ザイフェルト手術への古典的不変量の応用

(門上－円山－酒井)

1.T.Kadokami,Reidemeister torsion of Seifert fibered homology lens spaces and Dehn surgery,Algebr.Geom.Topol.,(2007),1509-1529

2. T.Kadokami,N.Maruyama and T.Sakai, Seifert surgery on knots via Reidemeister torsion and Casson-Walker-Lescop invariant,Top. And Appl.,188(2015).64-73

3. T.Kadokami,N.Maruyama and T.Sakai, Seifert surgery on knots via Reidemeister torsion and Casson-Walker-Lescop invariant II,OsakaJM(2016)

Σ : $\mathbb{Z}HS$ (integral homology 3-sphere).

$K \subset \Sigma$: a knot in Σ.

$\Delta_K(t)$: Alexander poly. of K.

$p, q \in \mathbb{Z}$, $\gcd(p, q) = 1$, $p \geq 2$.

$\Sigma(K : p/q)$: the result of p/q-surgery on K.

Seifert surgery

$\Sigma(K : p/q)$ が SFS (Seifert fiber space)

のとき.

Def. of $|X|_d$

X : HLS (Homology Lens Sp.)

$H_1(X) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ とする.

$\Leftrightarrow \exists \Sigma \ \exists K \ \exists q$ s.t. $X = \Sigma(K : p/q)$

そこで p の約数 d に対して;

$$|X|_d = \Big|\prod_{i \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times} \Delta_K(\zeta_d^i)\Big| \quad : X \text{ の } d\text{-norm}$$

$$\|X\|_d = \prod_{d' | d} |X|_{d'} \quad : X \text{ の } d\text{-order}$$

と定める. ζ_d : primitive d-th root of 1

論文1の結果の1つ

定理1 Σ : $\mathbb{Z}HS$, $K \subset \Sigma$: knot $p \geq 2$, $(p, q) = 1$.

Assume that $\Delta_K(t) = t^2 - 3t + 1$.

If $M = \Sigma(K : p/q)$ is a SFS / S^2 and

the number of singular fibers $N \geq 3$,

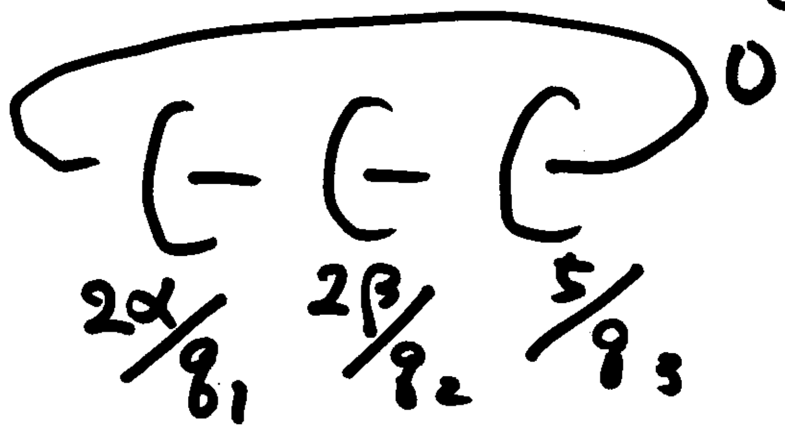
then (1), (2) and (3) hold:

(1) $p = 2$ or 3.

