

# $\pi_1(\Sigma_2 K)$ 固有の $SL(2, \mathbb{C})$ -表現と $N_g$ 予想の反例について

鈴木心之助

名城大学大学院 理工学研究科 修士1年

長郷文和氏 (名城大学) との共同研究

2016年12月23日  
結び目の数学 IX@日本大学

# Motivation

- $K \subset \mathbb{S}^3$  を結び目,  $E_K$  をその外部空間とする.
- $\Sigma_2 K$  :  $K$  に沿って分岐する  $\mathbb{S}^3$  の 2 重分岐被覆



Q.  $X(\Sigma_2 K)$  の元はすべて  $S_0(K)$  から構成できるか？

A. [Nagasato-Yamaguchi]

$K$  が 2-bridge knot 又は pretzel knot のときはすべて構成できる.

⇒ 他の結び目ではどうか？ <sup>副産物</sup>  $\implies$  Ng 予想の反例.

(F. Nagasato and Y. Yamaguchi : *On the geometry of the slice of trace-free*  
 *$SL_2(\mathbb{C})$ -characters of a knot group*, Math. Ann. **354**, 967-1002 (2012).)

# General settings

$p : C_2K \rightarrow E_K$  を  $E_K$  の 2 重巡回被覆 (写像) とすると,  $p$  は単射準同形

$$p_* : \pi_1(C_2K) \rightarrow \pi_1(E_K)$$

を誘導する. よって,  $\pi_1(C_2K) \cong \text{Im}(p_*)$  である.

$\pi_1(\Sigma_2K)$  は,  $\pi_1(C_2K)$  に分岐関係式  $\mu_2 = 1$  を加えることによって得られる (ただし,  $\mu_2$  は  $C_2K$  のメリディアン). よって,  $\pi_1(E_K) = \langle m_1, \dots, m_n \mid r_1, \dots, r_{n-1} \rangle$  と表されるとき,

$$\begin{aligned} \pi_1(\Sigma_2K) &\cong \text{Im}(p_*) \text{ に関係式 } p_*(\mu_2) = 1 \text{ を加えたもの.} \\ &= \text{Im}(p_*) \text{ に関係式 } m_i^2 = 1 \text{ を加えたもの } (1 \leq i \leq n). \\ &\stackrel{[\text{Fox}]}{=} \langle m_1 m_i \ (2 \leq i \leq n) \mid \text{some relations} \rangle. \end{aligned}$$

(R. Fox: *Free Differential Calculus III, Subgroup*, Ann. of Math. **64** (1956).)

# General settings

- $\rho : \pi_1(\Sigma_2 K) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  を表現とするとき,

$$\begin{array}{ccc} \chi_\rho : \pi_1(\Sigma_2 K) & \rightarrow & \mathbb{C}, & \rho \text{ の character (指標)} \\ \cup & & \cup & \\ g & \mapsto & \mathrm{tr}(\rho(g)) & \end{array}$$

- $X(\Sigma_2 K) := \{\chi_\rho \mid \rho : \pi_1(\Sigma_2 K) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\}$

このとき,  $X(\Sigma_2 K)$  の元である指標  $\chi_\rho$  から  $\mathbb{C}^N$  の点に 1 対 1 の対応が以下のように実現できることが知られている

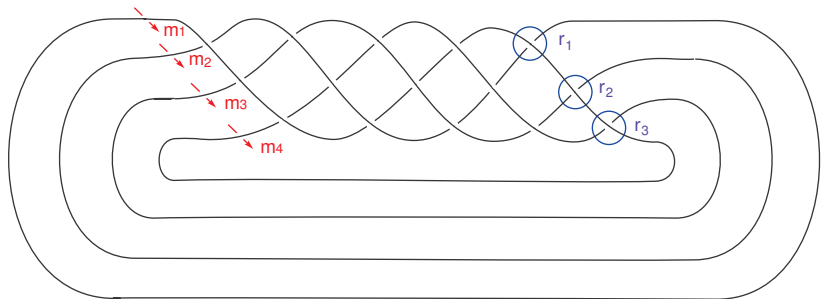
(**[Culler-Shalen]**, **[González=Acuña-Montesinos]**).

