一般の閉曲面をファイバーとする2次元ブレイドについて

石地知興

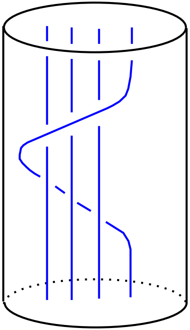
東京工業大学大学院理工学研究科修士 2 年

2016 年 12 月 21 日
結び目の数学 IX

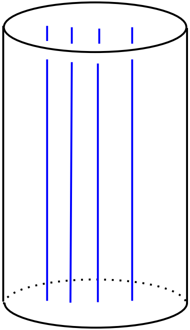
お断り

「一般の閉曲面をファイバーとする 2 次元ブレイドについて」というタイトルで講演を申し込んだ. しかしその後境界を持つコンパクト曲面に関しても同様のことが成立することが分かった. したがって, 講演は後者の内容で行った. 「一般のコンパクト曲面をファイバーとする 2 次元ブレイドについて」や「2 次元ブレイドの一般化」などをタイトルとするのがふさわしい内容である. このスライド以外は全て講演で使用したものである.

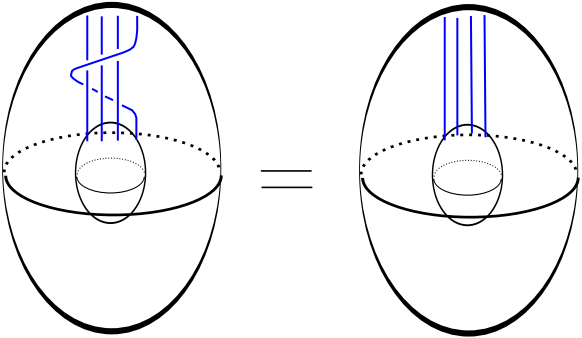
きっかけ



$\neq$



きっかけ



今日の話

1. 非分岐な Σ-2 次元ブレイドがなす群

今日の話

1. 非分岐な Σ-2 次元ブレイドがなす群
2. 2 次元ブレイドとしては同値ではないが,S^2-2 次元ブレイドとしては同値になる例

今日の話

1. 非分岐な Σ-2 次元ブレイドがなす群

2. 2 次元ブレイドとしては同値ではないが,S^2-2 次元ブレイドとしては同値になる例

3. 偶数次数の S^2-2 次元ブレイドの不変量 $\longleftarrow$ Lefschetz fibration から

今日の話

1. 非分岐な Σ-2 次元ブレイドがなす群

2. 2 次元ブレイドとしては同値ではないが,S^2-2 次元ブレイドとしては同値になる例

3. 偶数次数の S^2-2 次元ブレイドの不変量 $\longleftarrow$Lefschetz fibration から

多様体は C^∞ 多様体, 多様体間の写像は C^∞ 級

2次元ブレイド

D_1^2,D_2^2:2 次元円盤,
$pr_2 : D_1^2 \times D_2^2 \longrightarrow D_2^2$:第 2 成分への射影,
$X_m = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\} \subset intD_1^2$.

定義 (2 次元ブレイド)

2 次元ブレイドとは $D_1^2 \times D_2^2$ にプロパーに埋め込まれたコンパクト有向曲面 S で, 次の条件を満たすもの:
(1)$pr_2|_S : S \longrightarrow D_2^2$ は単純分岐被覆.
(2)$\partial S = X_m \times \partial D_2^2$.

Σ-2 次元ブレイド

$\Sigma = \Sigma_g^p (g \geq 0, p \geq 0)$ または　$\Sigma = N_g^p (g \geq 1, p \geq 0)$.
D^2:2 次元円盤
$X_m = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\} \subset int\Sigma$.

定義 (Σ-2 次元ブレイド)

Σ-2 次元ブレイドとは $\Sigma \times D^2$ にプロパーに埋め込まれたコンパクト有向曲面 S で, 次の条件を満たすもの:
(1)$pr_2|_S : S \longrightarrow D^2$ は単純分岐被覆.
(2)$\partial S = X_m \times \partial D^2$.

注意

$\Sigma = \Sigma_0^1 = D^2$ の場合が普通の 2 次元ブレイド.

