べき単マグナス展開によるミルナー不変量

野坂 武史　**(Takefumi Nosaka)**

九州大学　数理学研究院

※（小谷 久寿氏（九大）との共同研究）

動機:　ミルナー不変量を簡単に計算できないか？

動機２：　高次ミルナー不変量を精密化したい.

動機: ミルナー不変量を簡単に計算できないか？

≒「絳線を，自由群のべき零商で量ったもの」

関連
- 量子不変量の **Tree part**
- 高次マッセイ積による記述.
- (べき零の)**Sullivan** モデル.
- 他の位相的対象の派生

しかし 簡単な計算法も、計算例も少なかった.

(※ ブルニアン [**Habiro-Meilhan**], べき零被覆 [**Murasugi**])

動機２: 高次ミルナー不変量を精密化したい.

動機: ミルナー不変量を簡単に計算できないか？

≒「絡線を，自由群のべき零商で量ったもの」

関連
- ・ 量子不変量の **Tree part**
- ・ 高次マッセイ積による記述.
- ・ (べき零の)**Sullivan** モデル.
- ・ 他の位相的対象の派生

しかし 簡単な計算法も、計算例も少なかった.

(※ ブルニアン [**Habiro-Meilhan**], べき零被覆 [**Murasugi**])

動機２： 高次ミルナー不変量を精密化したい.

難点
- ・ 定義が代数的すぎで, 応用例が少ない
- ・ 整数倍で消える問題 ($\mathbb{Q}$-上の 量子不変量との関連)
- ・ 自明な場合が多い。

結果

主結果(**KN**)

(非零最低次) ミルナー不変量の "図式"計算法を与えた.

例 1 :

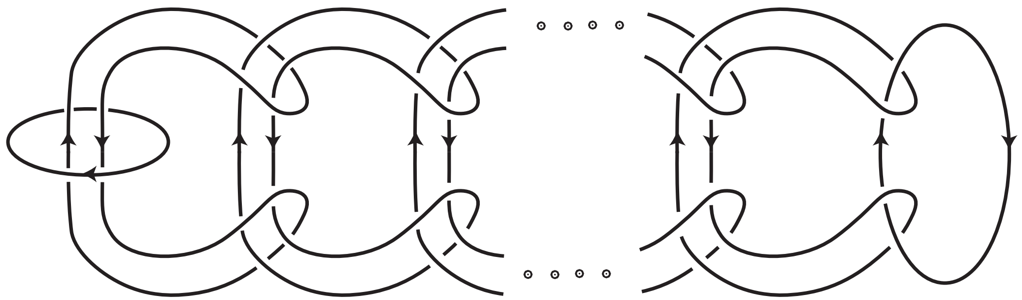
結果

主結果(KN)

(非零最低次) ミルナー不変量の “図式”計算法を与えた.

例１： $\#L \leq 3, \quad \mathrm{cl}(L) \leq 8 \ \mathrm{lk}(L) = 0$ で全て計算した.

例２： ミルナー絡み目の全成分を計算した.



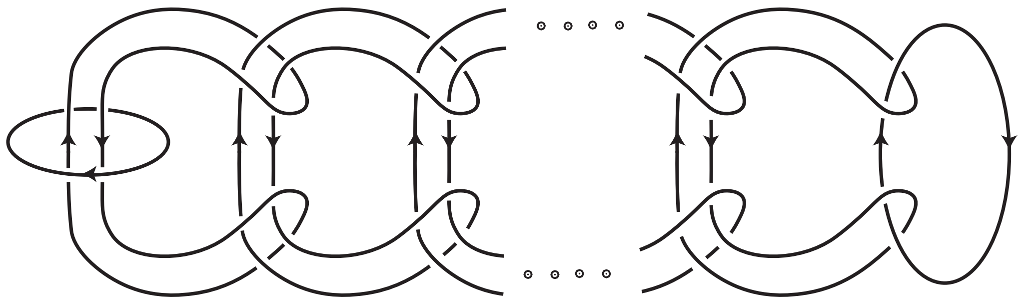
結果

主結果(KN)

(非零最低次) ミルナー不変量の “図式”計算法を与えた.

例１： $\#L \leq 3, \quad \mathbf{cl}(L) \leq 8\ \mathbf{lk}(L) = 0$ で全て計算した.

例２： ミルナー絡み目の全成分を計算した.



結果２(KN)

高次ミルナー不変量を精密化し, 普遍性を示した.

例： 整数倍で消えない例。**Alexander** 多項式の関連すこし

本講演の目次

※

本講演の目次

※　証明や詳細は報告書で。$\Longrightarrow$ 所々、簡略化する。.

ミルナー不変量の定義

$$\boldsymbol{F} := \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{\#L} \mid \qquad \rangle$$ 自由群

ミルナー不変量の定義

$$F := \langle x_1, x_2, \ldots, x_{\#L} \mid \quad \rangle \quad \text{自由群}$$

$$F_2 := [F, F], \quad F_3 := [F, [F, F]], \quad \ldots, F_m := [F, F_{m-1}].$$

ミルナー不変量の定義

$$F := \langle x_1, x_2, \dots, x_{\#L} \mid \qquad \rangle \quad \text{自由群}$$

$$F_2 := [F, F], \quad F_3 := [F, [F, F]], \quad \dots, F_m := [F, F_{m-1}].$$

$$\Longrightarrow$$

$$0 \to F_{m-1}/F_m \longrightarrow F/F_m \xrightarrow{p_m} F/F_{m-1} \to 0 \quad (\text{中心拡大})$$

仮定 A_m

ミルナー不変量の定義

$$F := \langle x_1, x_2, \ldots, x_{\#L} \mid \quad \rangle \quad \text{自由群}$$

$$F_2 := [F, F], \quad F_3 := [F, [F, F]], \quad \ldots, F_m := [F, F_{m-1}].$$

$\Longrightarrow$

$$0 \to F_{m-1}/F_m \longrightarrow F/F_m \xrightarrow{p_m} F/F_{m-1} \to 0 \quad \text{(中心拡大)}$$

仮定 A_m

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "{}^\exists f_3"] \arrow[drr, "{}^\exists f_4"] \arrow[drrrr, "{}^\exists f_m"] & & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & F/F_4 \arrow[l, "p_4"'] & \cdots \arrow[l] & F/F_m. \arrow[l, "p_m"']
\end{tikzcd}$$

ミルナー不変量の定義

$$F := \langle x_1, x_2, \ldots, x_{\# L} \mid \quad \rangle$$ 自由群

$$F_2 := [F, F], \quad F_3 := [F, [F, F]], \quad \ldots, F_m := [F, F_{m-1}].$$

$\Longrightarrow$

$$0 \to F_{m-1}/F_m \longrightarrow F/F_m \xrightarrow{p_m} F/F_{m-1} \to 0$$ (中心拡大)

仮定 A_m

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "{}^\exists f_3"] \arrow[drr, "{}^\exists f_4"] \arrow[drrrr, "{}^\exists f_m"] & & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & F/F_4 \arrow[l, "p_4"'] & \cdots \arrow[l] & F/F_m. \arrow[l, "p_m"']
\end{tikzcd}$$

定義 (m-次) ミルナー不変量 とは

$$\big(f_m(\mathfrak{l}_1), f_m(\mathfrak{l}_2), \ldots, f_m(\mathfrak{l}_{\# L})\big) \quad \in \quad (F_{m-1}/F_m)^{\# L}.$$

ミルナー不変量の性質

仮定 A_m

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "{}^{\exists} f_3"] \arrow[drrrr, "\cdots {}^{\exists} f_m"] & & & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & \cdots \arrow[l] & & F/F_m \arrow[ll, "p_m"'] & F/F_{m+1}. \arrow[l, "p_{m+1}"']
\end{tikzcd}$$

定義 (*m*-次) ミルナー不変量 とは

$$\big(f_m(\mathfrak{l}_1), f_m(\mathfrak{l}_2), \ldots, f_m(\mathfrak{l}_{\#L})\big) \quad \in \quad (F_{m-1}/F_m)^{\#L}.$$

ミルナー不変量の性質

仮定 A_m

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "{}^{\exists} f_3"] \arrow[drrr, "\cdots {}^{\exists} f_m"] \arrow[drrrr, "\exists ? f_{m+1}"] & & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & \cdots \arrow[l] & F/F_m \arrow[l, "p_m"'] & F/F_{m+1}. \arrow[l, "p_{m+1}"']
\end{tikzcd}
$$

定義 (m-次) ミルナー不変量 とは

$$
\big(f_m(\mathfrak{l}_1), f_m(\mathfrak{l}_2), \ldots, f_m(\mathfrak{l}_{\#L})\big) \quad \in \quad (F_{m-1}/F_m)^{\#L}.
$$

ミルナー不変量の性質

仮定 A_m

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "{}^{\exists} f_3"] \arrow[drrr, "\cdots {}^{\exists} f_m"] \arrow[drrrr, red, "\exists ? f_{m+1}"] & & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & \cdots \arrow[l] & F/F_m \arrow[l, "p_m"'] & F/F_{m+1}. \arrow[l, "p_{m+1}"']
\end{tikzcd}$$

定義 (m-次) ミルナー不変量 とは

$$\Big(f_m(\mathfrak{l}_1), f_m(\mathfrak{l}_2), \ldots, f_m(\mathfrak{l}_{\#L})\Big) \quad \in \quad (F_{m-1}/F_m)^{\#L}.$$

定理 [Milnor] (リフトの障碍)

『$^{\exists}$ 準同型 f_{m+1}』 $\Longleftrightarrow$ 『 $f_m(\mathfrak{l}_\ell) = 0$ for $^{\forall}\ell \le \#L$』

※　簡単な証明をつけたい.