$$\begin{array}{ccc} t : X(\Sigma_2 K) & \rightarrow & \mathbb{C}^N & (1 < a \leq n) \\ \cup & & \cup & (1 < b < c \leq n) \\ \chi_\rho & \mapsto & (y_{1a}; y_{1b1c}; y_{1d1e1f}) & (1 < d < e < f \leq n) \end{array}$$

$$y_{1a} = \mathrm{tr}(\rho(m_1 m_a)), \quad y_{1b1c} = \mathrm{tr}(\rho(m_1 m_b m_1 m_c)), \quad y_{1d1e1f} = \mathrm{tr}(\rho(m_1 m_d m_1 m_e m_1 m_f))$$

- (M. Culler and P. Shalen : *Varieties of group representations and splitting of 3-manifolds*,  
Math. **117**, 109-146(1983)  
F. González-Acuña and J. M. Montesinos : *On the character variety  
of group representations in  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  and  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$* , Math. Z., **214** (1993), 627-652 )

# (4,5)-torus knot $T_{4,5}$



$$\pi_1(E_{T_{4,5}}) = \langle m_1, m_2, m_3, m_4 \mid r_1 = 1, r_2 = 1, r_3 = 1 \rangle,$$

where

$$r_1 = m_4 m_1 m_2 m_3 m_4 m_2 m_4^{-1} m_3^{-1} m_2^{-1} m_1^{-1} m_4^{-1} m_1^{-1},$$

$$r_2 = m_4 m_1 m_2 m_3 m_4 m_3 m_4^{-1} m_3^{-1} m_2^{-1} m_1^{-1} m_4^{-1} m_2^{-1},$$

$$r_3 = m_4 m_1 m_2 m_3 m_4 m_3^{-1} m_2^{-1} m_1^{-1} m_4^{-1} m_3^{-1}.$$

次に Fox の結果を用いて  $\pi_1(C_2 T_{4,5})$  を計算する。

## Theorem of R. Fox (cf. Kinoshita : 位相幾何学入門 (培風館))

初めに, 以下の剰余類分解を考える.

$$\pi_1(E_K) = \text{Im}(p_*) \cup \text{Im}(p_*)m_1,$$

このとき,  $m_1$  は  $K$  のメリディアンである.

- $S := \{1, m_1\}$  : 剰余類の代表元の集合
- $s_1 := 1, s_2 := m_1$ .
- $\phi : \pi_1(E_K) \rightarrow S, \begin{cases} \phi(g) := 1, & \text{if } g \in \text{Im}(p_*) \\ \phi(g) := m_1, & \text{if } g \in \text{Im}(p_*)m_1 \end{cases}$

### Theorem 1 (R. Fox (1956) cf. Kinoshita)

$$\text{Im}(p_*) = \langle s_i g_j \phi(s_i g_j)^{-1} (i = 1, 2, 1 \leq j \leq m) \mid s_i r_k s_i^{-1} (i = 1, 2, 1 \leq k \leq n) \rangle$$

上記を用いて,  $\pi_1(C_2 T_{4,5})$  を計算する.

(R. Fox: *Free Differential Calculus III, Subgroup*, Ann. of Math. **64** (1956).)

# The generators and the relations of $\pi_1(C_2 T_{4,5})$

$s_1 = 1, s_2 = m_1$  より,  $\text{Im}(p_*)$  の生成元は以下のように表される.

$$\begin{aligned} (x_1 = 1), \quad x_2 = m_1^2, \quad y_1 := m_2 m_1^{-1}, \quad y_2 := m_1 m_2, \\ z_1 := m_3 m_1^{-1}, \quad z_2 := m_1 m_3, \quad w_1 := m_4 m_1^{-1}, \quad w_2 := m_1 m_4. \end{aligned}$$

$\text{Im}(p_*)$  の関係式  $s_i r_j s_i^{-1}$  は, 以下の通りである:

$$s_1 r_1 s_1^{-1} = \boxed{m_4 m_1 m_2 m_3 m_4 m_2 m_4^{-1} m_3^{-1} m_2^{-1} m_1^{-1} m_4^{-1} m_1^{-1}} = 1,$$

$$s_1 r_2 s_1^{-1} = \boxed{m_4 m_1 m_2 m_3 m_4 m_3 m_4^{-1} m_3^{-1} m_2^{-1} m_1^{-1} m_4^{-1} m_2^{-1}} = 1,$$

$$s_1 r_3 s_1^{-1} = \boxed{m_4 m_1 m_2 m_3 m_4 m_3^{-1} m_2^{-1} m_1^{-1} m_4^{-1} m_3^{-1}} = 1,$$

$$s_2 r_1 s_2^{-1} = \boxed{m_1 m_4 m_1 m_2 m_3 m_4 m_2 m_4^{-1} m_3^{-1} m_2^{-1} m_1^{-1} m_4^{-1} m_1^{-1} m_1^{-1}} = 1,$$