例
$X_m \times D^2$ は Σ-2 次元ブレイド

Σ-2次元ブレイドの同値関係

S,S':Σ-2 次元ブレイド

定義 (同値)

S と S' が同値 $\Leftrightarrow_{def}$ 次の条件 *(1),(2),(3)* を満たすアンビエントアイソトピー $\{h_u : \Sigma \times D^2 \longrightarrow \Sigma \times D^2\}_{u\in[0,1]}$ が存在する*:*
(1)$h_0 = id_{\Sigma\times D^2}, h_1(S) = S'$*.*
(2)$\{h_u\}_{u\in[0,1]}$ はファイバーを保つ *i.e.*
∃アンビエントアイソトピー $\{\underline{h}_u : D^2 \longrightarrow D^2\}_{u\in[0,1]}$ *s.t.*
$\underline{h}_u \circ pr_2 = pr_2 \circ h_u$*(* $\forall u \in [0, 1]$*).*
(3)$\forall u \in [0, 1]$,$h_u|_{\Sigma\times\partial D^2} = id_{\Sigma\times\partial D^2}$*.*

$[S]$:S の同値類とする

定義 (自明な Σ-2 次元ブレイド)

$X_m \times D^2$ と同値な *Σ-2*次元ブレイドを自明な *Σ-2*次元ブレイドという

Σ-2 次元ブレイドの積

S_1,S_2:Σ-2 次元ブレイド
D^2 をプロパーな弧によって二つの 2-disk に分ける $\rightsquigarrow D^2 = E_1 \cup E_2$.
D^2 と E_1 を微分同相写像 $f_1 : D^2 \longrightarrow E_1$ によって同一視
D^2 と E_2 を微分同相写像 $f_2 : D^2 \longrightarrow E_2$ によって同一視.
$\rightsquigarrow S_1 \subset \Sigma \times E_1$,$S_2 \subset \Sigma \times E_2$.
$\rightsquigarrow$ 曲面 $S_1 \cup S_2$ は Σ-2 次元ブレイド

定義

曲面 $S_1 \cup S_2$ を $S_1 \cdot S_2$ と書き, S_1 と S_2 の積と呼ぶ. $[S_1] \cdot [S_2] = [S_1 \cdot S_2]$ と定義すると *well-defined.*

非分岐 Σ-2 次元ブレイドのなす群

$C_m(int\Sigma)$:$int\Sigma$ の順序のない配置空間

定理 (I.)

次数 m の非分岐 Σ-2 次元ブレイド全体は積に関して群となる．その群は $\pi_2(C_m(int\Sigma), X_m)$ と同型になる．

上の群を $\mathcal{B}_m(\Sigma)$ で表す.

非分岐 Σ-2 次元ブレイドのなす群

系 (I.)

$$\mathcal{B}_m(\Sigma_0) \cong \mathcal{B}_m(S^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (m = 1, 2) \\ \{0\} & (m \geq 3), \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_m(\Sigma_g) \cong \{0\}(\forall m, g \geq 1),$$

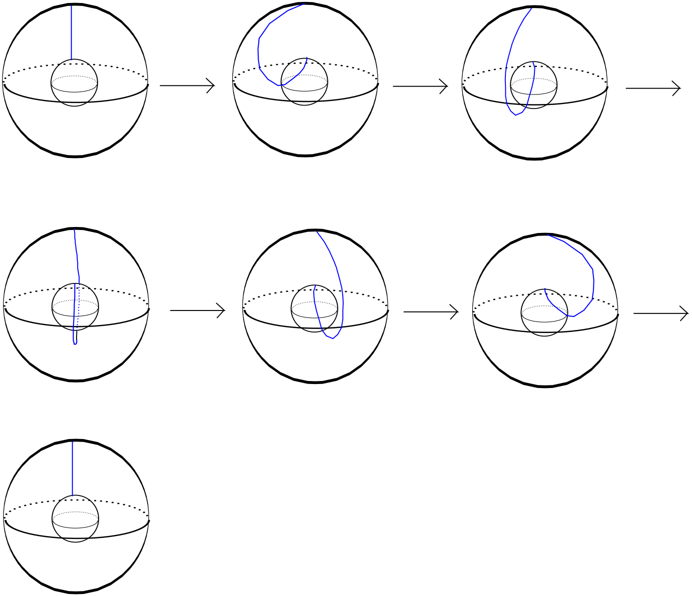
$$\mathcal{B}_m(N_1) \cong \mathcal{B}_m(\mathbb{R}P^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (m = 1) \\ \{0\} & (m \geq 2), \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_m(N_g) \cong \{0\}(\forall g \geq 2, \forall m \geq 1),$$

