二橋絡み目の $\mathfrak{sl}_3$ 色付きジョーンズ多項式

湯淺　亘　(東京工業大学)*

概　　要

Kuperberg [3] により定義された A_2 web space を用いて、二橋結び目の $\mathfrak{sl}_3$ 色付きジョーンズ多項式を二通りの方法で計算する。一つはスケイン関係式から得られた公式を用いる方法で、もう一方は trivalent graph によって A_2 web を表し、それらに関して得られた公式を用いる方法である。最後に応用例として $(2,2m)$-トーラス絡み目に対する $\mathfrak{sl}_3$ 色付きジョーンズ多項式の極限を求めることで得られる, ある q-級数の恒等式を紹介する.

1. The A_2 bracket skein relations

この節では、Kuperberg [3] により与えられた A_2 bracket skein relations と A_2 clasp を紹介する. まず、今回用いる記号の定義を行う.

q-Pochhammer symbol を次で定義する.

$$(q;q)_k = \prod_{l=1}^{k}(1-q^l).$$

今後, $(q;q)_k$ を $(q)_k$ と省略することもある. $k \leq n$ なる非負整数 k, n に対して, q-二項係数を次で定義する.

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}}.$$

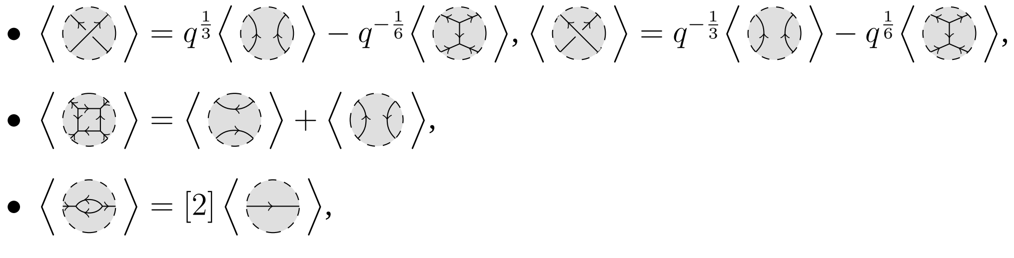
更に, $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$ を満たす非負整数 $n_1, n_2, \ldots, n_m$ に対して, q-多項係数を次で定義する.

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m}_q = \frac{(q)_n}{(q)_{n_1}(q)_{n_2}\cdots(q)_{n_m}}.$$

q-整数を $[n] = \frac{q^{\frac{n}{2}} - q^{-\frac{n}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}$ により定義し, q-整数による二項係数を $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}$ により定義する. ここで, n, k は $n \geq k$ を満たす非負整数とし, q-整数の階乗を $[n]! = \prod_{i=1}^{n}[i]$ により定義する.

向き付けられた絡み目図式に対して, 次により A_2 ブラケットを定める.

定義 1.1 (The A_2 bracket)**.**



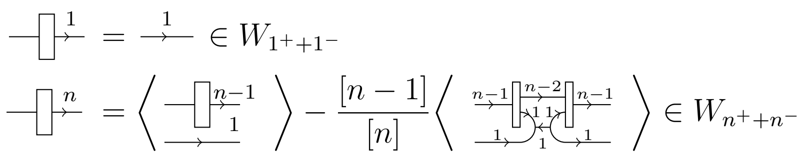
2010 Mathematics Subject Classification: 57M25, 57M27
キーワード：colored Jones polynomial, 2-bridge link
* 〒 152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1 H23　東京工業大学 大学院理工学研究科 数学専攻
e-mail: yuasa.w.aa@m.titech.ac.jp

- $\left\langle G \sqcup \bigcirc \right\rangle = [3]\,\langle G\rangle$.

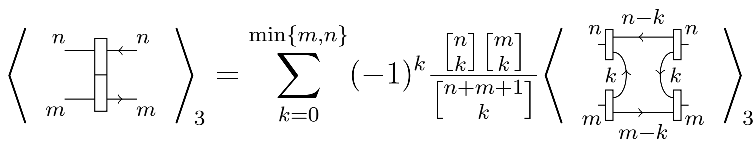
上の関係式により, S^2 上の図式 D の A_2 ブラケット $\langle D\rangle$ は $f_D(q)\langle\emptyset\rangle$ となり, 得られた多項式 $f_D(q)$ は D から得られる枠付き絡み目の不変量になっている.