$$s_2 r_2 s_2^{-1} = \boxed{m_1 m_4 m_1 m_2 m_3 m_4 m_3 m_4^{-1} m_3^{-1} m_2^{-1} m_1^{-1} m_4^{-1} m_2^{-1} m_1^{-1}} = 1,$$

$$s_2 r_3 s_2^{-1} = \boxed{m_1 m_4 m_1 m_2 m_3 m_4 m_3^{-1} m_2^{-1} m_1^{-1} m_4^{-1} m_3^{-1} m_1^{-1}} = 1.$$

# The generators and the relations of $\pi_1(\Sigma_2 T_{4,5})$

$\pi_1(\Sigma_2 T_{4,5})$  の表示を, 以下を  $\pi_1(C_2 T_{4,5})$  に加えることにより与える :

$$x_1 x_2 = 1, y_1 y_2 = 1, z_1 z_2 = 1, w_1 w_2 = 1 \text{ (分岐関係式).}$$

よって,  $\pi_1(\Sigma_2 T_{4,5})$  の表示は以下のようになる:

$$\pi_1(\Sigma_2 T_{4,5}) = \langle y_2 (= m_1 m_2), z_2 (= m_1 m_3), w_2 (= m_1 m_4) \mid \omega_i \ (1 \leq i \leq 6) \rangle$$

$$\omega_1 = w_2^{-1} y_2^{-1} z_2 w_2^{-1} y_2 w_2^{-1} z_2 y_2^{-1} w_2^{-1},$$

$$\omega_2 = w_2^{-1} y_2^{-1} z_2 w_2^{-1} z_2 w_2^{-1} z_2 y_2^{-1} w_2^{-1} y_2,$$

$$\omega_3 = w_2^{-1} y_2^{-1} z_2 w_2^{-1} z_2 y_2^{-1} w_2^{-1} z_2,$$

$$\omega_4 = w_2 y_2 z_2^{-1} w_2 y_2^{-1} w_2 z_2^{-1} y_2 w_2,$$

$$\omega_5 = w_2 y_2 z_2^{-1} w_2 z_2^{-1} w_2 z_2^{-1} y_2 w_2 y_2^{-1},$$

$$\omega_6 = w_2 y_2 z_2^{-1} w_2 z_2^{-1} y_2 w_2 z_2^{-1}.$$



# An element $\chi_{\rho_1}$ of $X(\Sigma_2 T_{4,5})$

以下のように定めると、表現  $\rho_1 : \pi_1(\Sigma_2 T_{4,5}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  が構成できる。

**Example 1 :**

$$\rho_1(m_1 m_2) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2}{3}\pi i} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2}{3}\pi i} \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{tr}(\rho(m_1 m_2)) = -1$$

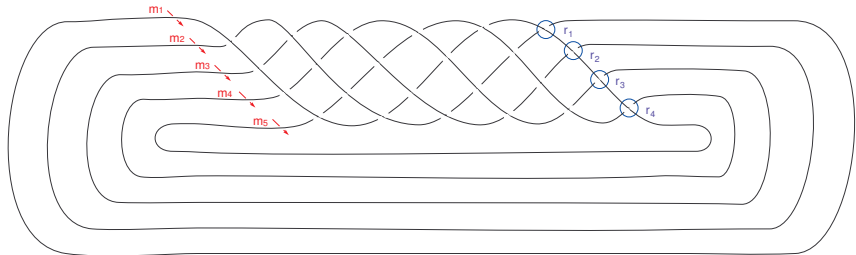
$$\rho_1(m_1 m_3) = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{3}} e^{\frac{\pi}{3}i} & -\frac{2}{3} \\ 1 & \frac{i}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\pi}{3}i} \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{tr}(\rho(m_1 m_3)) = 1$$

$$\rho_1(m_1 m_4) = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{3}} e^{\frac{\pi}{3}i} & \frac{1}{3}(1 + 2\beta) \\ \beta & -\frac{i}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\pi}{3}i} \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{tr}(\rho(m_1 m_4)) = -1$$

$$\text{where } \beta = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{4}.$$