ミルナー不変量の難点

仮定 A_m

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "{}^{\exists}f_3"] \arrow[drrr, "\cdots{}^{\exists}f_m"] \arrow[drrrr, red, "\exists ? f_{m+1}"] & & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & \cdots \arrow[l] & F/F_m \arrow[l, "p_m"'] & F/F_{m+1}. \arrow[l, "p_{m+1}"']
\end{tikzcd}$$

定義 **(m-次) ミルナー不変量** とは

$$\bigl(f_m(\mathfrak{l}_1), f_m(\mathfrak{l}_2), \ldots, f_m(\mathfrak{l}_{\#L})\bigr) \quad \in \quad (F_{m-1}/F_m)^{\#L}.$$

難点

ミルナー不変量の難点

仮定 A_m

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "{}^{\exists} f_3"] \arrow[drrr, "\cdots {}^{\exists} f_m"] \arrow[drrrr, "{}^{\exists ?} f_{m+1}"] & & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & \cdots \arrow[l] & F/F_m \arrow[l, "p_m"'] & F/F_{m+1}. \arrow[l, "p_{m+1}"']
\end{tikzcd}$$

定義 $(m$-次) ミルナー不変量 とは

$$\big(f_m(\mathfrak{l}_1), f_m(\mathfrak{l}_2), \ldots, f_m(\mathfrak{l}_{\#L})\big) \quad \in \quad (F_{m-1}/F_m)^{\#L}.$$

難点

1. 緯線 $\mathfrak{l}_\ell$ の群表示
2. 準同形 f_m の具体的表示
3. 中心 F_{m-1}/F_m の定量化.

ミルナー不変量の難点

仮定 A_m

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "{}^{\exists} f_3"] \arrow[drrr, "\cdots {}^{\exists} f_m"] \arrow[drrrr, "\exists ? f_{m+1}"] & & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & \cdots \arrow[l] & F/F_m \arrow[l, "p_m"'] & F/F_{m+1}. \arrow[l, "p_{m+1}"']
\end{tikzcd}
$$

定義 (m-次) ミルナー不変量 とは

$$
\Big(f_m(\mathfrak{l}_1), f_m(\mathfrak{l}_2), \ldots, f_m(\mathfrak{l}_{\#L}) \Big) \quad \in \quad (F_{m-1}/F_m)^{\#L}.
$$

難点

1. 緯線 $\mathfrak{l}_\ell$ の群表示
2. 準同形 f_m の具体的表示
3. 中心 F_{m-1}/F_m の定量化.

今回の解決法

うまい図式を考える

カンドルを用いる

べき単的マグナス展開

ミルナー不変量の難点

仮定 A_m

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "{}^{\exists} f_3"] \arrow[drrr, "\cdots {}^{\exists} f_m"] \arrow[drrrr, "\exists ? f_{m+1}"] & & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & \cdots \arrow[l] & F/F_m \arrow[l, "p_m"'] & F/F_{m+1}. \arrow[l, "p_{m+1}"']
\end{tikzcd}
$$

定義 (*m*-次) ミルナー不変量 とは

$$\Big(f_m(\mathfrak{l}_1), f_m(\mathfrak{l}_2), \ldots, f_m(\mathfrak{l}_{\#L})\Big) \quad \in \quad (F_{m-1}/F_m)^{\#L}.$$

難点

1. 緯線 $\mathfrak{l}_\ell$ の群表示
2. 準同形 f_m の具体的表示
3. 中心 F_{m-1}/F_m の定量化.

今回の解決法

うまい図式を考える

カンドルを用いる

べき単的マグナス展開

本講演の目次

§1　ミルナー不変量の復習

§2　べき単的なマグナス展開

§3　ミルナー不変量の図的計算法と計算例

§4　高次ミルナー不変量

※ 簡単のため $\#L = 2$ とする.

本講演の目次

§1 ミルナー不変量の復習

§2 べき単的なマグナス展開

定義と性質
「商群 F/F_m を行列で扱えるようにする」

§3 ミルナー不変量の図的計算法と計算例

§4 高次ミルナー不変量

※ 簡単のため $\#L = 2$ とする.

べき単的マグナス展開のアイディア

復習. 次は, なぜべき零群だったか？

$$\mathcal{U} := \left\{ A \in SL_5(\mathbb{Z}) \;\middle|\; A = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ & 1 & * & * & * \\ & & 1 & * & * \\ & & & 1 & * \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(証明)

べき単的マグナス展開のアイディア

復習. 次は, なぜべき零群だったか？

$$\mathcal{U} := \left\{ A \in SL_5(\mathbb{Z}) \;\middle|\; A = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ & 1 & * & * & * \\ & & 1 & * & * \\ & & & 1 & * \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(証明)

$$\mathcal{U}_2 = [\mathcal{U}, \mathcal{U}] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * & * \\ & 1 & 0 & * & * \\ & & 1 & 0 & * \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathcal{U}_3 =$$

べき単的マグナス展開のアイディア

復習. 次は, なぜべき零群だったか？

$$\mathcal{U} := \left\{ \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{SL}_5(\mathbb{Z}) \;\middle|\; \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ & 1 & * & * & * \\ & & 1 & * & * \\ & & & 1 & * \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(証明)

$$\mathcal{U}_2 = [\mathcal{U}, \mathcal{U}] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * & * \\ & 1 & 0 & * & * \\ & & 1 & 0 & * \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathcal{U}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & * \\ & 1 & 0 & 0 & * \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{U}_4 =$$

べき単的マグナス展開のアイディア

復習. 次は, なぜべき零群だったか？

$$\mathcal{U} := \left\{ \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{SL}_5(\mathbb{Z}) \;\middle|\; \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ & 1 & * & * & * \\ & & 1 & * & * \\ & & & 1 & * \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(証明)

$$\mathcal{U}_2 = [\mathcal{U}, \mathcal{U}] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * & * \\ & 1 & 0 & * & * \\ & & 1 & 0 & * \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \mathcal{U}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & * \\ & 1 & 0 & 0 & * \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{中心}}}{\mathcal{U}_4} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & * \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \mathcal{U}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Q.E.D.

べき単的マグナス展開のアイディア

復習. 次は, なぜべき零群だったか？

$$\boldsymbol{\mathcal{U}} := \left\{ \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{SL}_5(\mathbb{Z}) \;\middle|\; \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ & 1 & * & * & * \\ & & 1 & * & * \\ & & & 1 & * \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

べき単的マグナス展開のアイディア

復習. 次は, なぜべき零群だったか？

$$\mathcal{U} := \left\{ A \in SL_5(\mathbb{Z}) \;\middle|\; A = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ & 1 & * & * & * \\ & & 1 & * & * \\ & & & 1 & * \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

まとめ	(1) べき零商 G_m が段階的に解りやすい. (2) 中心が見やすい.

$=$ 一般化 $\Longrightarrow$

べき単的マグナス展開のアイディア

復習. 次は, なぜべき零群だったか？

$$\mathcal{U} := \left\{ A \in SL_5(\mathbb{Z}) \;\middle|\; A = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ & 1 & * & * & * \\ & & 1 & * & * \\ & & & 1 & * \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

まとめ	(1) べき零商 G_m が段階的に解りやすい. (2) 中心が見やすい.

= 一般化 $\Longrightarrow$

定理 [Gupta-Gupta, '78. Math. Z]

有限表示な冪零群 G は, 冪単で忠実 "線形表現" をもつ.

$\exists$ 単射 $\rho : G \hookrightarrow \mathcal{U}_n(A)$.

次節では G を商群 F/F_m で説明.