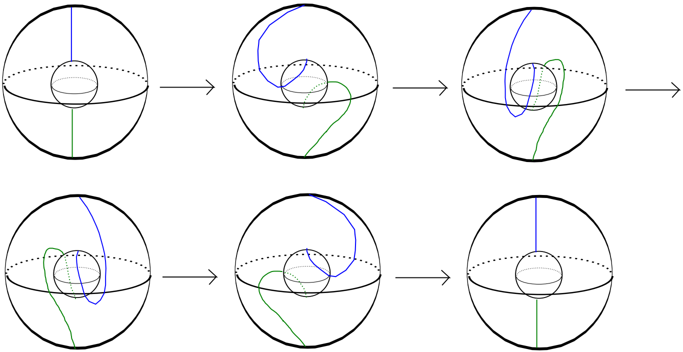
$$\mathcal{B}_m(\Sigma_g^p) \cong \{0\}(\forall m \geq 1, \forall g \geq 0, \forall p \geq 1),$$

$$\mathcal{B}_m(N_g^p) \cong \{0\}(\forall m \geq 1, \forall g \geq 1, \forall p \geq 1).$$

$\mathcal{B}_1(S^2)(\cong \mathbb{Z})$ の生成元



$\mathcal{B}_2(S^2)(\cong \mathbb{Z})$ の生成元



定理 (I. 再掲)

次数 m の非分岐 Σ-2 次元ブレイド全体は積に関して群となる．その群は $\pi_2(C_m(int\Sigma), X_m)$ と同型になる．

証明の概略

次数 m の非分岐 Σ-2 次元ブレイド $S \rightsquigarrow$

$\varphi_S : (D^2, \partial D^2) \longrightarrow (C_m(int\Sigma), X_m) \in \pi_2(C_m(int\Sigma), X_m)$

$(\varphi_s(x) = pr_1(S \cap pr_2^{-1}(x)))$

$[\varphi] \in \pi_2(C_m(int\Sigma), X_m)) \rightsquigarrow$ 次数 m の非分岐 Σ-2 次元ブレイド

$S_\varphi := \bigcup_{x \in D^2} (\varphi(x) \times \{x\})$

S^2-2次元ブレイドのブレイドモノドロミー

S:次数 m の S^2-2次元ブレイド,
$\Delta(S) \subset intD^2$:分岐点集合,
$q_0 \in \partial D^2$:基点,
$\gamma : (I, \{0,1\}) \longrightarrow (D^2 - \Delta(S), q_0)$:q_0 を基点とするループ,
とする.
すると, 次の $C_m(S^2)$ のループ l_γ を考えることができる.

$$l_\gamma : (I, \{0,1\}) \longrightarrow (C_m(S^2), X_m) \quad (l_\gamma(x) = pr_1(S \cap pr_2^{-1}(x))).$$

$\rightsquigarrow$

$$\rho_S : \pi_1(D^2 - \Delta(S), q_0) \longrightarrow \pi_1(C_m(S^2), X_m)(\cong B_m(S^2)) \quad (\rho_S([l]) = [l_\gamma])$$

を考えることができる. ρ_S は well-defined で, 準同型写像となる.

S^2-2次元ブレイドのブレイドモノドロミー

定義

準同型 $\rho_S : \pi_1(D^2 - \Delta(S), q_0) \longrightarrow B_m(S^2)$ を S のブレイドモノドロミーという.