(2) $N = 3$

(3) • $p = 2$

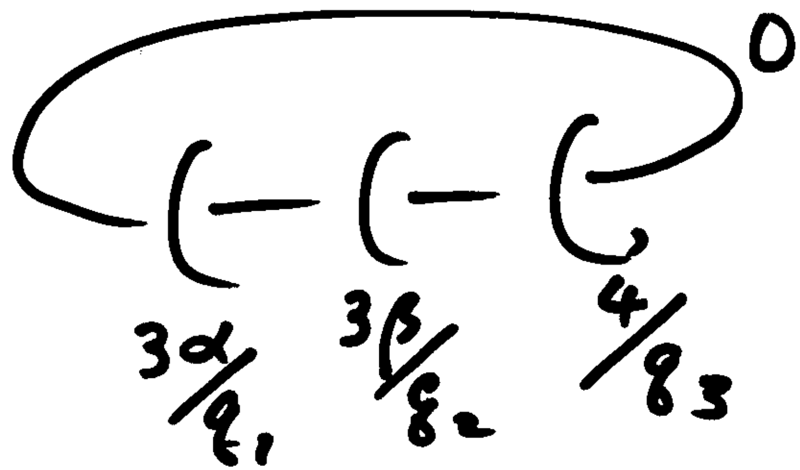
$\Rightarrow M = \Sigma(k : 2/q) =$



$\gcd(\alpha, \beta) = 1$,

• $p = 3$

$\Rightarrow M = \Sigma(k : 3/q) =$



$\gcd(\alpha, \beta) = 1$,

Two Problems on Seifert surgery ⑤

Conj A Seifert surgeries on Knots are integral except some cases.

Conj B In many cases, $N = 3$.

(N: the # of singular fibers of the resultant SFS.)

[☆ 定理1 は Conj.B に対して部分解を与えている. この方向で, 定理1 の拡張を試みるのはどうか.].

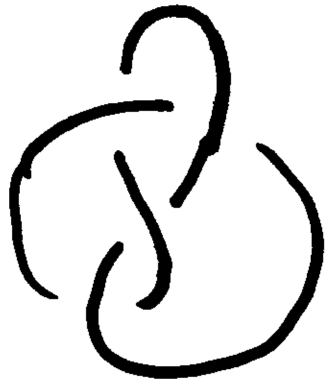
共同研究のスタート

定理1 の $2/8$- あるいは $3/8$- surgeryの場合
の integrality について，
古典的不変量 [R-torsion, CWL-inv]
を使って，もっと何かいえないだろうか

ということで，次のことをとりあえずの
基準にしてスタートした：

— とりあえずの基準 —

その方法によって、もともとの8の字 knot,

$K =$  $\subset S^3$

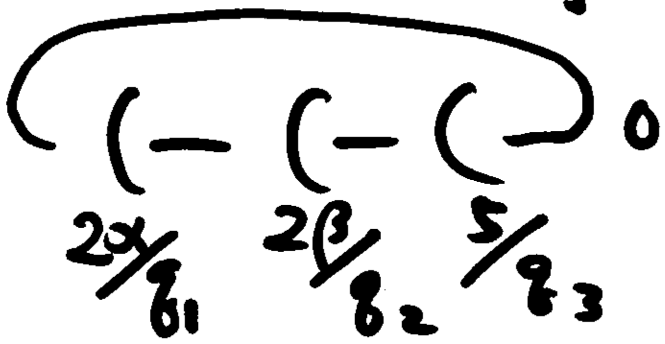
の場合について、$2/q$-surgery の integrality.

つまり、$2/q$-surgery が Seifert surgery

であるのは $q = \pm 1$ に限ることが

示せること。

最初の手がかり [$\Delta_K(t) = t^2 - 3t + 1$]

(1) $M_q = \Sigma(K : 2/q) =$ 

として以下のようにおく：

Σ_2 : the double branched cover of Σ branched along K

$\tilde{K}$: the lifted knot of K in Σ_2

X_q : the universal abelian cover of M_q

$\Rightarrow X_q = \Sigma_2(\tilde{K} : 1/q)$, $H_1(X_q) \cong H_1(\Sigma_2) \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

[$\because$ $\tilde{K} \sim 0$ in Σ_2, $|\Delta_K(-1)| = 5$] $\Rightarrow X_q$ is defined.

$H_1(M_g) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \Rightarrow X_g$: 2-fold cover

・以下 g を省いて M, X とかいたり [$|X|_5$] します.