このとき、 $\chi_{\rho_1} \in X(\Sigma_2 T_{4,5})$  となる。

# (5,6)-torus knot $T_{5,6}$



$$\pi_1(E_{T_{5,6}}) = \langle m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 \mid r_1 = 1, r_2 = 1, r_3 = 1, r_4 = 1 \rangle,$$

where

$$r_1 = m_5 m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 m_2 m_5^{-1} m_4^{-1} m_3^{-1} m_2^{-1} m_1^{-1} m_5^{-1} m_1^{-1},$$

$$r_2 = m_5 m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 m_3 m_5^{-1} m_4^{-1} m_3^{-1} m_2^{-1} m_1^{-1} m_5^{-1} m_2^{-1},$$

$$r_3 = m_5 m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 m_4 m_5^{-1} m_4^{-1} m_3^{-1} m_2^{-1} m_1^{-1} m_5^{-1} m_3^{-1},$$

$$r_4 = m_5 m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 m_4^{-1} m_3^{-1} m_2^{-1} m_1^{-1} m_5^{-1} m_4^{-1}$$

$T_{4,5}$  の場合と同様の計算により,  $\pi_1(\Sigma_2 T_{5,6})$  の表示を与える.

# The generators and the relations of $\pi_1(\Sigma_2 T_{5,6})$

$\pi_1(\Sigma_2 T_{5,6})$  の生成元は以下のようになる:

$$y_2 := m_1 m_2, \quad z_2 := m_1 m_3, \quad v_2 := m_1 m_4, \quad w_2 := m_1 m_5.$$

分岐関係式を加えることにより, 以下の表示を得る.

$$\begin{aligned} \pi_1(\Sigma_2 T_{5,6}) &= \langle y_2, z_2, v_2, w_2 \mid \omega_i \ (1 \leq i \leq 8) \rangle \\ \omega_1 &= w_2^{-1} y_2^{-1} z_2 v_2^{-1} w_2 y_2^{-1} w_2 v_2^{-1} z_2 y_2^{-1} w_2^{-1}, \\ \omega_2 &= w_2^{-1} y_2^{-1} z_2 v_2^{-1} w_2 z_2^{-1} w_2 v_2^{-1} z_2 y_2^{-1} w_2^{-1} y_2, \\ \omega_3 &= w_2^{-1} y_2^{-1} z_2 v_2^{-1} w_2 v_2^{-1} w_2 v_2^{-1} z_2 y_2^{-1} w_2^{-1} z_2, \\ \omega_4 &= w_2^{-1} y_2^{-1} z_2 v_2^{-1} w_2 v_2^{-1} z_2 y_2^{-1} w_2^{-1} v_2, \\ \omega_5 &= w_2 y_2 z_2^{-1} v_2 w_2^{-1} y_2 w_2^{-1} v_2 z_2^{-1} y_2 w_2, \\ \omega_6 &= w_2 y_2 z_2^{-1} v_2 w_2^{-1} z_2 w_2^{-1} v_2 z_2^{-1} y_2 w_2 y_2^{-1}, \\ \omega_7 &= w_2 y_2 z_2^{-1} v_2 w_2^{-1} v_2 w_2^{-1} v_2 z_2^{-1} y_2 w_2 z_2^{-1}, \\ \omega_8 &= w_2 y_2 z_2^{-1} v_2 w_2^{-1} v_2 z_2^{-1} y_2 w_2 v_2^{-1}. \end{aligned}$$

# An element $\chi_{\rho_2}$ of $X(\Sigma_2 T_{5,6})$

以下のように定めると、表現  $\rho_2 : \pi_1(\Sigma_2 T_{5,6}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  を構成できる。

## Example 2 :

$$\rho_2(m_1 m_2) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \rightarrow \mathrm{tr}(\rho(m_1 m_2)) = 0$$

$$\rho_2(m_1 m_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{5}+2i}{4} \\ \frac{\sqrt{5}-2i}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \mathrm{tr}(\rho(m_1 m_3)) = -1$$

$$\rho_2(m_1 m_4) = \begin{pmatrix} \frac{-1-i}{2} & -\frac{-\sqrt{5}+i}{4} \\ \frac{-\sqrt{5}-i}{3} & \frac{-1+i}{2} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \mathrm{tr}(\rho(m_1 m_4)) = -1$$

$$\rho_2(m_1 m_5) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3i}{4} \\ i & \frac{i}{2} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \mathrm{tr}(\rho(m_1 m_5)) = 0$$

このとき、 $\chi_{\rho_2} \in X(\Sigma_2 T_{5,6})$  となる。

# Motivation

- $\Sigma_2 K$  :  $K$  に沿って分岐する  $S^3$  の 2 重分岐被覆



Q.  $X(\Sigma_2 K)$  の元はすべて  $S_0(K)$  から構成できるか？

A. [Nagasato-Yamaguchi]

$K$  が 2-bridge knot 又は pretzel knot のときはすべて構成できる。

⇒ 他の結び目ではどうか？  $\xRightarrow{\text{副産物}}$  Ng 予想の反例.