次に, 本稿で計算する $\mathfrak{sl}_3$ 色付きジョーンズ多項式を定義するために重要な役割を果たす, A_2 clasp を定義する. これは, Kauffman ブラケットにおける Jones-Wenzl projector に相当するものである.

定義 1.2. (The A_2 clasp of type $(n,0)$ [3])

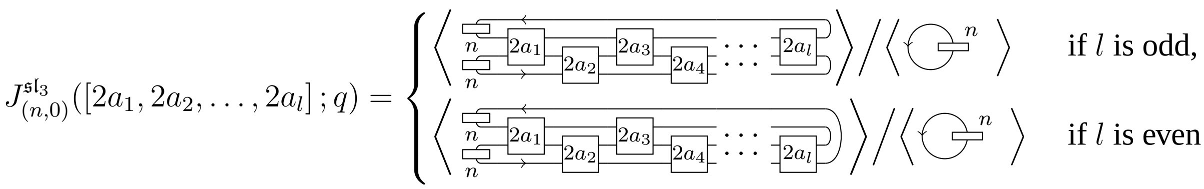


定義 1.3 (the A_2 clasp of type (n,m) [3, 4]**).**

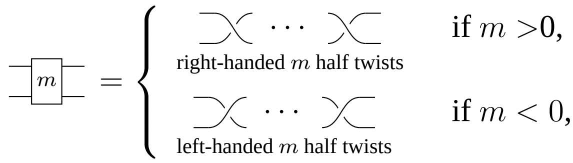


2. 二橋絡み目の $\mathfrak{sl}_3$ 色付きジョーンズ多項式

二橋絡み目 $[2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_l]$ の タイプ$(n,0)$ の $\mathfrak{sl}_3$ 色付きジョーンズ多項式 $J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}([2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_l]\,; q)$ は次で定義される。



ここで, $a_1, a_2, \ldots, a_l$ は 0 でない整数とし,



とする.

注意 2.1. 今回は blackboard framing から得られる framed link の不変量として定義している.

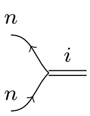
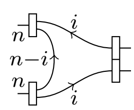
定理 2.2 (スケイン関係式を用いた計算により得られた公式 [5]).

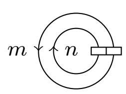
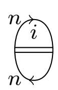
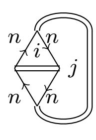
$$
\begin{aligned}
&J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}([2a_1, 2a_2, \dots, 2a_l]\,;q)\\
&\quad=\prod_{j=0}^{l-1}\sum_{0\le k^{(j+1)}_{|a_{j+1}|}\le\cdots\le k^{(j+1)}_1\le K_j}(-1)^{K_j-k^{(j+1)}_{|a_{j+1}|}}q^{\varepsilon_{j+1}(K_j-k^{(j+1)}_{|a_{j+1}|})}q^{\varepsilon_{j+1}\sum_{i=1}^{|a_{j+1}|}(k_i^{(j+1)2}+2k_i^{(j+1)})}\\
&\qquad\times\frac{(q^{\varepsilon_{j+1}})_{K_j}}{(q^{\varepsilon_{j+1}})_{k^{(j+1)}_{|a_{j+1}|}}}\binom{n}{k_1^{(j+1)\prime}, k_2^{(j+1)\prime}, \dots, k^{(j+1)\prime}_{|a_{j+1}|}, k^{(j+1)}_{|a_{j+1}|}}_{q^{\varepsilon_{j+1}}}\\
&\qquad\times q^{-(n-K_l)}\frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}{(1-q^{K_l+1})(1-q^{K_l+2})},
\end{aligned}
$$

ここで, $\varepsilon_{j+1}=\frac{a_{j+1}}{|a_{j+1}|}$, $K_0=n, K_j=n-k^{(j)}_{|a_j|}$ とし, $k^{(j)}_0=K_j, k^{(j+1)\prime}_{|a_{i+1}|}=k^{(j)}_i-k^{(j)}_{i+1}$ として定義する.

