消数について, 修士論文, 東北大学, 2017