

Forbidden detour move and Jones polynomials

吉池 俊*

1. Introduction

1999年, Kauffman [5] が *virtual knot* を定義して以来, 様々な研究がなされている. 例えば, その研究の1つに Goussarov-Polyak-Viro [3] が導入した *forbidden move* についての研究がある. この変形について2001年に金信 [4] と Nelson [6] が独立に, すべての *virtual knot diagram* は Reidemeister move, virtual Reidemeister move, forbidden move を有限回使うことによって *trivial knot diagram* に変形できることを示した. この定理の証明の中で金信は forbidden move 以外にもいくつかの局所変形を導入し利用している. その中に今では *forbidden detour move* と呼ばれる変形がある [1]. この forbidden detour move に関して筆者は次の結果を得ている.

定理. [Y.] すべての *virtual knot diagram* は Reidemeister move, virtual Reidemeister move, forbidden detour move を有限回使うことによって *trivial knot diagram* に変形できる.

つまり, forbidden detour move は, forbidden move と同様に, *virtual knots* に対する unknotting operation になることがわかる.

一方で, 結び目理論において, 様々な結び目解消操作による結び目不変量の値の変化が研究されてきている. 例えば, Ganzell により, forbidden move による Jones polynomial の値の変化が研究されている [2]. 今回は forbidden detour move による Jones polynomial の値の変化について報告する.

2. Virtual knot

このセクションでは, 基本的な定義を述べ, 研究の背景を説明する.

定義 1 (*virtual knot diagram*). real crossing と virtual crossing を持つ *knot diagram* を *virtual knot diagram* という.

定義 2 (*Reidemeister move and virtual Reidemeister move*). *virtual knot diagram* に対して図1の左側の変形を *Reidemeister move*, 右側の変形を *virtual Reidemeister move* という.

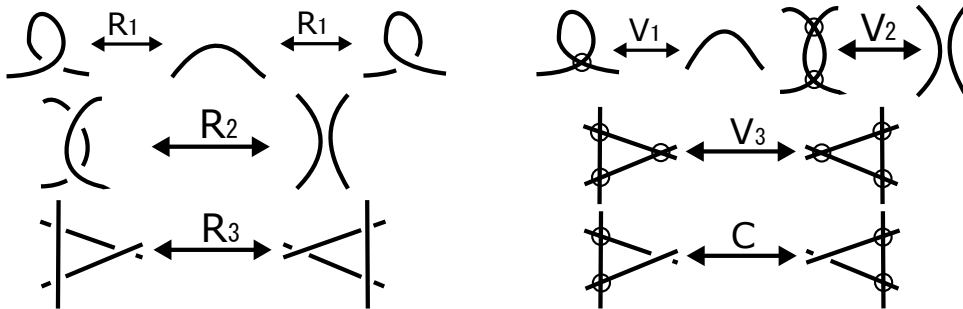


図 1: Reidemeister move R_1 , R_2 and R_3 and virtual Reidemeister move V_1 , V_2 , V_3 and C

* 〒 254-0805 東京都世田谷区桜上水 3-25-40 日本大学大学院総合基礎科学研究科

定義 3 (virtual knot). 2つの virtual knot diagram が Reidemeister move と virtual Reidemeister move の有限回の繰り返しで移りあうことができる関係 \sim を考える. すると \sim は同値関係となる. virtual knot diagram に対して \sim を法として同値類をつくる. この同値類を *virtual knot* という.

定義 4 (forbidden move). virtual knot diagram に対して図 2 のような 2 種類の変形を *forbidden move* という.

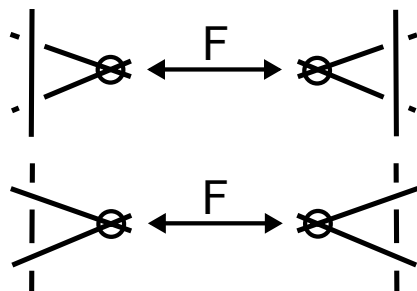


図 2: forbidden move

定理 1 (金信 [4], Nelson[6]). 任意の virtual knot diagram は Reidemeister move と virtual Reidemeister move に加えて forbidden move を有限回使うことによって trivial knot diagram に変形できる.

定義 5 (forbidden detour move). virtual knot diagram に対して図 3 のような変形を *forbidden detour move* という.

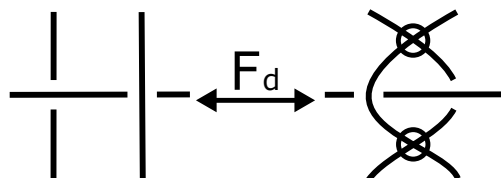


図 3: forbidden detour move

定理 2 (Y.). すべての virtual knot diagram は Reidemeister move, virtual Reidemeister move, forbidden detour move を有限回使うことによって trivial knot diagram に変形できる.