(F. Nagasato and Y. Yamaguchi : *On the geometry of the slice of trace-free*  
 *$SL_2(\mathbb{C})$ -characters of a knot group*, Math. Ann. **354**, 967-1002 (2012).)

# The trace-free slice $S_0(K)$ : [Nagasato (2013)]

$G(K) = \langle m_1, \dots, m_n \mid r_1, \dots, r_{n-1} \rangle$  を Wirtinger 表示とする. 以下の関係により,  $S_0(K)$  の元である表現  $\rho$  (正確にはその指標) から  $\mathbb{C}^{\binom{n}{2} + \binom{n}{3}}$  の点に **1 対 1** の対応が実現される ([Culler-Shalen], [González=Acuña-Montesinos]).

$$x_{ij} = -\operatorname{tr}(\rho(m_i m_j)), x_{ijk} = -\operatorname{tr}(\rho(m_i m_j m_k))$$

また, 以下がすぐに確認できる.

- $x_{aa} = -\operatorname{tr}(\rho(m_a m_a)) = -\operatorname{tr}(\rho(m_a))^2 + \operatorname{tr}(E) = 2$
- $x_{ba} = -\operatorname{tr}(\rho(m_b m_a)) = -\operatorname{tr}(\rho(m_a m_b)) = x_{ab}$
- $x_{i_1 i_2 i_3} = -\operatorname{tr}(\rho(m_{i_1} m_{i_2} m_{i_3})) = \operatorname{sign}(\sigma) x_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} i_{\sigma(3)}}, \sigma \in \mathfrak{S}_3$

# The trace-free slice $S_0(K)$ : [Nagasato (2013)]

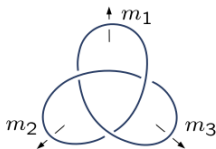
このとき,  $S_0(K) = \{\chi_\rho \mid \rho: G(K) \rightarrow SL_2(\mathbb{C}), \text{tr}(\rho(m_i)) = 0\}$  は以下のような複素空間内の代数的集合として実現される.

$$S_0(K) = \left\{ \begin{array}{l} (x_{ab}; x_{pqr}) \in \mathbb{C}^{\binom{n}{2} + \binom{n}{3}} \\ (1 \leq a < b \leq n) \\ (1 \leq p < q < r \leq n) \end{array} \left| \begin{array}{l} (F2) \quad x_{ka} = x_{ij}x_{ia} - x_{ja} \\ \left( \begin{array}{l} a \in \{1, \dots, n\}, \\ \forall \text{ Wirtinger triple } (i, j, k) \end{array} \right. \right. \\ \left. \left. \begin{array}{c} \text{---} k \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ i \quad \quad j \end{array} \right) \right. \\ (H) \quad x_{i_1 i_2 i_3} \cdot x_{j_1 j_2 j_3} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_{i_1 j_1} & x_{i_1 j_2} & x_{i_1 j_3} \\ x_{i_2 j_1} & x_{i_2 j_2} & x_{i_2 j_3} \\ x_{i_3 j_1} & x_{i_3 j_2} & x_{i_3 j_3} \end{vmatrix} \\ (1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n, 1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq n) \\ (R) \quad \begin{vmatrix} 2 & x_{12} & x_{1a} & x_{1b} \\ x_{21} & 2 & x_{2a} & x_{2b} \\ x_{a1} & x_{a2} & 2 & x_{ab} \\ x_{b1} & x_{b2} & x_{ba} & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3 \leq a < b \leq n) \end{array} \right.$$

(F. Nagasato : *On the trace-free characters*, RIMS Kokyuroku "Representation spaces, twisted topological invariants and geometric structures of 3-manifolds" 1836 (2013), 110-123.)

