On shifted Q polynomials

杉野裕子

広島大学大学院教育学研究科 M1

December 21, 2016

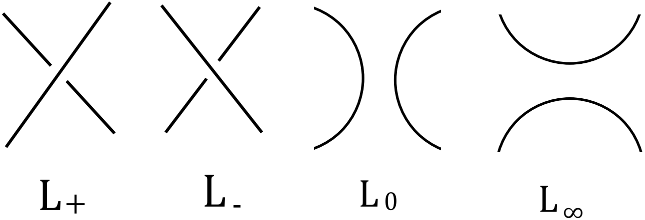
Q 多項式の定義

Definition

絡み目 L に対する Q 多項式 Q_L を以下の (i), (ii) で定義する.

(i) $\mathbb{O}$: 自明結び目 $\Rightarrow Q_{\mathbb{O}} = 1$

(ii) $Q_{L_+} + Q_{L_-} = x(Q_{L_0} + Q_{L_\infty})$



例

- 三葉結び目

$$Q_L(x) = 2x^2 + 2x - 3$$

- 8の字結び目

$$Q_L(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 3$$

注意

Q 多項式は，結び目に対しては負冪の項はなく，通常の多項式である．
μ 成分の絡み目に対しては，$1-\mu$ が最小次数となる．

変数変換

命題

結び目の Q 多項式 $Q(x)$ の最高次の係数が正のとき，
$Q(x+N)$ の全係数が正になるような $N \in \mathbb{N}$ がとれる．

N としてどれくらいの値をとれるか？

- $N = 1$ のとき　ダメ

Example

$P(3,3,3)$ に対して

$$Q(x) = 2x^8 + 8x^7 + 2x^6 - 28x^5 - 24x^4 + 34x^3 + 28x^2 - 18x - 3$$

$$Q(x+1) = 2x^8 + 24x^7 + 114x^6 + 264x^5 + 286x^4 + 90x^3 - 40x^2 - 12x + 1$$

$$\begin{aligned} Q(x+2) = {} & 2x^8 + 40x^7 + 338x^6 + 1564x^5 + 4296x^4 + 7106x^3 + 6856x^2 \\ & + 3510x + 729 \end{aligned}$$

- $N = 2$ のとき　11 交差まで確認済み

予想

予想

結び目に対して，Q 多項式の最高次の係数が正ならば，
x を $x+2$ に変数変換して得られる多項式の全係数はすべて正である．

最高次の係数

予想において Q 多項式の「最高次の係数が正」であることを仮定しているが，Q 多項式の最高次の係数が負になる場合もある．

Example

- 12_{n328} $Q(x) = -2x^7 + 20x^5 + 16x^4 - 28x^3 - 20x^2 + 10x + 5$
- 12_{n426} $Q(x) = -2x^7 - 2x^6 + 16x^5 + 22x^4 - 20x^3 - 30x^2 + 8x + 9$

- 交代的ならば最高次の係数が正であることは Kidwell が証明済み

ずらし Q 多項式

Definition

絡み目 L の Q 多項式 $Q_L(x)$ について，x を $x+2$ に変数変換して得られる多項式 $Q_L^*(x)$ を L のずらし Q 多項式という．

Example

- 三葉結び目
$$Q_L(x) = 2x^2 + 2x - 3$$
$$Q_L^*(x) = 2x^2 + 10x + 9$$
- 8 の字結び目
$$Q_L(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 3$$
$$Q_L^*(x) = 2x^3 + 16x^2 + 38x + 25$$

現時点までの成果

- (2,n) 型のトーラス結び目
- 種数 1 の交代結び目
  種数 1 の 2 橋結び目と種数 1 の交代プレッツェル結び目
- 11 交差までの結び目すべて (801 個)

トーラス結び目

T_n : $(2, n)$ 型のトーラス結び目
$Q(T_n)$: T_n の Q 多項式
T_n^*: T_n のずらし Q 多項式

$$Q(T_{n_+}) + Q(T_{n_-}) = x(Q(T_{n_\infty}) + Q(T_{n_0}))$$
$$Q(T_n) = x(Q(T_{n-1}) + 1) - Q(T_{n-2})$$

ずらし Q 多項式

$$T_n^* = (x+2)(T_{n-1}^* + 1) - T_{n-2}^*$$

T_n^* の x^i の係数を C_n^i とする $(i \geq 0)$.
$i \geq n$ のとき $C_n^i = 0$ (T_n^* は $n-1$ 次).

