曲線の和に関する Arnold 不変量の加法性

杉山龍太郎

信州大学理工学系研究科 数理・自然情報科学専攻

平成 28 年 12 月 21 日
境圭一氏（信州大学）との共同研究に基づく.

現在

平面の generic 閉曲線の generic ホモトピーによる分類を研究している．特に generic 閉曲線が generic ではない部分，自己接触や 3 重点を持つ曲線を通過するときに変化する Arnold 不変量 $J^{\pm}, St$ に注目．

Definition

正則な閉曲線 $c : S^1 \to \mathbb{R}^2$ が

(1) 任意の $v \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\# c^{-1}(v) \leq 2$,

(2) $s \neq t, c(s) = c(t)$ となる任意の $s, t \in S^1$ に対し，$\dot{c}(s), \dot{c}(t)$ が一次独立，

をみたすとき，c を **generic 閉曲線** (generic closed curve) という．

Definition

$H : S^1 \times I \to \mathbb{R}^2$: 2 つの generic 閉曲線を結ぶホモトピー
$H_t(s) = H(s,t)$ とあらわす．H が次の (1)〜(3) を満たすとき，H は **generic ホモトピー**であるという：

(1) 各 $H_t : S^1 \to \mathbb{R}^2$ は正則，

(2) 有限個の $t_i \in I$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を除いて，H_t は generic 曲線，

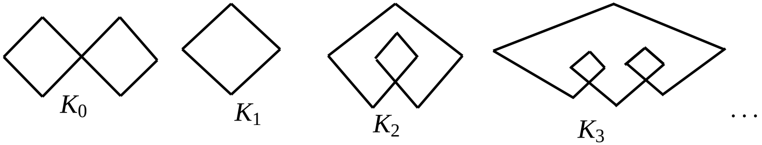
(3) 各 t_i において H_{t_i} は次のいずれか一方のみを満たす：

  (a) 3 重点をただ 1 つだけ持ち，その 3 重点で交わる 3 本の接ベクトルのうち，どの 2 つも 1 次独立である．

  (b) 自己接触をただ 1 つだけ持ち，接触する 2 本の辺の曲率が異なる．

Definition

standard curve K_n を以下のような generic 閉曲線とする.



全ての generic 閉曲線は K_n を generic ホモトピーで変形することによって作ることができる.

Theorem (V.I.Arnold, 1994)

向きづけられていない generic 閉曲線の不変量 $St, J^{\pm}$ で, 次の性質をみたすものが一意的に存在する.

(1) 3 重点を通過しない *generic* ホモトピーに関する不変量 St で

- (a) generic 閉曲線 c が, 3 重点を 1 つ正 (負) に通過して c' に変形したとき, $St(c') - St(c) = 1\ (-1)$,
- (b) $St(K_0) = 0$, $St(K_{i+1}) = i\ (i = 0, 1, \ldots)$.

(2) 直接接触を通過しない generic ホモトピーに関する不変量 J^+ で

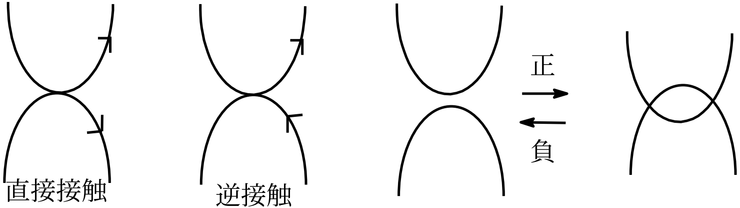
- (a) generic 閉曲線 c が, 直接接触を 1 つ正 (負) に通過して c' に変形したとき, $J^+(c') - J^+(c) = 2\ (-2)$,
- (b) $J^+(K_0) = 0$, $J^+(K_{i+1}) = -2i\ (i = 0, 1, \ldots)$.