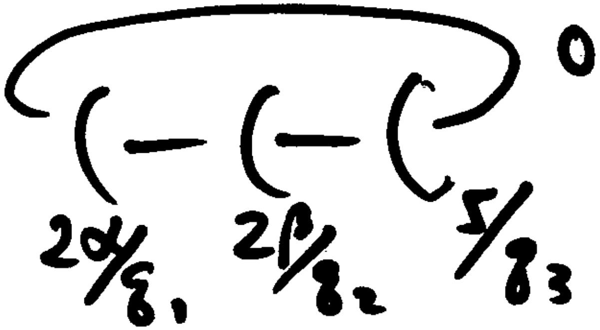
・$|X_g|_5$: g の function

に注意.

$$\begin{tikzcd}
\bar{K} \subset \Sigma_2 \arrow[r, squiggly, "1/q"] \arrow[d, "2\text{-fold}"'] & X_q = \Sigma_2(\bar{K} : 1/q) \arrow[d, "2\text{-fold}"] \\
K \subset \Sigma \arrow[r, squiggly, "2/q"] & M_q = \Sigma(K : 2/q)
\end{tikzcd}$$

- $H_1(M_q) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\bar{K} \sim 0$ in Σ_2
- $H_1(X_q) \cong H_1(\Sigma_2) \underset{\uparrow}{\cong} \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

[$\Delta_K(t) = t^2 - 3t + 1 \Rightarrow |\Delta_K(-1)| = 5$.]

(2) $M =$ 

より

X の singular fiber のタイプは
$\{\alpha, \beta, 5, 5\}$

$\Rightarrow \boxed{|X|_5 = (\alpha\beta)^4}$

[論文1 の Th 1.2 の公式を使う]

(3) $\boxed{K = 8\text{の字のとき } |X|_5 = (5\delta^2-1)^2}$

$\Rightarrow 5\delta^2-1 = (\alpha\beta)^2$ [ペル方程式].

↓ 5年ほど経過.

論文2の結果

定理2 λ : Lescop inv.

(1) $\lambda(\Sigma)=0$ (2) $\Delta_K(t)=t^2-3t+1$ (3) $|8|\geq 3$

(4) $\sqrt{|X|_5} \geq 4\{\lambda(X)\}^2-1$

$\Rightarrow M=\Sigma(K;{}^{2}/_{8})$ is not a SFS.

論文3: 定理3:

定理2において, (4)を次の(4′)におきかえる:

(4′) $|X|_5 > 16\,8^4$.

$\Rightarrow M$: not SFS.

定理2と3のちがい:

Th.2. では $\lambda(X)$ を使う. それは、次の不等式で評価する.

$$|A(g,p)| \le \frac{(p-1)(p-2)}{12p} \quad \text{[Beyer-Lines]}$$

Th 3 では $\lambda(M)$ を使う. それ

$$|A(g,p)| < \frac{(p-1)(p-5)}{24p} \quad [\text{円山}]$$

(ただし, $3 \le g \le p-3$)

で評価する. 12 と 24 で大きく(?)ちがう.

⑭ 論文 1, 2, 3 につづく研究の可能性

提案: $|X|_5$ を結び目の不変量として研究すること.

<u>理由</u>: (1) $|X|_5$ は $H_1(\tilde{X})$ の位数である.

ただし, $\tilde{X}$ は X の universal abelian cover.

(2) 8の字のときの $|X|_5$ $(=(58^2-1)^2)$ を計算するやり方.

[<u>論文</u> 2 をみて下さい.]

15 問題例

1. $|X|_S$ は S-同値の不変量か？
2. $|X|_S = 0$, つまり $H_1(\tilde{X})$ が無限群となるような K (と g) の例は？
3. $|X|_S = |X_g|_S$: g の関数.
   - $|X|_S$ が g にかかわらず一定であるような K の例.
4. K が strongly invertible knot であるとき？
5. 他の inv. との関係.