定義 (S^2-2 次元ブレイドチャート)

次数 $m \geq 3$ の S^2-2 次元ブレイドチャートとは有限グラフ $\Gamma \subset intD^2$ で次の条件を満たすもの:

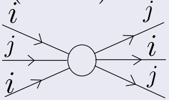
(1) 全ての辺は向きづけられ, 整数 $\{1, 2, \cdots, m-1\}$ でラベルづけされている.

(2)1 価,*4* 価,*6* 価,$2(m-1)$ 価の頂点がある. *1* 価頂点を黒頂点という. *6* 価頂点と $2(m-1)$ 価頂点を白頂点という.

(3) 各 *6* 価頂点は図のようである.*(*$|i-j|=1$*)*

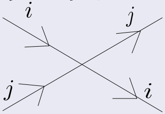
(4) 各 *4* 価頂点は図のようである.*(*$|i-j|>1$*)*

(5) 各 $2(m-1)$ 価頂点は図のようである



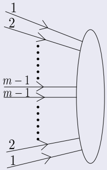
$|i-j|=1$

(1)6 価頂点



$|i-j|>1$

(2)4 価頂点



(3)$2(m-1)$ 価頂点

S^2-2次元ブレイドチャートのブレイドモノドロミー

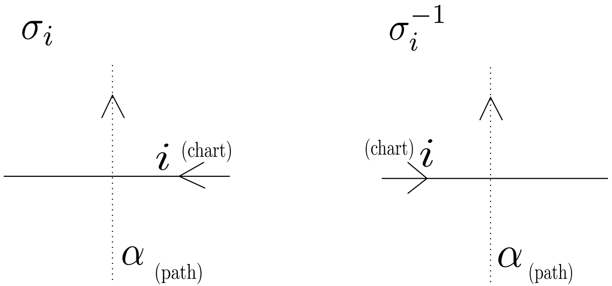
次数 $m \geq 3$ の S^2-2次元ブレイドチャート $\Gamma \rightsquigarrow$ ブレイドモノドロミー ρ_Γ.

定義

曲線 $\alpha : [0,1] \longrightarrow D^2$ が Γ に関して一般の位置にある $\Leftrightarrow_{def}$
(1) $\alpha([0,1]) \cap V(\Gamma) = \phi$. ただし $V(\Gamma)$ は Γ の頂点集合.
(2) $\alpha^{-1}(\Gamma) = \{t_1, \cdots, t_s\} \subset int[0,1]$. ただし $\alpha^{-1}(\Gamma) = \phi$ も認める.
(3) $\forall j \in \{1, \cdots, s\}$, $\exists t_j$ の開近傍 $U(t_j)$ s.t. $\alpha|_{U(t_j)}$ ははめ込みかつ, Γ の辺と $\alpha(t_j)$ にて横断的に交わる.

$\alpha : [0,1] \longrightarrow D^2$ が Γ に関して一般の位置にあるとき, 交叉語 $w_\Gamma(\alpha)$ を次のように定義できる.

S^2-2次元ブレイドチャートのブレイドモノドロミー



これを Γ に関する α の交叉語という. $w_\Gamma(\alpha)$ で表す. $\Delta(\Gamma)$:黒頂点集合.
$l : [0,1] \longrightarrow (D^2 - \Delta(\Gamma), q_0)$:$\Gamma$ に関して一般の位置にあるループ.

定義

準同型写像 $\rho_\Gamma : \pi_1(D^2 - \Delta(\Gamma), q_0) \longrightarrow B_m(S^2)$ $(\rho_\Gamma([l]) = w_\Gamma(l))$ を S^2-2次元ブレイドチャート Γ のブレイドモノドロミーという.

S^2-2次元ブレイドとチャート

定理 (I.)

任意の次数3以上の S^2-2次元ブレイド S に対して,S^2-2次元ブレイドチャート Γ が存在して $\rho_\Gamma = \rho_S$ となる. 逆に任意の S^2-2次元ブレイドチャート Γ に対して,S^2-2次元ブレイド S が存在して,$\rho_S = \rho_\Gamma$ となる.

S^2-2次元ブレイドチャート Γ により定まる S^2-2次元ブレイドを $S(\Gamma)$ で表す.