べき単的マグナス展開の定義 $G = F/F_5, \qquad F = \langle x, y\rangle$

$\Omega := \mathbb{Z}[a_1, \ldots, a_5, b_1, \ldots, b_5]$ 10-変数の可換多項式環

準同形 $\rho : F/F_5 \longrightarrow SL_5(\Omega)$ を次で定める:

べき単的マグナス展開の定義 $G = F/F_5, \quad F = \langle x, y \rangle$

$\Omega := \mathbb{Z}[a_1, \ldots, a_5, b_1, \ldots, b_5]$　10-変数の可換多項式環

準同形 $\rho : F/F_5 \longrightarrow SL_5(\Omega)$ を次で定める:

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & a_2 & 0 & 0 \\ & & 1 & a_3 & 0 \\ & & & 1 & a_4 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}. \qquad \rho(y) = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & b_2 & 0 & 0 \\ & & 1 & b_3 & 0 \\ & & & 1 & b_4 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

べき単的マグナス展開の定義 $G = F/F_5, \quad F = \langle x, y\rangle$

$\Omega := \mathbb{Z}[a_1, \ldots, a_5, b_1, \ldots, b_5]$ 10-変数の可換多項式環

準同形 $\rho : F/F_5 \longrightarrow SL_5(\Omega)$ を次で定める:

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & a_2 & 0 & 0 \\ & & 1 & a_3 & 0 \\ & & & 1 & a_4 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}. \qquad \rho(y) = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & b_2 & 0 & 0 \\ & & 1 & b_3 & 0 \\ & & & 1 & b_4 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

性質 [GG] F/F_5 の定量化

- ρ は単射, i.e, 忠実な線形表現.
- $\rho(\text{ 中心 }) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{?} \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \middle| \ \boxed{?} \text{ は“bracket”でかける.} \right\}$

べき単的マグナス展開の定義 $G = F/F_m, \quad F = \langle x, y \rangle$

$\Omega := \mathbb{Z}[a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m]$ $2m$-変数の可換多項式環

準同形 $\rho : F/F_m \longrightarrow SL_m(\Omega)$ を次で定める:

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & a_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & a_{m-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(y) = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & b_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & b_{m-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

性質 [GG] F/F_m の定量化

- ρ は単射, i.e, 忠実な線形表現.
- $\rho($ 中心 $) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{?} \\ & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \middle| \ \boxed{?} \text{ は“bracket”でかける.} \right\}$

結論 F/F_m は行列で量的に扱える.

本講演の目次

§1　ミルナー不変量の復習

§2　べき単的なマグナス展開

§3　ミルナー不変量の図的計算法と計算例

§4　高次ミルナー不変量

本講演の目次

§1 ミルナー不変量の復習

§2 べき単的なマグナス展開

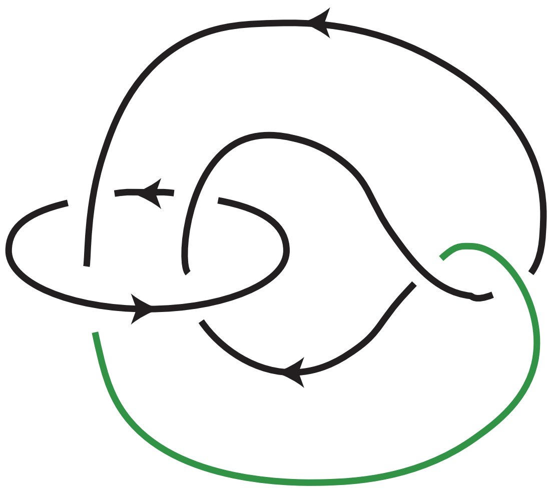
§3 ミルナー不変量の図的計算法と計算例

- 定義のアイディア
- 主定理
- ホワイトヘッド絡み目で計算

§4 高次ミルナー不変量

アイディア　ホワイトヘッドリンク $m = 5$ で

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[drr, "f_4"] & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & F/F_4 \arrow[l, "p_4"'] & F/F_5. \arrow[l, "p_5"']
\end{tikzcd}$$



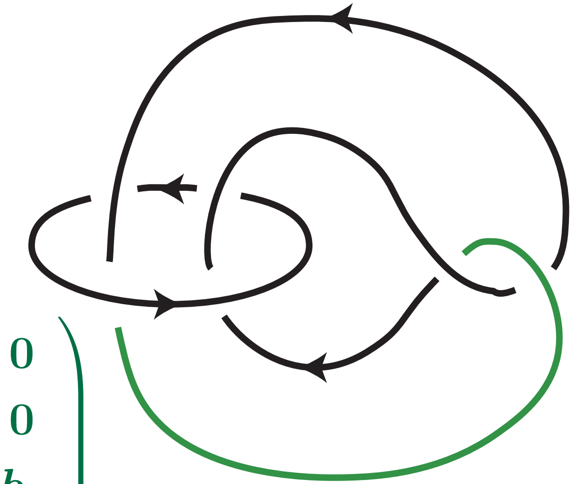
アイディア　ホワイトヘッドリンク $m=5$ で

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[drr, "f_4"] & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & F/F_4 \arrow[l, "p_4"'] & F/F_5 . \arrow[l, "p_5"']
\end{tikzcd}
$$

$\boxed{f_4\text{ の具体的表示}}$.

$$
\begin{pmatrix}
1 & a_1 & 0 & 0 \\
 & 1 & a_2 & 0 \\
 & & 1 & a_3 \\
 & & & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & b_1 & 0 & 0 \\
 & 1 & b_2 & 0 \\
 & & 1 & b_3 \\
 & & & 1
\end{pmatrix}
$$

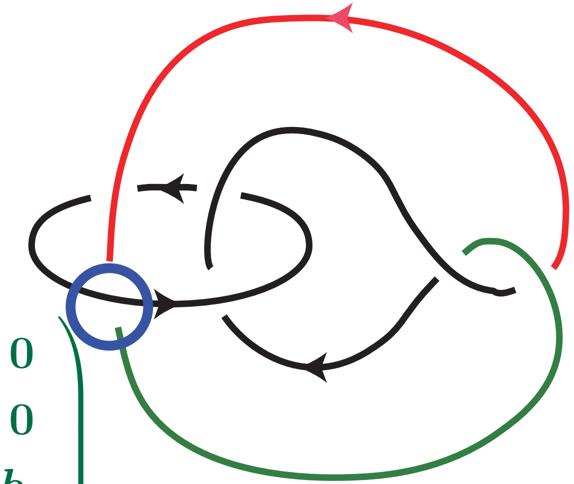


アイディア　ホワイトヘッドリンク $m=5$ で

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[drr, "f_4"] & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & F/F_4 \arrow[l, "p_4"'] & F/F_5. \arrow[l, "p_5"']
\end{tikzcd}
$$

$\boxed{f_4 \text{ の具体的表示}}$.

$$
\begin{pmatrix}
1 & a_1 & 0 & 0 \\
 & 1 & a_2 & 0 \\
 & & 1 & a_3 \\
 & & & 1
\end{pmatrix}
$$



$$
\begin{pmatrix}
1 & b_1 & b_1a_2 - a_1b_2 & (b_2a_1 - a_2b_1)b_3 \\
 & 1 & b_2 & b_2a_3 - a_2b_3 \\
 & & 1 & b_3 \\
 & & & 1
\end{pmatrix}
$$

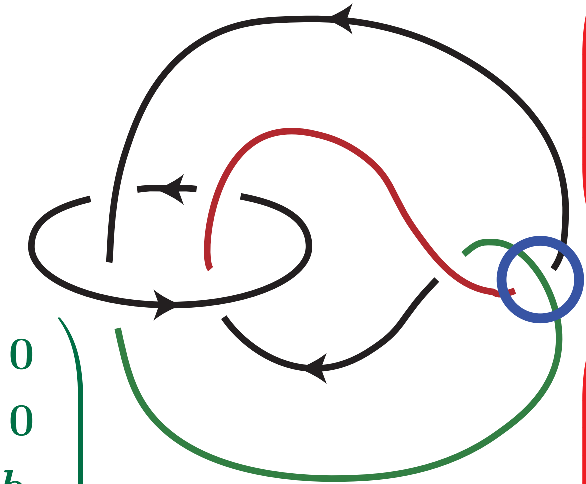
$$
\begin{pmatrix}
1 & b_1 & 0 & 0 \\
 & 1 & b_2 & 0 \\
 & & 1 & b_3 \\
 & & & 1
\end{pmatrix}
$$

アイディア　ホワイトヘッドリンク $m = 5$ で

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[drr, "f_4"] & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & F/F_4 \arrow[l, "p_4"'] & F/F_5. \arrow[l, "p_5"']
\end{tikzcd}
$$

$\boxed{f_4 \text{ の具体的表示}}$.

$$
\begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 \\ & 1 & a_2 & 0 \\ & & 1 & a_3 \\ & & & 1 \end{pmatrix}
$$



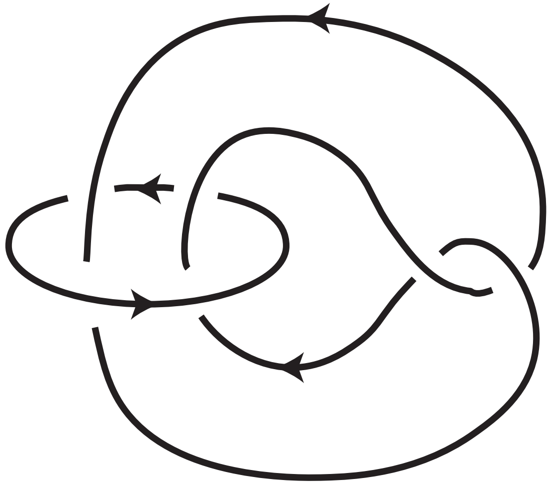
$$
\begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_1a_2 - a_1b_2 & (b_2a_1 - a_2b_1)b_3 \\ & 1 & b_2 & b_2a_3 - a_2b_3 \\ & & 1 & b_3 \\ & & & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ & 1 & b_2 & 0 \\ & & 1 & b_3 \\ & & & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 & (b_2a_1 - a_2b_1)b_3 + (a_2b_3 - a_3b_2)a_1 \\ & 1 & b_2 & 0 \\ & & 1 & b_3 \\ & & & 1 \end{pmatrix}
$$