トーラス結び目

主張

$^\forall n \geq 1$: 奇数， $C_n^i \geq 0$ $(0 \leq i \leq n-1)$ が成り立つ.

トーラス結び目

n に関する帰納法を用いる.

- $n = 1$ のとき
  $T_1^* = 1 \implies C_1^0 = 1$ 　ゆえ成立.
- $n = 2$ のとき
  $T_2^* = 5 + 2x - \dfrac{2}{x+2} \implies C_2^1 = 2,\ C_2^0 = 5$ ゆえ成立.

$C_k^t \quad (1 \leq k \leq n-1,\ 0 \leq t \leq k-1)$ について, $C_k^t \geq 0$ が成り立つと仮定する.

このとき,

$$C_n^{n-1}, \cdots, C_n^0 \geq 0$$

を示せばよい.

トーラス結び目

- C_n^{n-1} $(n \geq 3)$

ずらし Q 多項式

$$T_n^* = (x+2)(T_{n-1}^* + 1) - T_{n-2}^*$$

漸化式より，$C_n^{n-1} = C_{n-1}^{n-2}$ が成り立つ．

$$C_n^{n-1} = \cdots = C_2^1 = 2 \geq 0$$

トーラス結び目

- $C_3^1 = 10 \qquad (T_3^* = 2x^2 + 10x + 9)$
- C_n^{n-2} $(n \geq 4)$

ずらし Q 多項式

$$T_n^* = (x+2)(T_{n-1}^* + 1) - T_{n-2}^*$$

漸化式より，$C_n^{n-2} = C_{n-1}^{n-3} + 2C_{n-1}^{n-2}$ が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}
C_n^{n-2} &= C_{n-1}^{n-3} + 2C_{n-1}^{n-2} \\
&= C_{n-1}^{n-3} + 4 \\
&= (C_{n-2}^{n-4} + 4) + 4 \\
&= \cdots \\
&= (C_3^1 + 4) + 4 + \cdots + 4 \\
&= 10 + 4(n-3) \\
&= 4n - 2 \geq 0
\end{aligned}$$

トーラス結び目

- $C_n^i \ (2 \leq i \leq n-3)$

ずらし Q 多項式

$$T_n^* = (x+2)(T_{n-1}^* + 1) - T_{n-2}^*$$

漸化式より，$C_n^i = C_{n-1}^{i-1} + 2C_{n-1}^i - C_{n-2}^i$ が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}
C_n^i &= C_{n-1}^{i-1} + 2C_{n-1}^i - C_{n-2}^i \\
&= C_{n-1}^{i-1} + 2(C_{n-2}^{i-1} + 2C_{n-2}^i - C_{n-3}^i) - C_{n-2}^i \\
&= C_{n-1}^{i-1} + 2C_{n-2}^{i-1} + 3C_{n-2}^i - 2C_{n-3}^i \\
&= C_{n-1}^{i-1} + 2C_{n-2}^{i-1} + 3(C_{n-3}^{i-1} + 2C_{n-3}^i - C_{n-4}^i) - 2C_{n-3}^i \\
&= C_{n-1}^{i-1} + 2C_{n-2}^{i-1} + 3C_{n-3}^{i-1} + 4C_{n-3}^i - 3C_{n-4}^i \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