定理 2.3 (trivalent graph を用いた計算により得られた公式 [6]).

$$
\begin{aligned}
&J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}([2a_1, 2a_2, \dots, 2a_l]\,;q)\\
&\quad=\sum_{0\le i_1, i_2\dots i_l\le n}\frac{\Delta_{(i_1,i_1)}}{\Delta_{(n,0)}}\frac{\theta_{(n,n,(i_1,i_1))}}{\theta_{(n,n,(i_l,i_l))}}q^{-\frac{2}{3}(n^2+3n)(a_1+a_2+\cdots+a_l)}q^{\sum_{k=1}^{l}a_k(i_k^2+i_k)}\\
&\qquad\times\prod_{k=1}^{l-1}\begin{Bmatrix} n & n & (i_{k+1}, i_{k+1})\\ n & n & (i_k, i_k)\end{Bmatrix},
\end{aligned}
$$

ここで, 任意の非負整数 m, n と $0\le i, j\le n$ を満たす任意の整数 i, j に対して, $\Delta_{(m,n)}, \theta(n,n,(i,i)), \begin{Bmatrix} n & n & (j,j)\\ n & n & (i,i)\end{Bmatrix}$ は, 次の trivalent graph で表される A_2 web である. 非負整数 n と $0\le i\le n$ に対して,  を  により表される A_2 web としたとき,

- $\Delta(m,n)=\Big\langle$  $\Big\rangle_3$,
- $\theta(n,n,(i,i))=\Big\langle$  $\Big\rangle_3$,
- $\mathrm{Tet}\begin{bmatrix} n & n & (j,j)\\ n & n & (i,i)\end{bmatrix}=\Big\langle$  $\Big\rangle_3$,
- $\begin{Bmatrix} n & n & (j,j)\\ n & n & (i,i)\end{Bmatrix}=\dfrac{\mathrm{Tet}\begin{bmatrix} n & n & (j,j)\\ n & n & (i,i)\end{bmatrix}\Delta(j,j)}{\theta(n,n,(j,j))^2}$,

により定義する.

これらの A_2 web の値は、以下のように具体的に求めることが出来る.

補題 2.4 ([6]). • $\Delta(i,j)=\frac{[i+1][j+1][i+j+2]}{[2]}$,

- $\theta(n,n,(i,i))=\sum_{k=0}^{i}(-1)^k\frac{\begin{bmatrix}i\\k\end{bmatrix}^2}{\begin{bmatrix}2i+1\\k\end{bmatrix}}\frac{\Delta(n,0)^2}{\Delta(n-i+k,0)}=\frac{\begin{bmatrix}n+i+2\\2i+2\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}n\\i\end{bmatrix}^2}\Delta(i,i)$,

- $\mathrm{Tet}\begin{bmatrix}n & n & (j,j)\\ n & n & (i,i)\end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{i}(-1)^k\frac{\begin{bmatrix}i\\k\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}n-j\\i-k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n+j+2\\i-k\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}2i+1\\k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n\\i-k\end{bmatrix}^2}\theta(n,n,(j,j))$.

3. $(2,2m)$-トーラス絡み目に対する $\mathfrak{sl}_3$ 色付きジョーンズ多項式の極限

Armond [1] や, Garoufalidis-Lê [2] により, 交代絡み目などの絡み目に対する $\mathfrak{sl}_2$ 色付きジョーンズ多項式に対しては, その係数の安定性より head や tail といった極限が存在することが知られている。特に, $(2,k)$-トーラス絡み目の $\mathfrak{sl}_2$ 色付きジョーンズ多項式の二通りの表示を与え, それぞれの極限を求めることで Rogers-Ramanujan identity の一般化である Andrews-Gordon identity という q-級数の恒等式を得ることができる. k が奇数の時には Ramanujan のテータ関数, k が偶数の時には Ramanujan の false テータ関数に対する Andrews-Gordon identity が得られる. 今回は $(2,2m)$-トーラス絡み目に関して前節で得られた二つの公式を用いて, tail にあたる $\mathfrak{sl}_3$ 色付きジョーンズ多項式の極限を考える. これにより得られた q-級数の恒等式は, Ramanujan の false テータ関数に対する Andrews-Gordon identity の結び目理論における一般化となっている.