(3) 逆接触を通過しない generic ホモトピーに関する不変量 J^-

- (a) generic 閉曲線 c が, 逆接触を 1 つ正 (負) に通過して c' に変形したとき, $J^-(c') - J^-(c) = -2\ (2)$,
- (b) $J^-(K_0) = -1$, $J^-(K_{i+1}) = -3i\ (i = 0, 1, \ldots)$.

接触の種類と正負

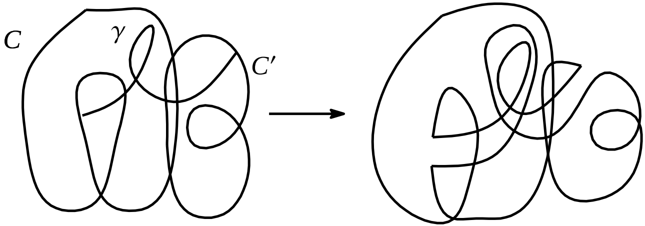
接触の仕方には 2 種類存在し, それぞれに正負を定める.



一般化された連結和の定義

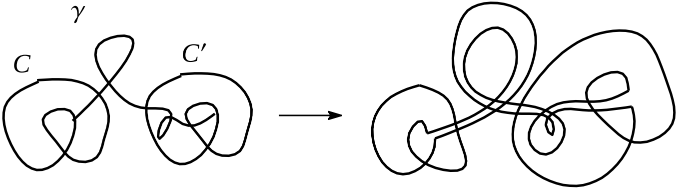
Definition

橋 γ に沿った**一般化された連結和**を, 下図によって定まる閉曲線の足しあわせとする.



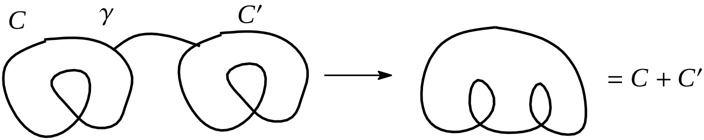
$= C +_\gamma C'$

2 つの曲線が交差していないとき, strange sum とよぶ.



$= C +_\gamma C'$

また橋が閉曲線の非有界領域にあるとき, 連結和とよび, 単に $C+C'$ と書く.



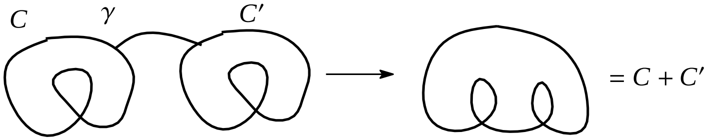
必要に応じて足し合わせた曲線に向きを入れて考え, それに矛盾が無いように足し合わせる 2 つの曲線にそれぞれ向きを与える.

連結和や strange sum に関しては以下の様な関係が知られている.

Theorem (V.I.Arnold, 1994)

連結和に関して *Arnold* 不変量は加法的, つまり C, C' を *generic* 閉曲線とすると

$$St(C) + St(C') = St(C + C'),$$
$$J^{\pm}(C) + J^{\pm}(C') = J^{\pm}(C + C').$$

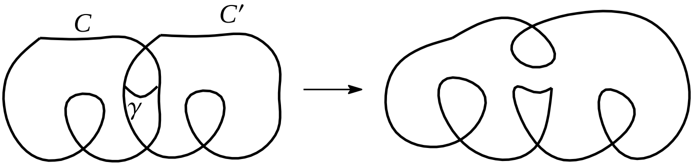


Theorem (Mendes de Jesus-Romero Fuster, 2002)

Generic 閉曲線 C, C' を結ぶ橋 γ が $\gamma \cap (C \cup C') = \emptyset$ を満たすとき

$$J^{\pm}(C +_{\gamma} C') = J^{\pm}(C) + J^{\pm}(C') - 2T^{\pm}(C + C') + 2(\mathrm{ind}_{\dot{\gamma}(0)}(C) + \mathrm{ind}_{-\dot{\gamma}(1)}(C')),$$