3. Jones polynomial

Jones polynomial を定義するために, まず *bracket polynomial* と呼ばれる knot の diagram に対して定義される多項式を用意する. D を virtual knot K の virtual knot diagram とする. bracket polynomial は, 図 4 の 3 つの規則を採用することによって再帰的に計算することができる.

Rule 1: $\langle \bigcirc \rangle = 1$

Rule 2: $\langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \begin{array}{c} \frown \\ \smile \end{array} \rangle$

Rule 2: $\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle = A \langle \begin{array}{c} \smile \\ \frown \end{array} \rangle + A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle$

Rule 3: $\langle D \cup \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle D \rangle = d \langle D \rangle$

図 4: Bracket polynomial の規則.

次に、方向づけをした virtual knot diagram D を与える. 図 4 に示すように、どの D の real crossing にも $+1$ または -1 のいずれかを割り当てる.

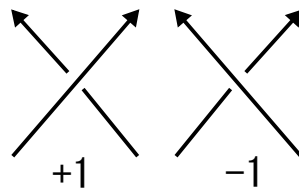


図 5: The sign of real crossings

これらの sign の総和を D の *writhe* と呼び、 $w(D)$ と定義する.

定義 6 (Jones polynomial). 次式で与えられている多項式は、実は diagram D の取り方によらず、 K のみによって決まる. つまり、virtual knot の不変量になる. これを K の *Jones polynomial* という.

$$f_K(A) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$$

4. Main Theorem

forbidden move による Jones polynomial の値の変化について Ganzell が次の定理を示した.

定理 3 (Ganzell [2]). D と D' をそれぞれ virtual knot K, K' の diagram とする. D と D' が 1 回の forbidden move で移りあうとき、 $f_K(A) - f_{K'}(A)$ は $A^{10} - A^6 - A^4 + 1$ で割り切れる.

今回、forbidden detour move による Jones polynomial の値の変化に関して次の定理が得られた.

定理 4. D と D' をそれぞれ virtual knot K, K' の diagram とする. D と D' が 1 回の forbidden detour move で移り合うとき、 $f_K(A) - f_{K'}(A)$ は $A^{10} - A^6 - A^4 + 1$ で割り切れる.

Remark. より精密にみると、定理 3 と定理 4 に現れる因数は同じであるが、その商は異なる形になることがわかる.

Outline of proof. Ganzell [2] は定理 3 の証明の中で, 任意の virtual 3-tangle の bracket の値は, 図 6 で表される 15 個の virtual 3-tangle の bracket の値の線形和で表されることを示している. これらを左上から順に F_1, F_2, \dots, F_{15} とおく.

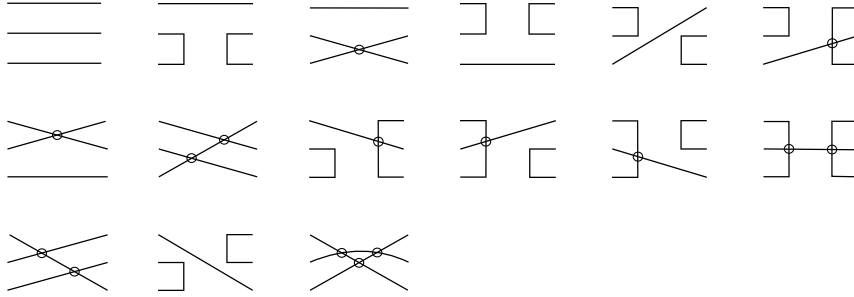


図 6: Virtual 3-tangle F_i ($1 \leq i \leq 15$).

一方で, forbidden detour move に関する bracket polynomial は次のように計算できる. 図 3 の左側の virtual 3-tangle の bracket の値は,

$$\langle \text{Diagram} \rangle = A^2 \langle \text{Diagram 1} \rangle + \langle \text{Diagram 2} \rangle + \langle \text{Diagram 3} \rangle + A^{-2} \langle \text{Diagram 4} \rangle$$

と計算できる. ここで現れた 4 つの virtual 3-tangle を左から順に G_1, G_2, G_3, G_4 とおく. 同様に図 3 の右側については,

$$\langle \text{Diagram} \rangle = A^2 \langle \text{Diagram 1} \rangle + \langle \text{Diagram 2} \rangle + \langle \text{Diagram 3} \rangle + A^{-2} \langle \text{Diagram 4} \rangle$$

と計算できる. ここで現れた 4 つの virtual 3-tangle を左から順に G'_1, G'_2, G'_3, G'_4 とおく.