アイディア　ホワイトヘッドリンク $m = 5$ で

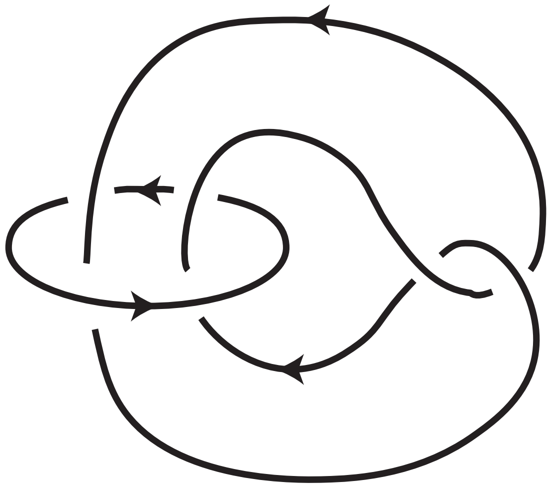
$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[drr, "f_4"] & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & F/F_4 \arrow[l, "p_4"'] & F/F_5. \arrow[l, "p_5"']
\end{tikzcd}
$$



アイディア　ホワイトヘッドリンク $m = 5$ で

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[drr, "f_4"] \arrow[drrr, red, "無理やり作ってみる"] & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & F/F_4 \arrow[l, "p_4"'] & F/F_5 . \arrow[l, "p_5"']
\end{tikzcd}$$

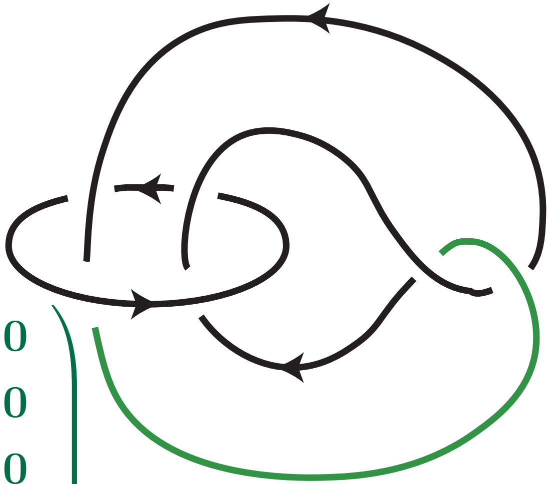
・



アイディア　ホワイトヘッドリンク $m=5$ で

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[drr, "f_4"] \arrow[drrr, "\text{無理やり作ってみる}"] & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & F/F_4 \arrow[l, "p_4"'] & F/F_5. \arrow[l, "p_5"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & a_2 & 0 & 0 \\
 & & 1 & a_3 & 0 \\
 & & & 1 & a_4 \\
 & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

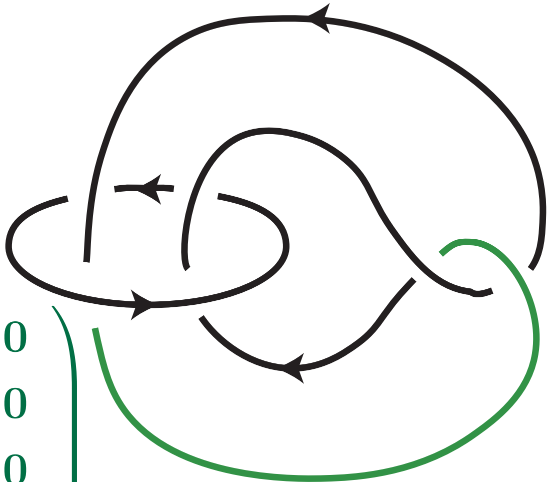


$$
\begin{pmatrix}
1 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & b_2 & 0 & 0 \\
 & & 1 & b_3 & 0 \\
 & & & 1 & b_4 \\
 & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

アイディア　ホワイトヘッドリンク $m=5$ で

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[drr, "f_4"] \arrow[drrr, "\text{無理やり作ってみる}"] & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & F/F_4 \arrow[l, "p_4"'] & F/F_5. \arrow[l, "p_5"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & a_2 & 0 & 0 \\
 & & 1 & a_3 & 0 \\
 & & & 1 & a_4 \\
 & & & & 1
\end{pmatrix}
$$



$$
\begin{pmatrix}
1 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & b_2 & 0 & 0 \\
 & & 1 & b_3 & 0 \\
 & & & 1 & b_4 \\
 & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

着想

Wirtinger 表示でギャップ。そのギャップとミルナ不変量とは等価のはず。

準備　行列を 1 行ふやす操作

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{F}_{m-1}/\boldsymbol{F}_m \longrightarrow \boldsymbol{F}/\boldsymbol{F}_m \xrightarrow{p_m} \boldsymbol{F}/\boldsymbol{F}_{m-1} \to \mathbf{0} \quad \text{(中心拡大)}$$

の切断を固定する:

$$\boldsymbol{\mathfrak{s}} : \boldsymbol{F}/\boldsymbol{F}_{m-1} \longrightarrow \boldsymbol{F}/\boldsymbol{F}_m.$$

例　$(\boldsymbol{m} = \mathbf{3}, \mathbf{4})$

準備　行列を 1 行ふやす操作

$$0 \to F_{m-1}/F_m \longrightarrow F/F_m \xrightarrow{p_m} F/F_{m-1} \to 0 \qquad (\text{中心拡大})$$

の切断を固定する:

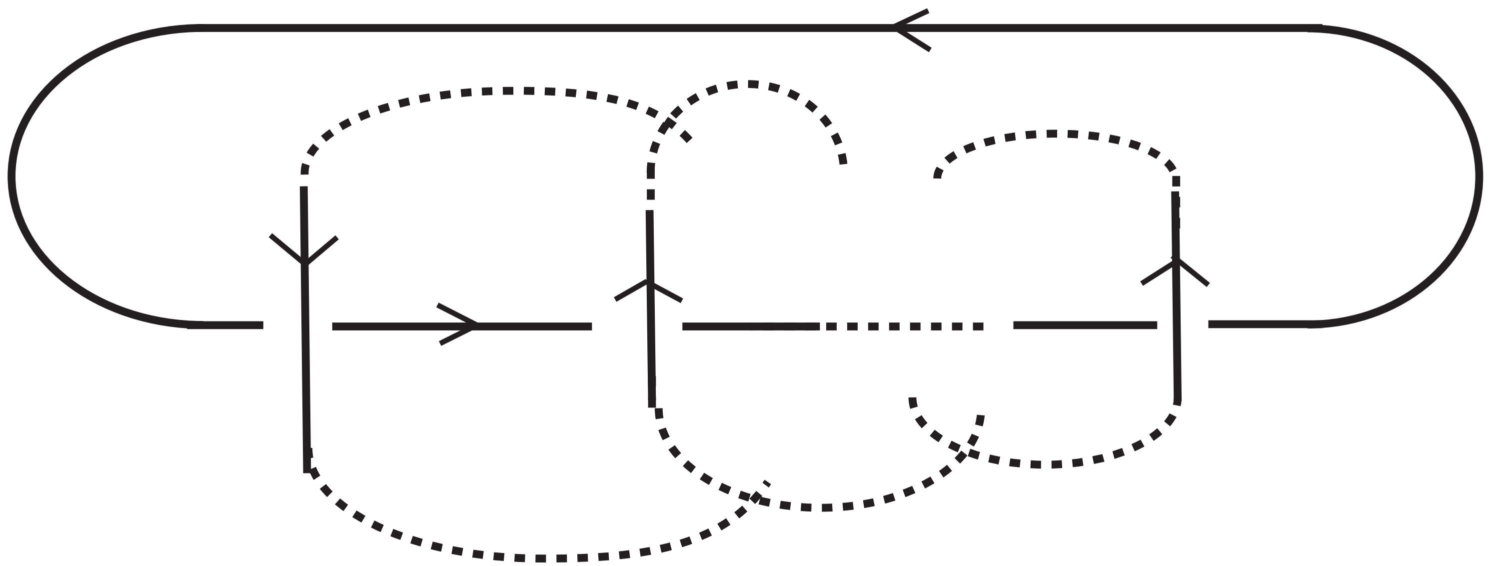
$$\mathfrak{s} : F/F_{m-1} \longrightarrow F/F_m.$$

