双曲3次元多様体の通約可能性と体積

吉田　はん　(群馬工業高等専門学校)*

1. 序

2つの双曲3次元多様体 M_1, M_2 が共通の有限被覆を持つとき M_1 と M_2 はcommensurable(通約可能) という．この講演では以下の定理を示す.

Main Theorem. M_1, M_2 を *non-arithmetic orientable cusped hyperbolic 3-manifold* とする.

$$0 < |vol(M_1) - vol(M_2)| < \frac{v_0}{4} = 0.25\cdots$$

ならば M_1 と M_2 は *incommensurable.* ここで $v_0 = 1.0149\cdots$ は *regular ideal tetrahedron* の体積.

2. 準備

non-arithmetic hyperbolic manifold について Margulis が以下のことを示している [2].

Theorem 1. *If non-arithmetic hyperbolic manifolds* M_1 *and* M_2 *are commensurable, they cover a common orientable commensurator orbifold* M_0*.*

Adams は体積が $\frac{v_0}{4}$ より小さい orientable cusped hyperbolic orbifold を決定し, さらに Neumann と Reid はこれらの orbifolds が arithmetic であることを示した [1], [5]. よって以下のことが言える

Proposition 1. *non-arithmetic orientable cusped hyperbolic orbifold* の体積は $\frac{v_0}{4}$ 以上.

3. Main Theorem の証明

M_1, M_2 は non-arithmetic なので Theorem 1 より $P_i : M_i \to M_0$ は n_i-fold covering となる M_0 が存在する ($i = 1,\ 2,\ n_1 \neq n_2$)．よって

$$\begin{aligned} |vol(M_1) - vol(M_2)| &= |n_1 vol(M_0) - n_2 vol(M_0)| \\ &= |n_1 - n_2| vol(M_0) \end{aligned}$$

Proposition 1. より non-arithmetic orientable hyperbolic 3-orbifold の体積は $\frac{v_0}{4}$ 以上である．$n_1 \neq n_2$ なので

$$|vol(M_1) - vol(M_2)| \geq \frac{v_0}{4}$$

これは仮定に矛盾.

4. 応用

non-arithmetic nonorientable cusped hyperbolic oribifold の体積は $\frac{v_0}{8}$ なので，Main Theorem と同様にして以下のことが証明できる.

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 57M50, Secondary 57M25
キーワード：双曲3次元多様体, 体積，通約可能
* 〒前橋市鳥羽町 580　群馬工業高等専門学校 一般教科
e-mail: han@nat.gunma-ct.ac.jp

Theorem 2. *M_1, M_2 を non-arithmetic nonorientable hyperbolic 3-orbifolds とする．*

$$0 < |vol(M_1) - vol(M_2)| < \frac{v_0}{8}$$

ならば M_1 と M_2 は incommensurable.

また，Marshall と Martin により closed orientable hyperbolic 3-orbifold の体積は $0.03905\ldots$ 以上と証明されているので [3]，Main Theorem と同様にして以下のことが証明できる．

Theorem 3. *M_1, M_2 を non-arithmetic orientable closed hyperbolic 3-manifold とする．*

$$0 < |vol(M_1) - vol(M_2)| < 0.03905\cdots$$

ならば M_1 と M_2 は incommensurable.

任意の $K > 0$ に対して体積が K より小さい arithmetic hyperbolic 3-manifolds は有限個であることが示されている．(Theorem 11.2. in [4].) よって cusped hpperbolic 3-manifold を Dehn surgery したときに arithmetic となるのは有限個だけである．Main Theorem と Theorem 3 より以下のことが言える．

Corollary 1. *cusped hyperbolic 3-manifold を Dehn surgery して得られる hyperbolic 3-manifolds の無限族は無限個の commensurability class を含む．*

参考文献

[1] C. Adams, non-compact hyperbolic 3-orbifolds of small volume, In TOPOLOGY '90, Proceedings of the Research Semester in Low Dimensional Topology at Ohio State University. De Gruyter Verlag (1992), 1–16.

[2] G. Margulis, Discrete Subgroups of Semi-simple Lie Groups, Ergeb. der Math. 17, Springer-Verlag (1989).

[3] T. Marshall, G. Martin, Minimal co-volume hyperbolic lattices, II: Simple torsion in a Kleinian group, Annals of Mathematics (2012) 2(176):261-301

[4] C. Maclachlan, A. Reid, The Arithmetic of Hyperbolic 3-Manifolds. Graduate Texts in Mathematics 219, Springer (2003).

[5] W. Neumann, A. Reid, Notes on Adams' small volume orbifolds. In TOPOLOGY '90, Proceedings of the Research Semester in Low Dimensional Topology at Ohio State University. De Gruyter Verlag (1992), 311–314.