$$St(C +_{\gamma} C') = St(C) + St(C') - T^{St}_{\gamma}(C, C').$$



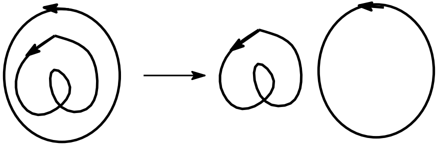
$T^{\pm}$ について

曲線を分離するとき, 2 つの曲線が接触する回数を符号を含めて数えたものが $T^{\pm}$ である. 具体的には

- $T^{+}(\Gamma_1, \Gamma_2)$:正 (負) の直接接触を +1 回 (−1 回) と数える.
- $T^{-}(\Gamma_1, \Gamma_2)$:正 (負) の逆接触を −1 回 (+1 回) と数える.

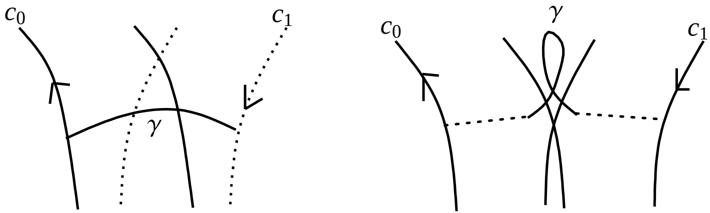
直接, 逆, 正負については先ほどと同じ.

Example



このとき $T^{+} = 2$, $T^{-} = 2$.

目標



の場合について, $J^{\pm}(c_0 +_{\gamma} c_1)$ は $J^{\pm}(c_0), J^{\pm}(c_1)$ を使ってどのように書けるか？

また交差解消の際の接触数 $T^{\pm}$ はどのように計算されるか？

今回は $J^{\pm}$ について発表, St は同様にできる.

準備

$C \subset \mathbb{R}^2$: 向きのついていない閉曲線.

Definition

$c : S^1 \to \mathbb{R}^2$: C の $c(0) = c(1)$ となるパラメータ
$R : \mathbb{R}^2 - C$ の連結成分の 1 つ
$p : R$ 内の任意の点
このとき

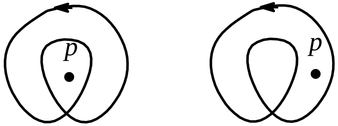
$$e^{i\theta(t)} = \frac{c(t) - p}{|c(t) - p|}$$

となる連続関数 $\theta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ を選ぶとき

$$\mathrm{ind}^R(c) := \frac{\theta(2\pi) - \theta(0)}{2\pi}$$

を c に関する R の**領域指数**と呼ぶ.

Example



このとき p での領域指数は, 左では $\mathrm{ind}^R = 2$, 右では $\mathrm{ind}^R = 1$ である.

Remark

領域指数は曲線の向きに依存する.

$x \in C$: 2 重点でない点, v : x における C の単位法ベクトル,
$p \in R$, ただし R は $\mathbb{R}^2 - C$ の連結成分で, v が指し示すもの.
(x, v) に対して $\mathrm{ind}_v(C) \in \mathbb{Z}$ を次のように定義する.

Definition

C のパラメータ $c : S^1 \to \mathbb{R}^2$ を $c(0) = x$ となるようにとる. このとき

$$e^{i\theta(t)} = \frac{c(t) - p}{|c(t) - p|}$$

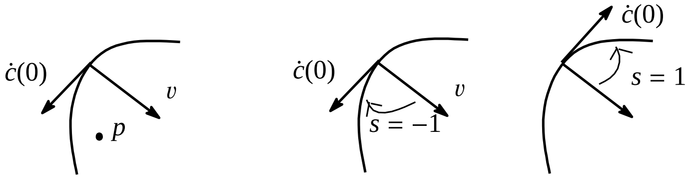
となる連続関数 $\theta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ を選ぶとき

$$\mathrm{ind}_p(c) := \frac{\theta(2\pi) - \theta(0)}{2\pi}$$

このとき

$$\mathrm{ind}_v(C) := s \cdot \mathrm{ind}_p(c)$$

ただし, $s = \pm 1$ は, R から見て曲線が右 (左) に進むとき $+1$ (-1).