例　$(m = 3, 4)$

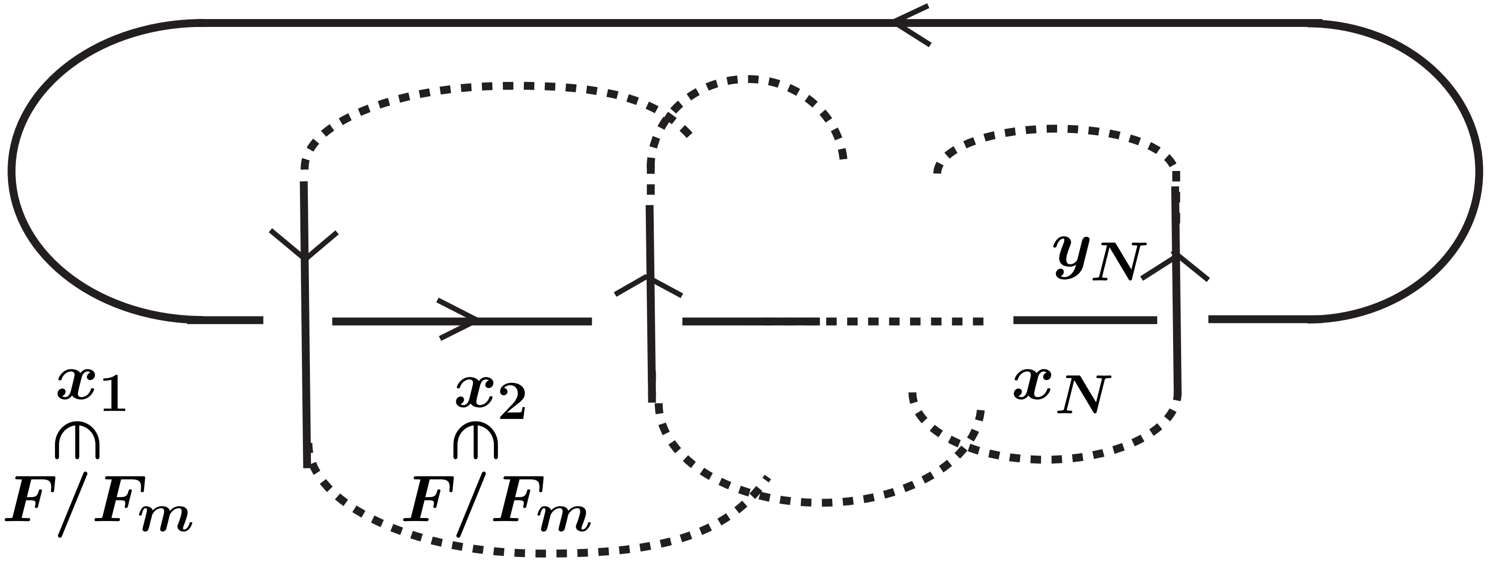
$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & a & (\text{Ambiguity}) \\ & 1 & b \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & x \\ & 1 & b \\ & & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & a & x & (\text{Ambiguity}) \\ & 1 & b & y \\ & & 1 & c \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

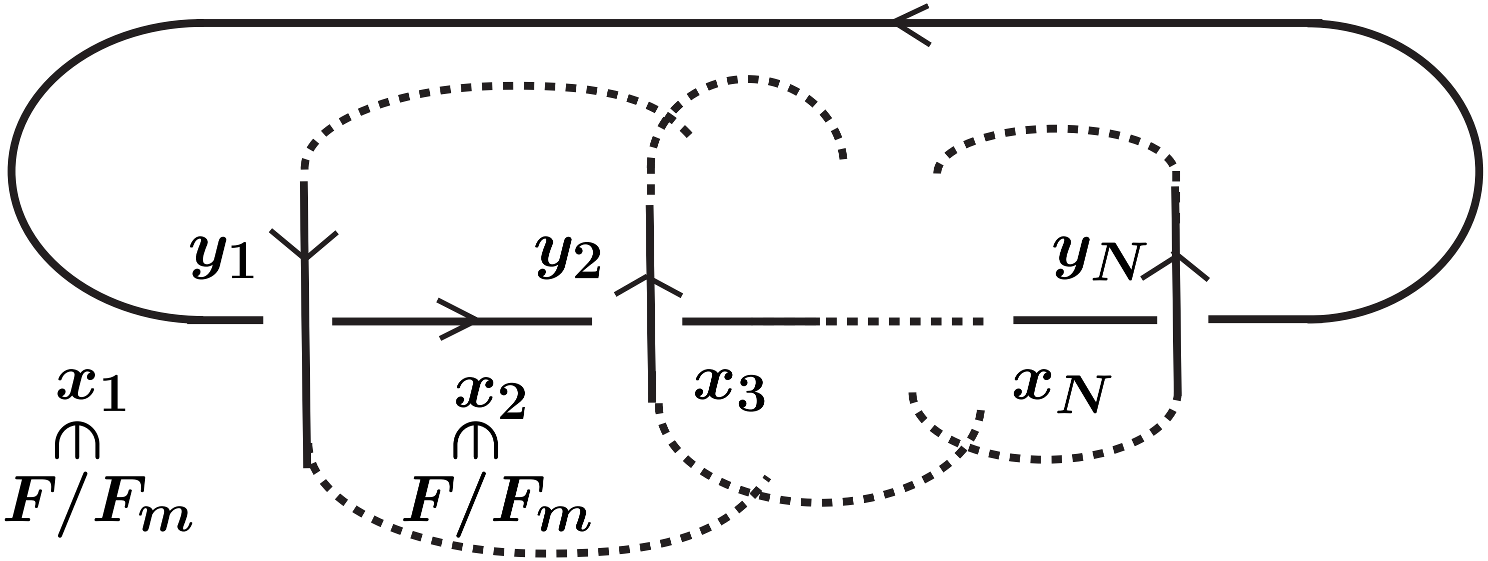
Given 準同型 $\boldsymbol{f_m : \pi_1(S^3 \setminus L) \longrightarrow F/F_m}$



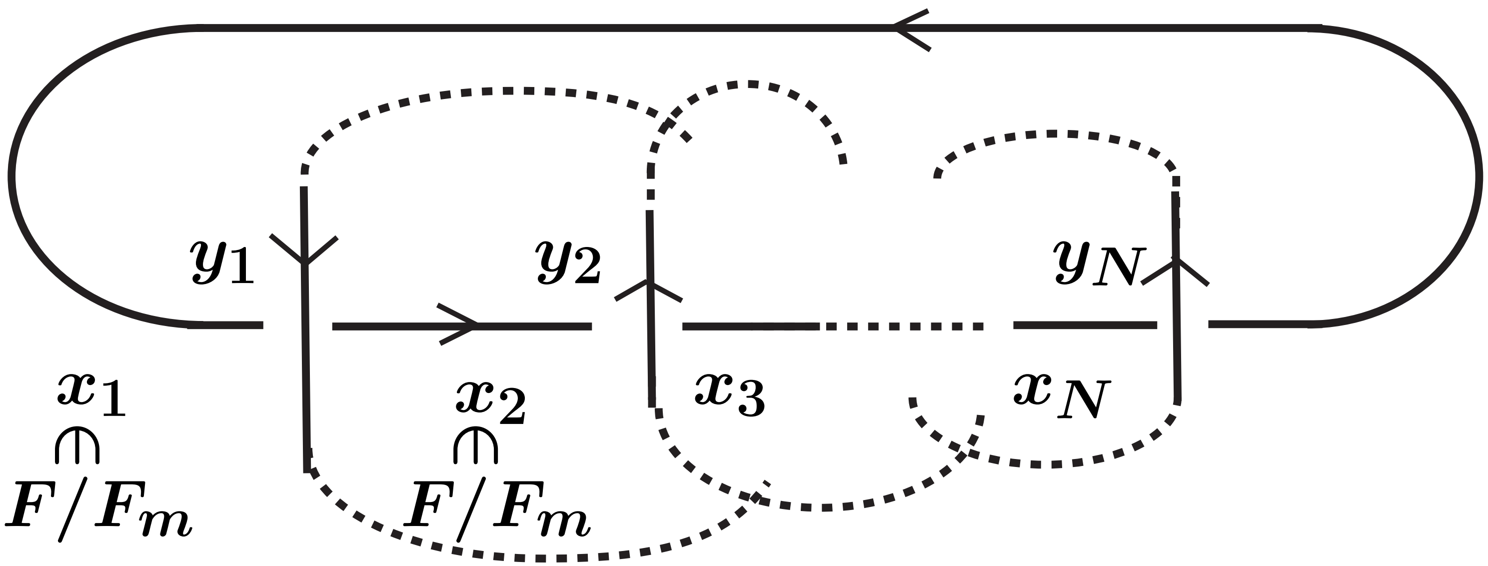
Given 準同型 $f_m : \pi_1(S^3 \setminus L) \longrightarrow F/F_m$