2次元ブレイドと S^2-2次元ブレイド

定義 (2次元ブレイドチャート)

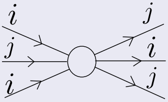
次数 m の 2次元ブレイドチャートとは有限グラフ $\Gamma \subset intD^2$ で次の条件を満たすもの:

(1) 全ての辺は向きづけられ, 整数 $\{1, 2, \cdots, m-1\}$ でラベルづけされている.

(2)1 価,*4* 価,*6* 価の頂点がある. *1* 価頂点を黒頂点という. *6* 価頂点を白頂点という.

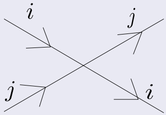
(3) 各 *6* 価頂点は図のようである.$(|i-j|=1)$

(4) 各 *4* 価頂点は図のようである.$(|i-j|>1)$



$|i-j|=1$

(1)6 価頂点



$|i-j|>1$

(2)4 価頂点

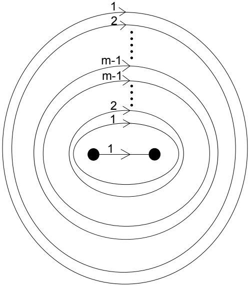
2 次元ブレイドと S^2-2 次元ブレイド

注意

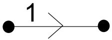
2 次元ブレイドチャートに関してもそのブレイドモノドロミーが S^2-2 次元ブレイドチャートの場合とまったく同様に定義される．定理も同様に成立する．

2次元ブレイドと S^2-2次元ブレイド

チャート Γ_1, Γ_2 を考える.$(m \geq 3)$.



(1)Γ_1



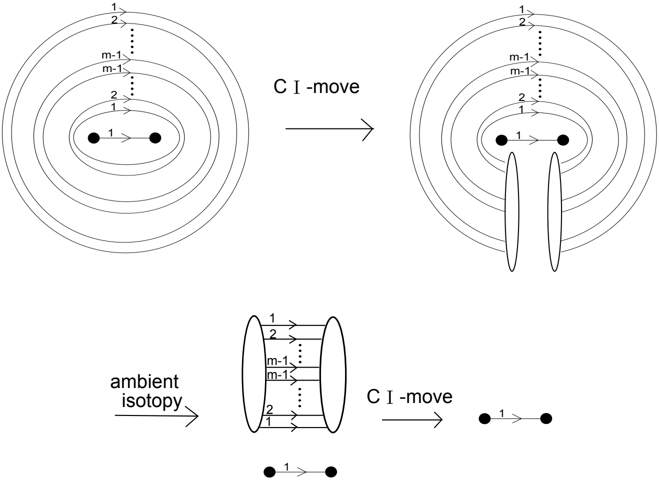
(2)Γ_2

定理 (I.)

$S(\Gamma_1)$ と $S(\Gamma_2)$ は2次元ブレイドとしては同値ではないが,S^2-2次元ブレイドとしては同値になる.

証明の概略

$(S(\Gamma_1)$ と $S(\Gamma_2)$ が S^2-2 次元ブレイドとして同値であること$)$
次のチャートムーブとアンビエントアイソトピーによる.



Lefschetz fibration との結びつき

Σ_g:種数 g の有向閉曲面.

定義 (Lefschetz fibration)

M:コンパクト有向 4 次元多様体
B:コンパクト有向 2 次元多様体とする.
全射 $f : M \longrightarrow B$ が Lefschetz fibration$\Leftrightarrow_{def}$
(1)$f^{-1}(\partial B) = \partial M$,
(2)f の任意の臨界点 $p \in intM$ に対して,p の座標近傍 (U, φ) と $f(p)$ の座標近傍 (V, ψ) が存在して $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$ となる.
(3) どのファイバーも (± 1) 球面を含まない.
M を全空間,B を底空間,f を射影という.

注意

ここでは achiral Lefschetz fibration を単に Lefschetz fibration と呼んでいる.