$\mathrm{ind}_v(C)$ を**法線指数**とよぶ.

Lemma

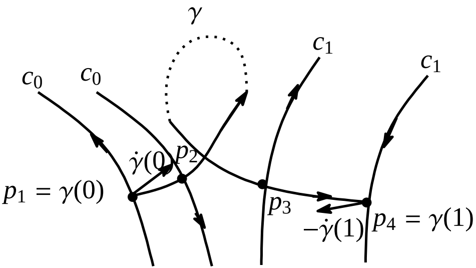
$\mathrm{ind}_v(C)$ はパラメータ c の取り方によらず定まる. 特に $\mathrm{ind}_v(C)$ は C の向きに関係なく定まる.

一般化された連結和における $J^{\pm}$ の加法性

Theorem (S,)

c_0, c_1 : *generic* 閉曲線, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$: c_0 と c_1 を結ぶ橋.
$\gamma(0) \in c_0$, $\gamma(1) \in c_1$, n_γ : γ の 2 重点の個数.
$\dot{c}_0(0), \dot{\gamma}(0)$ のなす角を保ったまま, γ 上に始点があるように平行移動していく. これが γ と c_0 (c_1) との各交点における速度ベクトルになっていない数を, l_0^+ (l_1^+) 個, なっている数を l_0^- (l_1^-) 個とする. このとき

$$J^{\pm}(c_0 +_\gamma c_1) = J^{\pm}(c_0) + J^{\pm}(c_1) - 2T^{\pm}(c_0, c_1) + 2(\mathrm{ind}_{\dot{\gamma}(0)}(c_0) + \mathrm{ind}_{-\dot{\gamma}(1)}(c_1)) \pm 2n_\gamma \pm 2(l_0^{\pm} + l_1^{\pm})$$



証明の準備

Strange sum における $J^{\pm}$ の加法性の公式を与えた.

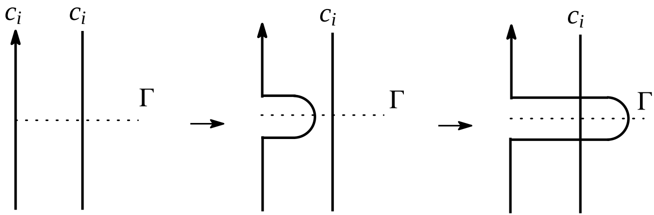
Theorem (S,)

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ に対し, $\Gamma := \gamma([0,1])$ を c_0, c_1 をつなぐ橋とし, その 2 重点の個数を n_Γ とする. このとき

$$J^{\pm}(c_0 +_\Gamma c_1) = J^{\pm}(c_0) + J^{\pm}(c_1) + \mathrm{ind}_{\dot\gamma(0)}(c_0) + \mathrm{ind}_{-\dot\gamma(1)}(c_1) \pm 2n_\Gamma \pm |\mathrm{Int}\Gamma \cap (c_0 \cup c_1)|$$

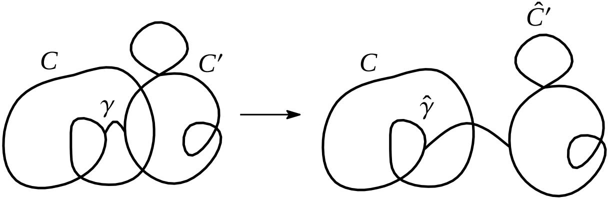
概要

push appendix という操作による $J^{\pm}$ の変化を考える.



これによって $c_0 +_\gamma c_0 = \hat{c}_0 + \hat{c}_1$ となるようにする.

この定理を用いて Mendes de Jesus らの定理の証明が可能.