Given 準同型 $f_m : \pi_1(S^3 \setminus L) \longrightarrow F/F_m$



Given 準同型 $f_m : \pi_1(S^3 \setminus L) \longrightarrow F/F_m$



注意

$$x_2 = y_1^{-1} x_1 y_1$$

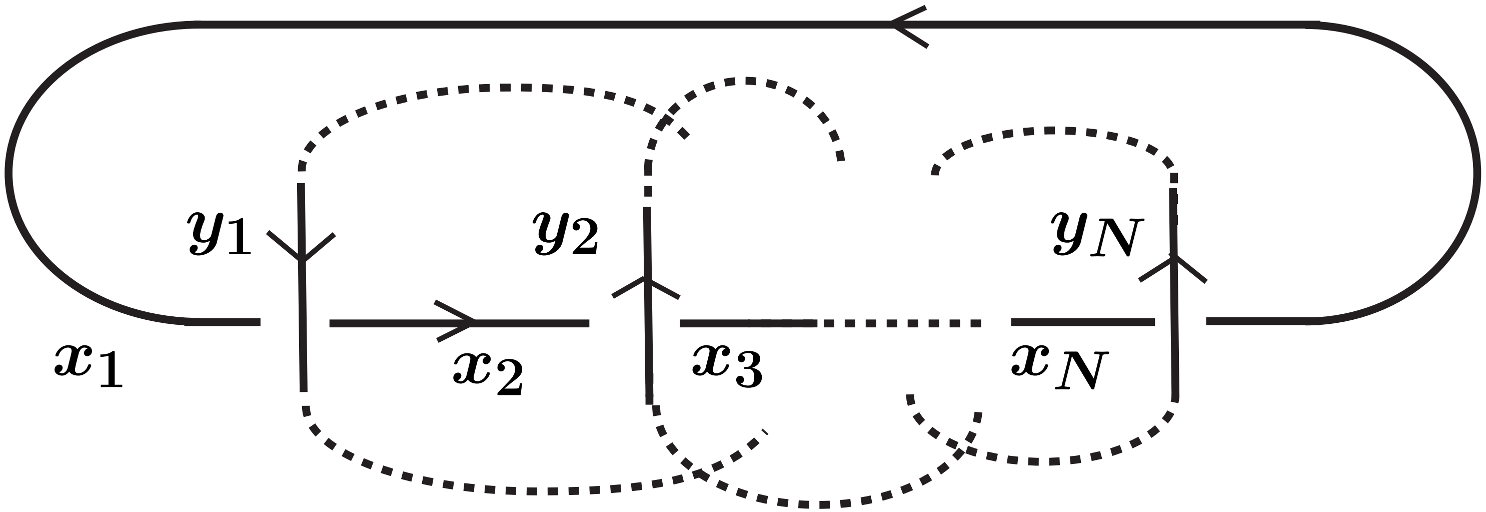
$$x_3 = y_2^{-1} x_2 y_2$$

$$\vdots$$

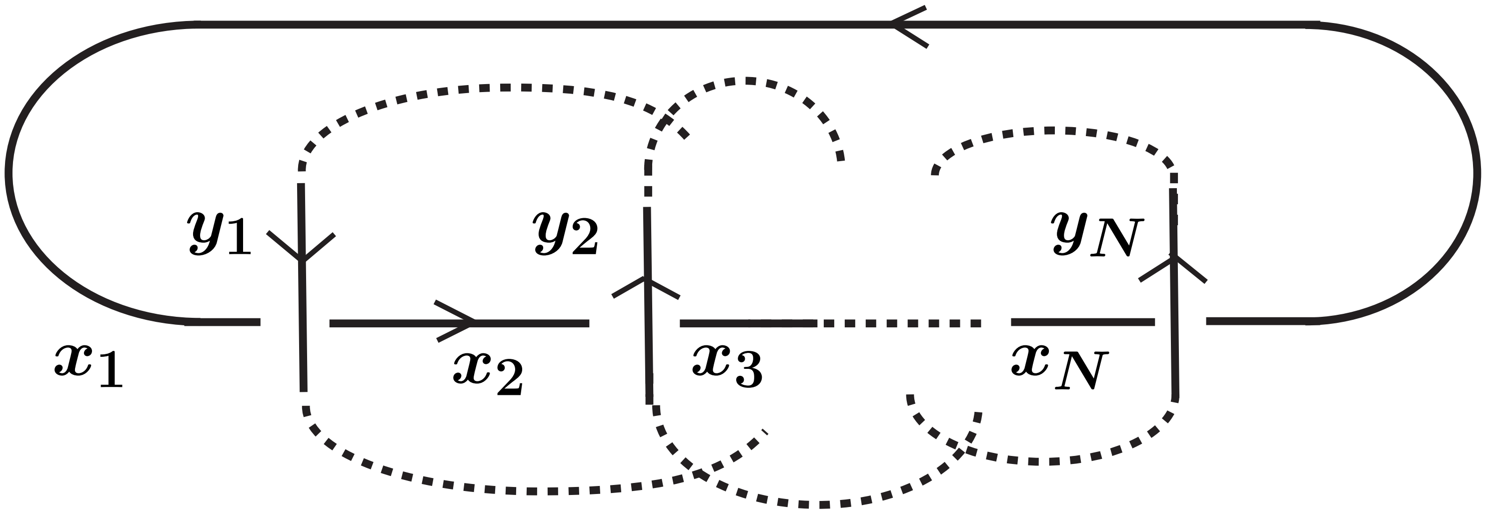
$$x_N = y_{N-1}^{-1} x_{N-1} y_{N-1}$$

$$x_1 = y_N^{-1} x_N y_N$$

Given 準同型 $f_m : \pi_1(S^3 \setminus L) \longrightarrow F/F_m$



Given 準同型 $f_m : \pi_1(S^3 \setminus L) \longrightarrow F/F_m$



定義

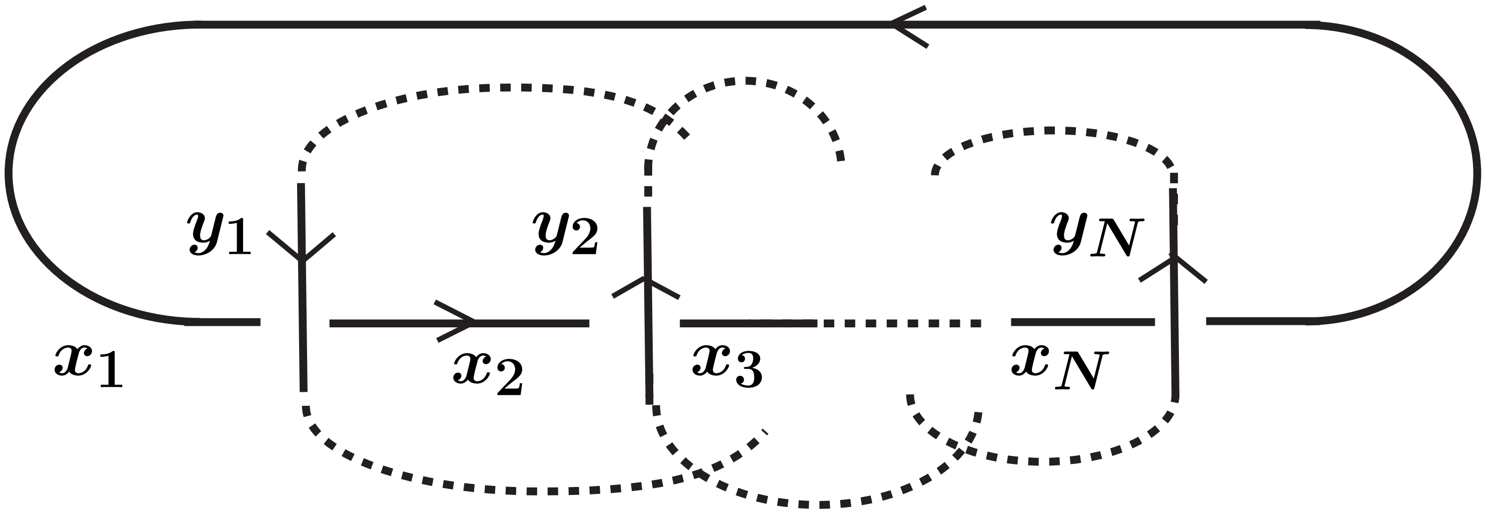
$$X_2 = \mathfrak{s}(y_1)^{-1}\mathfrak{s}(x_1)\mathfrak{s}(y_1)$$

$$\vdots$$

$$X_N = \mathfrak{s}(y_{N-1})^{-1}X_{N-1}\mathfrak{s}(y_{N-1})$$

$$\Phi(\ell) :=$$

Given 準同型 $f_m : \pi_1(S^3 \setminus L) \longrightarrow F/F_m$



定義

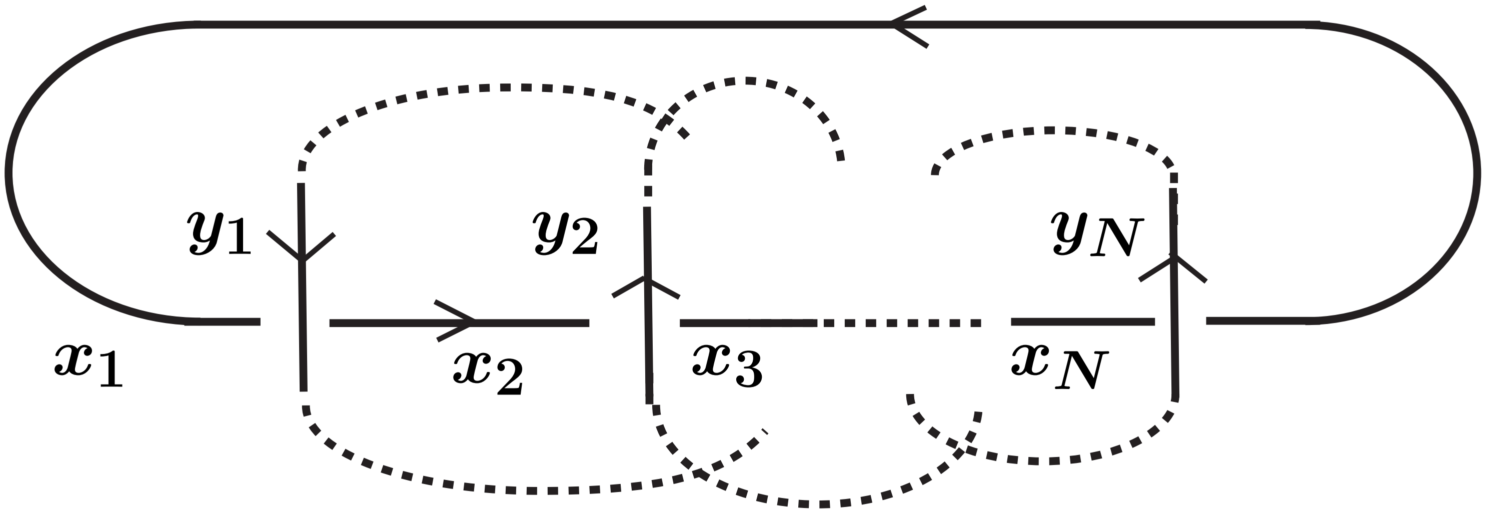
$$\color{red}{X_2} = \mathfrak{s}(y_1)^{-1}\mathfrak{s}(x_1)\mathfrak{s}(y_1)$$

$$\vdots$$

$$\color{red}{X_N} = \mathfrak{s}(y_{N-1})^{-1}X_{N-1}\mathfrak{s}(y_{N-1})$$

$$\color{red}{\Phi(\ell)} := \mathfrak{s}(y_N)^{-1}X_N\mathfrak{s}(y_N)\mathfrak{s}(x_1)^{-1} \in F_m/F_{m+1}$$