Lefschetz fibration との結びつき

$\mathcal{M}_g$:Σ_g の写像類群
Δ:f の臨界値集合$\rightsquigarrow f|_{f^{-1}(B-\Delta)} : f^{-1}(B-\Delta) \longrightarrow B-\Delta$ はファイバー束
$\rightsquigarrow$ 基点 $b_0 \in B-\Delta$ と向きを保つ微分同相写像 $\Phi_0 : \Sigma_g \longrightarrow f^{-1}(b_0)$ をとるとモノドロミー表現 $\rho_f : \pi_1(B-\Delta, b_0) \longrightarrow \mathcal{M}_g$ を考えることができる.

定義 (Lefschetz fibration のモノドロミー表現)

$\rho_f : \pi_1(B-\Delta, b_0) \longrightarrow \mathcal{M}_g$ を Φ_0 に関する f のモノドロミー表現という.

定義 (Lefschetz fibration の同型)

$f : M \longrightarrow B$,$f' : M' \longrightarrow B'$ を *Lefschetz fibration* とする.f と f' が同型 *(isomorphic)* であるとは, 向きを保つ微分同相写像
$H : M \longrightarrow M'$,$h : B \longrightarrow B'$ が存在して,$f' \circ H = h \circ f$ となるときにいう.

Lefschetz fibration との結びつき

補題

次数が偶数の S^2-2 次元ブレイド S に対して S 上分岐する 2 重分岐被覆 $\alpha : M \longrightarrow S^2 \times D^2$ が存在する. ただしここで M は 4 次元多様体である. さらに,M は微分同相の差を除いて一意である.

命題

$pr_2 \circ \alpha : M \longrightarrow D^2$ は種数 $m-1$ の *Lefschetz fibration* である.

Lefschetz fibration との結びつき

補題 (I.)

S_1 と S_2 を次数 $2m \geq 6$ の S^2-2次元ブレイドとする．$f_1 : M_1 \longrightarrow D^2$, $f_2 : M_2 \longrightarrow D^2$ をそれぞれ S_1,S_2 から定理のようにして定まる *Lefschetz fibration* とする．もしも S_1 と S_2 が同値であるならば, f_1 と f_2 は同型になる．

$\iota \in \mathcal{M}_{m-1}$:hyperelliptic involution

補題 (I.)

S を次数 $2m \geq 3$ の S^2-2次元ブレイドとする．Γ を S のチャート表示とする．$f : M \longrightarrow D^2$ を S に対して定まる *Lefschetz fibration* とする．ρ_f を f のモノドロミー表現とする．このとき,Γ が持つ $2(2m-1)$ 価頂点の個数が偶数ならば $\rho_f(\partial D^2) = [id]$ となり，奇数ならば $\rho_f(\partial D^2) = \iota$ となる．

Lefschetz fibration との結びつき

定理 (I.)

S_1,S_2 を次数 $2m \geq 6$ の S^2-2 次元ブレイドとする.Γ_1,Γ_2 を S_1,S_2 のチャート表示とする. もしも S_1 と S_2 が同値であるならば,Γ_1 と Γ_2 がもつ $2(2m-1)$ 価頂点の個数の偶奇は等しい.

Proof.

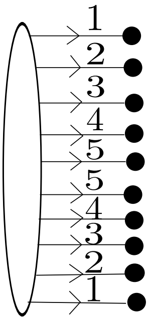
S_1 と S_2 が同値であるとする. このとき S_1,S_2 から定まる Lefschetz fibration f_1,f_2 は同型である. もし,Γ_1 と Γ_2 がもつ $2(2m-1)$ 価頂点の偶奇が異なるとすると,(Γ_1 : 偶数, Γ_2 : 奇数とする.)
$\rho_{f_1}(\partial D^2) = [id]$,$\rho_{f_2}(\partial D^2) = \iota$ である. これは f_1 と f_2 が同型であることに矛盾している.

□

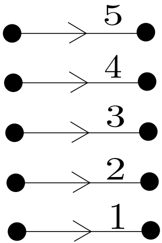
これはすなわち $2(2m-1)$ 価頂点の個数の偶奇が S^2-2 次元ブレイドの不変量になっていることを意味している.

例

次数 6 の S^2-2 次元ブレイドチャート Γ_1 と Γ_2



Γ_1



Γ_2

に対して $S(\Gamma_1)$ と $S(\Gamma_2)$.

ご静聴ありがとうございました。