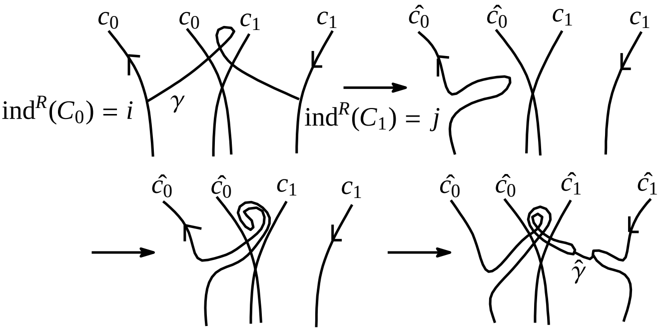
$\hat{C}'$ は C' を $\gamma(1)$ の方に平行移動したもの, 接触はなし.

- $J^{\pm}(C +_{\hat{\gamma}} \hat{C}')$ は先ほどの定理からわかる.
- $J^{\pm}(C +_{\hat{\gamma}} \hat{C}')$ と $J^{\pm}(C +_{\gamma} C')$ の差はだいたい $T^{\pm}(C, C')$.
- γ の端点部分での接触回数が消えるため修正が必要 (法線指数分).

$\Longrightarrow$ 定理に当てはめる.
こちらの証明方法によって, より一般化された

証明概要

橋 γ に沿った以下のような変形を考える.



$c_0 +_\gamma c_1 = \hat{c}_0 +_{\hat{\gamma}} \hat{c}_1$, $J^\pm(\hat{c}_0 +_{\hat{\gamma}} \hat{c}_1)$ は Mendes de Jesus らの定理からわかる.
この変形による, 自身との接触回数, 分離する際の接触回数の変化を考えると

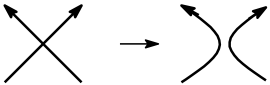
$$J^+(\hat{c}_0) = J^+(c_0) + 2l_0^+ + 2n_\gamma, \quad J^-(\hat{c}_0) = J^-(c_0) + 2l_0^- - 2n_\gamma$$

$$T^+(\hat{c}_0, \hat{c}_1) = T^+(c_0, c_1) - l_1^-, \quad T^-(\hat{c}_0, \hat{c}_1) = T^-(c_0, c_1) + l_1^+.$$

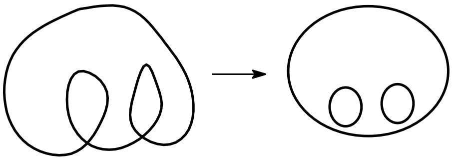
$T^{\pm}$ の計算の準備

Definition

次のように 2 重点を解消する操作を smoothing とよぶ.



Example



smoothing によって閉曲線は単純閉曲線の和集合になる.

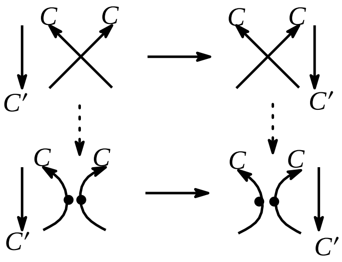
$T^\pm$ の計算の準備

Lemma

C, C' を generic 閉曲線とする. C を *smoothing* して単純閉曲線 C_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) に分解されたとする. このとき

$$T^\pm(C, C') = \sum_{k=1}^{n} T^\pm(C_k, C').$$

考え方



必ず直接又は逆接触が 2 回発生し, ± 1 のペアで発生する.
よって $T^\pm$ を考える際, 単純閉曲線として議論してよい.

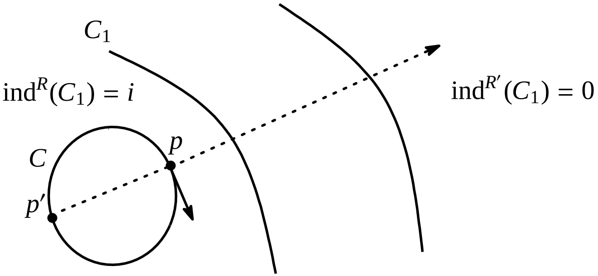
証明の準備

Lemma

C を単純閉曲線, C_1 を generic 閉曲線とする. ある連結成分 $R \subset \mathbb{R}^2 - C_1$ が存在し, $C \subset R$ となっているとする. このとき