まずは, ここでいう q-級数の極限というものを定義する.

定義 3.1. 変数 q の形式的冪級数の族 $\{f_n(q)\in\mathbb{Z}[[q]]\mid n\geq 1\}$ を考える. $f(q)\in\mathbb{Z}[[q]]$ が存在して, 任意の正整数 n に対して, $f_n(q)=f(q)$ が $\mathbb{Z}[[q]]/q^{n+1}\mathbb{Z}[[q]]$ で成り立つとき, $\{f_n(q)\}_n$ の極限が $f(q)$ であるといい, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(q)=f(q)$ と書く.

以下, m は正の整数とする.

$(2,2m)$-トーラス絡み目の $\mathfrak{sl}_3$ 色付きジョーンズ多項式は $J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}([2m]\,;q)$ により与えられる. この多項式の最低次数は $-\frac{2m}{3}(n^2+3n)+n$ となり, $q^{\frac{2m}{3}(n^2+3n)-n}J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}([2m]\,;q)$ を考えることで q-多項式の族が得られる. 定理 2.3 の表示より得られる族を $\{\Psi^{(m)}_n(q)\}_n$ とし, 定理 2.2 の表示より得られる族を $\{G^{(m)}_n(q)\}_n$ とする. ここで,

$$\Psi^{(m)}_n(q)=\sum_{i=0}^{n}q^{-2i}q^{m(i^2+2i)}\frac{(1-q^{i+1})^3(1+q^{i+1})}{(1-q)(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})},$$

$$G^{(m)}_n(q)=\sum_{0\leq k_m\leq\cdots\leq k_2\leq k_1\leq n}q^{-2k_m}q^{\sum_{j=1}^{m}(k_i^2+2k_i)}\frac{(q)_n^2}{(q)_{k_m}^2(q)_{n-k_1}(q)_{k_1-k_2}\ldots(q)_{k_{m-1}-k_m}}\times\frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}{(1-q^{n-k_m+1})(1-q^{n-k_m+2})},$$

である. 上の式において, $(q)_n$ は q-Pochhammer symbol $(q;q)_k=\prod_{l=1}^{k}(1-q^l)$ を表すものとする.

注意 3.2. 当然, 同じ絡み目の不変量なので $\Psi^{(m)}_n(q)=G^{(m)}_n(q)$ である.

それぞれの極限を求めることで以下の恒等式が得られる.

定理 3.3 (The $\mathfrak{sl}_3$ Andrews-Gordon identity for the Ramanujan false theta function [6])**.**

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^{-2i} q^{m(i^2+2i)} \frac{(1-q^{i+1})^3(1+q^{i+1})}{1-q} = (q)_\infty \sum_{0\leq k_m\leq\cdots\leq k_2\leq k_1} \frac{q^{-2k_m} q^{\sum_{j=1}^{m}(k_i^2+2k_i)}}{(q)_{k_m}^2 (q)_{k_1-k_2}\ldots(q)_{k_{m-1}-k_m}}.$$

参考文献

[1] Cody Armond, *The head and tail conjecture for alternating knots*, Algebr. Geom. Topol. **13** (2013), no. 5, 2809–2826. MR 3116304

[2] Stavros Garoufalidis and Thang T. Q. Lê, *Nahm sums, stability and the colored Jones polynomial*, Res. Math. Sci. **2** (2015), Art. 1, 55. MR 3375651

[3] Greg Kuperberg, *Spiders for rank* 2 *Lie algebras*, Comm. Math. Phys. **180** (1996), no. 1, 109–151. MR 1403861

[4] Tomotada Ohtsuki and Shuji Yamada, *Quantum* $\mathrm{SU}(3)$ *invariant of* 3*-manifolds via linear skein theory*, J. Knot Theory Ramifications **6** (1997), no. 3, 373–404. MR 1457194

[5] Wataru Yuasa, *The* $\mathfrak{sl}_3$ *colored Jones polynomials for* 2*-bridge links*, arXiv:1609.07289 (2016).

[6] ———, *A* q*-series identity via the* $\mathfrak{sl}_3$ *colored Jones polynomials for the* $(2,2m)$*-torus link*, arXiv:1612.02144 (2016).