Given 準同型 $f_m : \pi_1(S^3 \setminus L) \longrightarrow F/F_m$



定義

$$X_2 = \mathfrak{s}(y_1)^{-1}\mathfrak{s}(x_1)\mathfrak{s}(y_1)$$

$$\vdots$$

$$X_N = \mathfrak{s}(y_{N-1})^{-1}X_{N-1}\mathfrak{s}(y_{N-1})$$

$$\Phi(\ell) := \mathfrak{s}(y_N)^{-1}X_N\mathfrak{s}(y_N)\mathfrak{s}(x_1)^{-1} \in F_m/F_{m+1}$$

定理 [KN]

$^{\exists}$ 単射 $\mathcal{I} : F_{m-1}/F_m \longrightarrow F_m/F_{m+1}$ s.t.

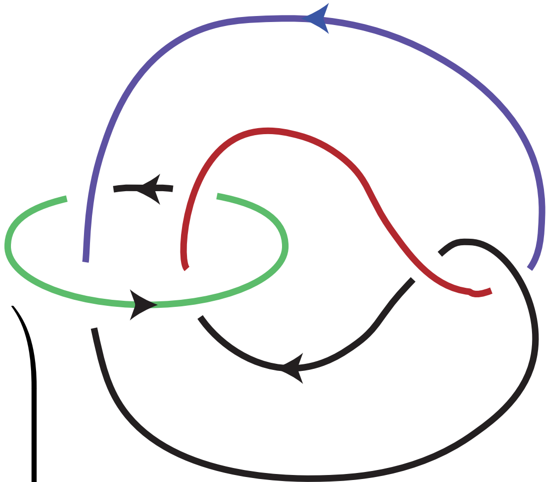
$$\mathcal{I}\big(f_m(\mathfrak{l})\big) = \Phi(\ell).$$

計算例　ホワイトヘッドリンク $m=5$ で

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[drr, "f_4"] \arrow[drrr, red, "\text{無理やり作ってみる}"] & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & F/F_4 \arrow[l, "p_4"'] & F/F_5. \arrow[l, "p_5"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & a_2 & 0 & 0 \\
 & & 1 & a_3 & 0 \\
 & & & 1 & a_4 \\
 & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

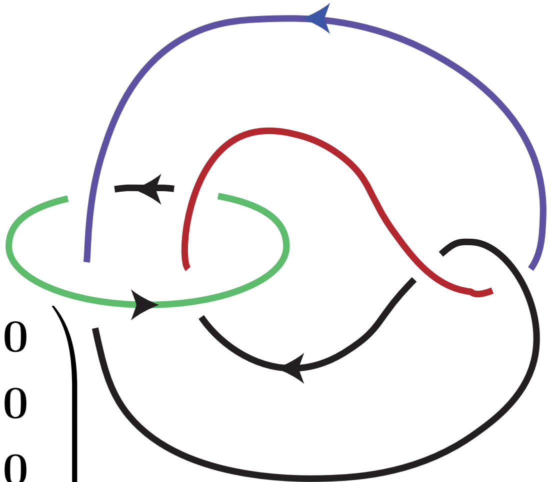
$$
\begin{pmatrix}
1 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & b_2 & 0 & 0 \\
 & & 1 & b_3 & 0 \\
 & & & 1 & b_4 \\
 & & & & 1
\end{pmatrix}
$$



計算例　ホワイトヘッドリンク $m=5$ で

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[drr, "f_4"] \arrow[drrr, red, "\text{無理やり作ってみる}"] & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & F/F_4 \arrow[l, "p_4"'] & F/F_5. \arrow[l, "p_5"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & a_2 & 0 & 0 \\ & & 1 & a_3 & 0 \\ & & & 1 & a_4 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & b_2 & 0 & 0 \\ & & 1 & b_3 & 0 \\ & & & 1 & b_4 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_1a_2 - a_1b_2 & (b_2a_1 - a_2b_1)b_3 & \text{長い式} \\ & 1 & b_2 & b_2a_3 - a_2b_3 & (b_3a_2 - a_3b_2)b_4 \\ & & 1 & b_3 & b_3a_4 - a_3b_4 \\ & & & 1 & b_4 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

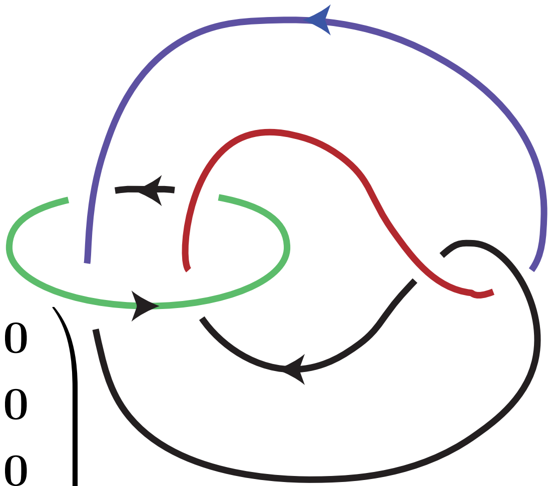
$$\begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 & (b_2a_1 - a_2b_1)b_3 - (b_2a_3 - b_3a_2)b_1 & \\ & 1 & b_2 & 0 & (b_3a_2 - b_3b_2) \\ & & 1 & b_3 & \\ & & & 1 & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

計算例　ホワイトヘッドリンク $m = 5$ で

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[drr, "f_4"] \arrow[drrr, "\text{無理やり作ってみる}"] & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & F/F_4 \arrow[l, "p_4"'] & F/F_5 \arrow[l, "p_5"'] .
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & a_2 & 0 & 0 \\
 & & 1 & a_3 & 0 \\
 & & & 1 & a_4 \\
 & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & b_2 & 0 & 0 \\
 & & 1 & b_3 & 0 \\
 & & & 1 & b_4 \\
 & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

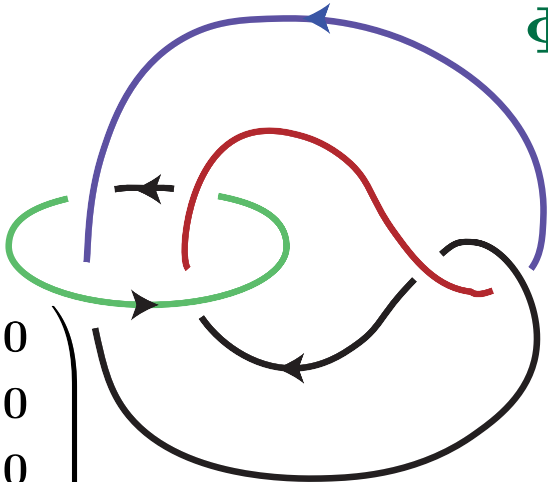


計算例　ホワイトヘッドリンク $m=5$ で

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[drr, "f_4"] \arrow[drrr, "\text{無理やり作ってみる}"] & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & F/F_4 \arrow[l, "p_4"'] & F/F_5. \arrow[l, "p_5"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & a_2 & 0 & 0 \\
 & & 1 & a_3 & 0 \\
 & & & 1 & a_4 \\
 & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & b_2 & 0 & 0 \\
 & & 1 & b_3 & 0 \\
 & & & 1 & b_4 \\
 & & & & 1
\end{pmatrix}
$$



$$
\Phi := X_1{}^{-1} A B^{-1} X_1 B A^{-1}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \Upsilon \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 0 & 0 \\
 & & & 1 & 0 \\
 & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

ここで $\Upsilon =$

$$
a_3a_4b_1b_2 - 2a_2a_4b_1b_3 + 2a_1a_3b_2b_4 - a_1a_2b_3b_4
$$

他の計算例.

(I)

他の計算例.