トーラス結び目

$$
\begin{aligned}
C_n^i &= C_{n-1}^{i-1} + \cdots + (n-(i+2))C_{i+2}^{i-1} + (n-(i+1))C_{i+2}^{i} \\
&\quad - (n-(i+2))C_{i+1}^{i} \\
&= \sum_{j=1}^{n-i-2} jC_{n-j}^{i-1} + (n-i-1)(4(i+2)-2) - 2(n-i-2) \\
&= \sum_{j=1}^{n-i-2} jC_{n-j}^{i-1} + 4(n-i-1)(n+1) + 2 \geq 0
\end{aligned}
$$

トーラス結び目

- C_n^1
  漸化式より，$C_n^1 = C_{n-1}^0 + 2C_{n-1}^1 + 1 - C_{n-2}^1$ が成り立つ．よって，

$$
\begin{aligned}
C_n^1 &= C_{n-1}^0 + 2C_{n-1}^1 + 1 - C_{n-2}^1 \\
&= C_{n-1}^0 + 1 + 2(C_{n-2}^0 + 2C_{n-2}^1 + 1 - C_{n-3}^1) - C_{n-2}^1 \\
&= (C_{n-1}^0 + 1) + 2(C_{n-2}^0 + 1) + 3C_{n-2}^1 - 2C_{n-3}^1 \\
&= (C_{n-1}^0 + 1) + 2(C_{n-2}^0 + 1) \\
&\quad + 3(C_{n-3}^0 + 2C_{n-3}^1 + 1 - C_{n-4}^1) - 2C_{n-3}^1 \\
&= (C_{n-1}^0 + 1) + 2(C_{n-2}^0 + 1) + 3(C_{n-3}^0 + 1) + 4C_{n-3}^1 - 3C_{n-4}^1 \\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

トーラス結び目

$$
\begin{aligned}
C_n^1 &= ((C_{n-1}^0+1)+\cdots+(n-3)(C_3^0+1))+(n-2)C_3^1-(n-3)C_2^1 \\
&= \sum_{j=1}^{n-3} j(C_{n-j}^0+1)+10(n-2)-2(n-3) \\
&= \sum_{j=1}^{n-3} j(C_{n-j}^0+1)+8n-14 \geq 0
\end{aligned}
$$

トーラス結び目

- C_n^0

ここで，負冪について考える．
漸化式より，T_n^* において

- n が奇数のとき，T_n^* は負冪なし
- n が偶数のとき，$\pm\frac{2}{x+2}$

そこで，C_n^{-1} を以下のように定義する．

$$C_n^{-1} = \begin{cases} 0 & (n : 奇数) \\ -2 & (n \equiv 2 \mod 4) \\ 2 & (n \equiv 0 \mod 4) \end{cases}$$

トーラス結び目

これを用いて以下を示す.

$$C_i^0 > C_{i-1}^0 \ (i \geq 2)$$

n に関する帰納法を用いる．$C_1^0 = 1$，$C_2^0 = 5$ で，$C_2^0 > C_1^0$ が成立.
$C_i^0 > C_{i-1}^0$ が $i \leq n-1$ で成立すると仮定する．漸化式より，

$$\begin{aligned} C_n^0 &= 2C_{n-1}^0 + 2 + C_{n-1}^{-1} - C_{n-2}^0 \\ &\geq 2C_{n-1}^0 - C_{n-2}^0 \\ &= C_{n-1}^0 + (C_{n-1}^0 - C_{n-2}^0) \\ &> C_{n-1}^0 \end{aligned}$$

ゆえに，$C_n^0 > C_{n-1}^0 > \cdots > C_1^0 > 0$ となり示せた.

絡み目の場合

予想

Q 多項式の最高次の係数が正ならば，ずらし Q 多項式は分母の多項式も分子の多項式も全係数が正となる．すなわち

$$Q(x+2) = \frac{g(x)}{f(x)}$$

ここで，$f(x)$，$g(x)$ は正係数多項式

- 実際，$f(x) = (x+2)^n$ となる．

絡み目の場合

Example

ホップ絡み目に対して

$$Q(x) = 2x + 1 - \frac{2}{x}$$

$$Q(x+2) = \frac{2x^2 + 7x + 4}{x+2}$$