ここで $\widehat{\alpha}_{i,j} := \langle \text{Diagram } F_i \text{ with } G_j \rangle$, $\widehat{\beta}_{i,j} := \langle \text{Diagram } F_i \text{ with } G'_j \rangle$ ($1 \leq i \leq 15, 1 \leq j \leq 4$) とおき, 各場合の bracket polynomial を計算 (表 1 参照) し, 差をとることによって定理 4 は証明される. \square

(i, j)	$\widehat{\alpha}_{i,j}$	(i, j)	$\widehat{\alpha}_{i,j}$	(i, j)	$\widehat{\beta}_{i,j}$	(i, j)	$\widehat{\beta}_{i,j}$
(1, 1)	d	(1, 3)	1	(1, 1)	d	(1, 3)	1
(2, 1)	1	(2, 3)	d	(2, 1)	d	(2, 3)	1
(3, 1)	1	(3, 3)	1	(3, 1)	d^2	(3, 3)	d
(4, 1)	d^2	(4, 3)	d	(4, 1)	1	(4, 3)	1
(5, 1)	d	(5, 3)	d^2	(5, 1)	1	(5, 3)	d
(6, 1)	d	(6, 3)	d	(6, 1)	d	(6, 3)	1
(7, 1)	d	(7, 3)	1	(7, 1)	1	(7, 3)	d
(8, 1)	1	(8, 3)	d	(8, 1)	d	(8, 3)	d^2
(9, 1)	1	(9, 3)	1	(9, 1)	1	(9, 3)	d
(10, 1)	1	(10, 3)	d	(10, 1)	1	(10, 3)	1
(11, 1)	d	(11, 3)	1	(11, 1)	d	(11, 3)	d
(12, 1)	1	(12, 3)	1	(12, 1)	1	(12, 3)	1
(13, 1)	1	(13, 3)	1	(13, 1)	d	(13, 3)	1
(14, 1)	d	(14, 3)	1	(14, 1)	1	(14, 3)	1
(15, 1)	1	(15, 3)	d	(15, 1)	1	(15, 3)	d
(1, 2)	1	(1, 4)	d	(1, 2)	1	(1, 4)	d
(2, 2)	d	(2, 4)	d^2	(2, 2)	1	(2, 4)	1
(3, 2)	1	(3, 4)	d	(3, 2)	d	(3, 4)	1
(4, 2)	d	(4, 4)	1	(4, 2)	1	(4, 4)	d
(5, 2)	1	(5, 4)	d	(5, 2)	1	(5, 4)	1
(6, 2)	1	(6, 4)	1	(6, 2)	d	(6, 4)	1
(7, 2)	1	(7, 4)	1	(7, 2)	d	(7, 4)	d^2
(8, 2)	1	(8, 4)	1	(8, 2)	1	(8, 4)	d
(9, 2)	d	(9, 4)	d	(9, 2)	1	(9, 4)	d
(10, 2)	1	(10, 4)	d	(10, 2)	d	(10, 4)	d
(11, 2)	d	(11, 4)	1	(11, 2)	1	(11, 4)	1
(12, 2)	1	(12, 4)	1	(12, 2)	1	(12, 4)	1
(13, 2)	d	(13, 4)	1	(13, 2)	d^2	(13, 4)	d
(14, 2)	d^2	(14, 4)	d	(14, 2)	d	(14, 4)	1
(15, 2)	d	(15, 4)	1	(15, 2)	d	(15, 4)	1

表 1:

参考文献

- [1] A. S. Crans, B. Mellor and S. Ganzell, The forbidden number of a knot, *Kyungpook Math. J.* **55** (2015), no. 2, 485–506.
- [2] S. Ganzell, Local moves and restrictions on the Jones polynomial, *J. Knot Theory Ramifications* **23** (2014), no. 2, 1450011, 8 pp.
- [3] M. Goussarov, M. Polyak and O. Viro, Finite-type invariants of classical and virtual knots, *Topology* **39** (2000), no. 5, 1045–1068.
- [4] T. Kanenobu, Forbidden moves unknot a virtual knot, *J. Knot Theory Ramifications* **10** (2001), no. 1, 89–96.
- [5] L. H. Kauffman, Virtual knot theory, *European J. Combin.* **20** (1999), no. 7, 663–690.
- [6] S. Nelson, Unknotting virtual knots with Gauss diagram forbidden moves, *J. Knot Theory Ramifications* **10** (2001), no. 6, 931–935.