(I) $\#L = 2 \quad \mathrm{cl}(L) \leq 8 \quad \mathrm{lk} = 0.$

Link	5_1^2	7_4^2	7_6^2	7_8^2	8_{10}^2	8_{12}^2	8_{13}^2	8_{15}^2
m	4	4	4	4	6	6	4	4
$\Psi_m(1)$	$\varUpsilon$	$2\varUpsilon$	$\varUpsilon$	$\varUpsilon$	$\varLambda$	$\varLambda$	$\varUpsilon$	$\varUpsilon$
$\Psi_m(2)$	$-\varUpsilon$	$-2\varUpsilon$	$-\varUpsilon$	$-\varUpsilon$	$-\varLambda$	$-\varLambda$	$-\varUpsilon$	$-\varUpsilon$

ここで $\Upsilon = a_3a_4b_1b_2 - 2a_2a_4b_1b_3 + 2a_1a_3b_2b_4 - a_1a_2b_3b_4$

$\Lambda =$ 或る６次式

注:　他の絡み目でも, 同様にできるが, どうも弱そう.

(II)

他の計算例.

(I) $\#L = 2$ $\mathrm{cl}(L) \le 9$ $\mathrm{lk} = 0$. たとえば

Link	5^2_1	7^2_4	7^2_6	7^2_8	8^2_{10}	8^2_{12}	8^2_{13}	8^2_{15}
m	4	4	4	4	6	6	4	4
$\Psi_m(1)$	Υ	2Υ	Υ	Υ	Λ	Λ	Υ	Υ
$\Psi_m(2)$	$-\Upsilon$	-2Υ	$-\Upsilon$	$-\Upsilon$	$-\Lambda$	$-\Lambda$	$-\Upsilon$	$-\Upsilon$

ここで $\Upsilon = a_3a_4b_1b_2 - 2a_2a_4b_1b_3 + 2a_1a_3b_2b_4 - a_1a_2b_3b_4$

$\Lambda =$ 或る６次式

注: 他の絡み目でも, 同様にできるが, どうも弱そう.

(II) $\#L = 3$ $\mathrm{cl}(L) \le 8$ $\mathrm{lk} = 0$. 強そう.

例: $L = 6^3_2$ $L' = 9^3_{n25}$

マルチ Alexaner 多項式が同じだが、高次ミルナー不変量は違う。

本講演の目次

§1　ミルナー不変量の復習

§2　べき単的なマグナス展開

§3　ミルナー不変量の図的計算法と計算例

§4　高次ミルナー不変量

高次化へのアイディア　ホワイトヘッドリンク $m = 5$ で

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[drr, "f_4"] & & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & F/F_4 \arrow[l, "p_4"'] & F/F_5 \arrow[l, "p_5"'] & F/F_6. \arrow[l, "p_6"']
\end{tikzcd}
$$

高次化へのアイディア　ホワイトヘッドリンク $m=5$ で

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[drr, "f_4"] \arrow[drrr, "\nexists"] \arrow[drrrr, "\nexists"] & & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & F/F_4 \arrow[l, "p_4"'] & F/F_5 \arrow[l, "p_5"'] & F/F_6. \arrow[l, "p_6"']
\end{tikzcd}
$$

Q.　どうすればリフトが出来るか？

A.　低次のミルナー不変量で割ればよい.

すなわち, F/F_5 を $G_5 := F/\langle F_5,\ \Phi_4(1), \Phi_4(2)\rangle$ にせよ。

高次化へのアイディア　ホワイトヘッドリンク $m = 5$ で

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[drr, "f_4"] \arrow[drrr, "{}^{\exists} f_5"] \arrow[drrrr, "\nexists"] & & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & F/F_4 \arrow[l, "p_4"'] & G_5 \arrow[l, "p_5"'] & F/F_6. \arrow[l, "p_6"']
\end{tikzcd}
$$

Q.　どうすればリフトが出来るか？

A.　低次のミルナー不変量で割ればよい.

すなわち, F/F_5 を $G_5 := F/\langle F_5,\ \Phi_4(1), \Phi_4(2)\rangle$ にせよ。

高次化へのアイディア　ホワイトヘッドリンク $m=5$ で

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[drr, "f_4"] \arrow[drrr, "{}^{\exists} f_5"] \arrow[drrrr, "\nexists"] & & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & F/F_4 \arrow[l, "p_4"'] & G_5 \arrow[l, "p_5"'] & F/F_6 . \arrow[l, "p_6"']
\end{tikzcd}
$$

Q.　どうすればリフトが出来るか？

A.　低次のミルナー不変量で割ればよい.

すなわち, F/F_5 を $G_5 := F/\langle F_5,\ \Phi_4(1), \Phi_4(2)\rangle$ にせよ。

Q.　次のリフトは？

A.　同様に $\Phi_5(j)$ を高次版ミルナー不変量と定義し、

F/F_6 を $G_6 := F/\langle F_6,\ \Phi_4(1), \Phi_4(2),\ \Phi_5(1), \Phi_5(2), \rangle$ に.

高次化へのアイディア　ホワイトヘッドリンク $m=5$ で

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[drr, "f_4"] \arrow[drrr, "{}^{\exists}\overline{f_5}"] \arrow[drrrr, "{}^{\exists}\overline{f_6}"] & & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & F/F_4 \arrow[l, "p_4"'] & G_5 \arrow[l, "p_5"'] & G_6. \arrow[l, "p_6"']
\end{tikzcd}
$$

Q.　どうすればリフトが出来るか？

A.　低次のミルナー不変量で割ればよい．

すなわち，F/F_5 を $G_5 := F/\langle F_5,\ \Phi_4(1), \Phi_4(2)\rangle$ にせよ。

Q.　次のリフトは？

A.　同様に $\Phi_5(j)$ を高次版ミルナー不変量と定義し、

F/F_6 を $G_6 := F/\langle F_6,\ \Phi_4(1), \Phi_4(2),\ \Phi_5(1), \Phi_5(2), \rangle$ に．

高次化へのアイディア　ホワイトヘッドリンク $m=5$ で

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3\setminus L) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[drr, "f_4"] \arrow[drrr, "{}^{\exists}\overline{f_5}"] \arrow[drrrr, "{}^{\exists}\overline{f_6}"] & & & & \\
F/F_2 & F/F_3 \arrow[l, "p_3"'] & F/F_4 \arrow[l, "p_4"'] & G_5 \arrow[l, "p_5"'] & G_6. \arrow[l, "p_6"']
\end{tikzcd}
$$

Q.　どうすればリフトが出来るか？

A.　低次のミルナー不変量で割ればよい.

すなわち, F/F_5 を $G_5 := F/\langle F_5,\ \Phi_4(1), \Phi_4(2)\rangle$ にせよ。

Q.　次のリフトは？

A.　同様に $\Phi_5(j)$ を高次版ミルナー不変量と定義し、

F/F_6 を $G_6 := F/\langle F_6,\ \Phi_4(1), \Phi_4(2),\ \Phi_5(1), \Phi_5(2), \rangle$ に.

$\vdots$

帰納的に、高次のミルナー不変量を定義し、リフトが出来る

この定義の利点

(I)　元論文のような複雑さ ($\boldsymbol{\Delta_I}$ の定義) はない。そして

定理 [**KN**]

$^\forall \boldsymbol{m}$ に対し, $\overline{\boldsymbol{f_m}} : \boldsymbol{\pi_1(S^3 \setminus L) \to G_m}$ は次の同型を誘導：

$$\boldsymbol{\pi_1(S^3 \setminus L)/\pi_1(S^3 \setminus L)_m \cong G_m}$$

(II)

この定義の利点

(I)　元論文のような複雑さ ($\boldsymbol{\Delta_I}$ の定義) はない。そして

定理 [KN]

$^\forall m$ に対し, $\overline{f_m} : \pi_1(S^3 \setminus L) \to G_m$ は次の同型を誘導：

$$\pi_1(S^3 \setminus L)/\pi_1(S^3 \setminus L)_m \cong G_m$$

(II)　整数倍で消えず、捩れ部分が強そう。

例 [KN]. $\#L = 2$　$\mathrm{cl}(L) \leq 8$　$\mathrm{lk} = 3$ を全て分類.

(III)

この定義の利点

(I)　元論文のような複雑さ ($\boldsymbol{\Delta_I}$ の定義) はない。そして

定理 [KN]

$^\forall m$ に対し, $\overline{f_m} : \pi_1(S^3 \setminus L) \to G_m$ は次の同型を誘導：

$$\pi_1(S^3 \setminus L)/\pi_1(S^3 \setminus L)_m \cong G_m$$

(II)　整数倍で消えず、捩れ部分が強そう。

例 [KN]. $\#L = 2$　$\mathrm{cl}(L) \leq 8$　$\mathrm{lk} = 3$ を全て分類.

(III)　元の定義ではゼロだが、我々のはゼロでない例。

まとめ

まとめ

結果(KN.)

(最低次) ミルナー不変量の図式的計算法を与えた.

高次ミルナー不変量を精密化させた + 計算法.

$\Longrightarrow$ 沢山の計算例を与えた.

いろいろ今後の課題があるので、出来次第報告したい。

まとめ

結果(**KN.**)

(最低次) ミルナー不変量の図式的計算法を与えた.

高次ミルナー不変量を精密化させた $+$ 計算法.

$\Longrightarrow$ 沢山の計算例を与えた.

いろいろ今後の課題があるので、出来次第報告したい。

Thank you