$$T^{\pm}(C, C_1) = \mathrm{ind}(C) \cdot \mathrm{ind}^R(C_1)$$

考え方



p から R' の領域まで伸ばした半直線が C_1 を左から右へ l_1 回, 右から左へ l_2 回横切るとすると

$$T^+(C, C_1) = l_2 - l_1,$$
$$T^-(C, C_1) = -l_1 + l_2$$

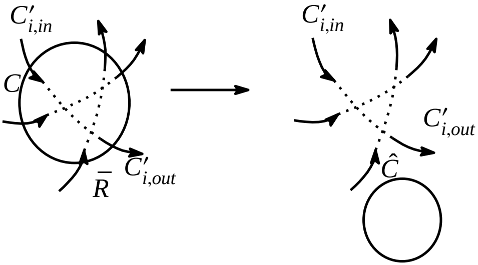
である. また $l_1 - l_2 = i$ より

$$T^{\pm}(C, C_1) = -i = \mathrm{ind}(C) \cdot \mathrm{ind}^R(C_1)$$

Corollary

上の定理は $C \sim K_1$ でない場合でも成り立つ.

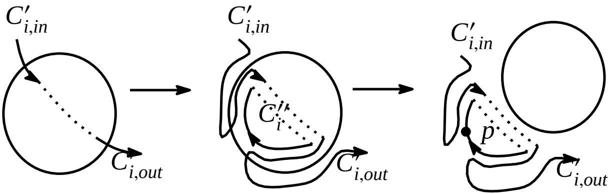
$T^{\pm}$ 計算方法の概要

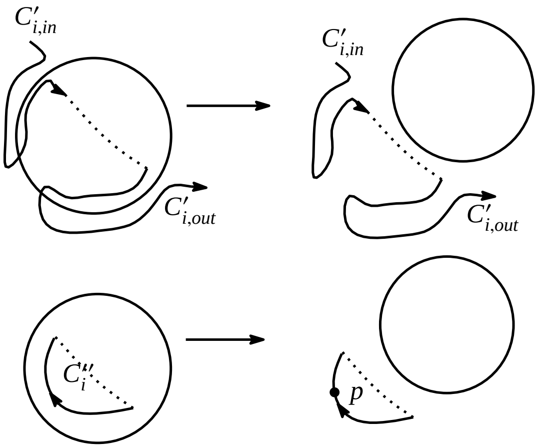


このとき

$$T^{\pm}(C, C') = (*) + \mathrm{ind}(\hat{C}) \cdot \mathrm{ind}^{\bar{R}}(C')$$

となる. $(*)$ について, 以下のような操作を $C'_1, \ldots, C'_m$ に対して行う. その後 C を分離する.





元々の弧を分離するのと C'' を分離するのはだいたい同じ

- C'' の分離の際の接触数：前の補題からわかる
- p での接触の分の誤差を修正

$\Longrightarrow$ 元々の弧を分離する際の接触回数が得られる.

まとめ

Theorem (一般化された連結和における $J^{\pm}$ の加法性)

$$J^{\pm}(c_0+_{\gamma}c_1) = J^{\pm}(c_0)+J^{\pm}(c_1)-2T^{\pm}(c_0,c_1)+2(\mathrm{ind}_{\dot\gamma(0)}(c_0)+\mathrm{ind}_{-\dot\gamma(1)}(c_1))\pm 2n_{\gamma}\pm 2(l_0^{\pm}+l_1^{\pm})$$

Theorem ($T^{\pm}$ の計算方法)

$$T^{\pm}(C,C') = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{m_i}\left(\mathrm{ind}(C''_{i,j})\cdot\mathrm{ind}(C_i)-\varepsilon^{\pm}_{C_i,j}\right)+\mathrm{ind}(C_i)\cdot\mathrm{ind}^{\bar{R}_i}(C')\right).$$

ご清聴ありがとうございました.