# How to calculate $S_0(K)$

$K = 3_1$  の場合



$$(F_2) : \left\{ \begin{array}{l} 2 = x_{23}x_{12} - x_{13}, \quad x_{12} = 2x_{23} - x_{23}, \quad x_{13} = x_{23}^2 - 2 \\ x_{12} = x_{13}^2 - 2, \quad 2 = x_{13}x_{23} - x_{12}, \quad x_{23} = 2x_{13} - x_{13} \\ x_{13} = 2x_{12} - x_{12}, \quad x_{23} = x_{12}^2 - 2, \quad 2 = x_{12}x_{13} - x_{23} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow x_{12} = x_{13} = x_{23}, 2 = x_{12}^2 - x_{12}$$

$$\Rightarrow x_{12} = 2, -1$$

$$F_2(3_1) := \{(x_{12}, x_{13}, x_{23}) = (2, 2, 2), (-1, -1, -1)\}$$

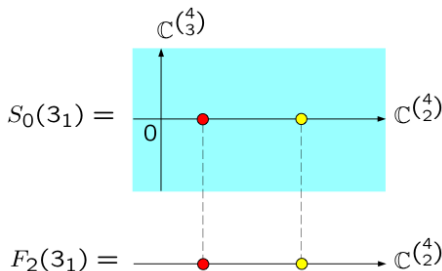
$$(H) : x_{123}^2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & 2 & x_{23} \\ x_{13} & x_{23} & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow x_{123} = 0, (R) : \text{なし}$$



# How to calculate $S_0(K)$

$$S_0(3_1) = \{(x_{12}, x_{13}, x_{23}; x_{123}) = (2, 2, 2, 0), (-1, -1, -1, 0)\} \cong F_2(3_1)$$

以上より、 $F_2(3_1)$  の全ての点は  $S_0(3_1)$  の点を生成することがわかる。

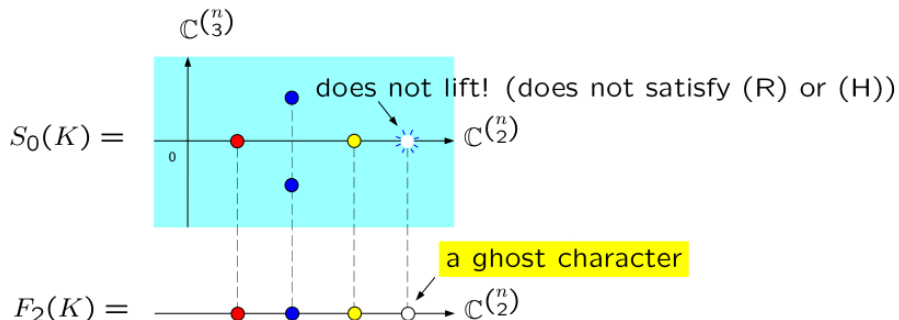


このように、 $S_0(K)$  を計算する場合、図式から得られる集合  $F_2(K)$  を求めてから  $S_0(K)$  を求める。

# A ghost character of a knot

## Definition 1 (Ghost characters [Nagasato(2013)])

$S_0(K)$  の点を生成しない  $F_2(K)$  上の点が存在するとき、その点を結び目  $K$  の *Ghost character* (幽霊指標) と呼ぶ。



# A ghost character of $T_{4,5}$ and $T_{5,6}$

計算機実験から、次が分かった。

## Theorem 2

$$F_2(T_{4,5}) \cong \{(x_{12}, x_{13}, x_{14}) = (2, 2, 2), (-1, 1, -1), (\alpha, -2 + 2\alpha, \alpha), (\beta, 2, \beta)\}$$

(ただし,  $\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0$ ,  $\beta^2 + \beta - 1 = 0$ )

また,  $(-1, 1, -1)$  は *ghost character* である。

## Theorem 3

$$F_2(T_{5,6}) \cong \left\{ \begin{array}{l} (x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}) = (2, 2, 2, 2), (0, -1, -1, 0), (1, 1, 1, 1), \\ (-2, 1, 1, -2), (\alpha, -1 + 2\alpha, -1 + 2\alpha, \alpha), \\ (\beta, 1, 1, \beta), (\gamma, -1 - \gamma, -1 - \gamma, \gamma) \end{array} \right\}$$

(ただし,  $\alpha^2 - 5\alpha + 5 = 0$ ,  $\beta^2 - \beta - 1 = 0$ ,  $\gamma^2 + \gamma - 1 = 0$ )

また,  $(0, -1, -1, 0), (1, 1, 1, 1), (-2, 1, 1, -2)$  は *ghost character* である。

# Motivation

- $K \subset \mathbb{S}^3$  を結び目,  $E_K$  をその外部空間とする.
- $\Sigma_2 K$  :  $K$  に沿って分岐する  $\mathbb{S}^3$  の 2 重分岐被覆



Q.  $X(\Sigma_2 K)$  の元はすべて  $S_0(K)$  から構成できるか？

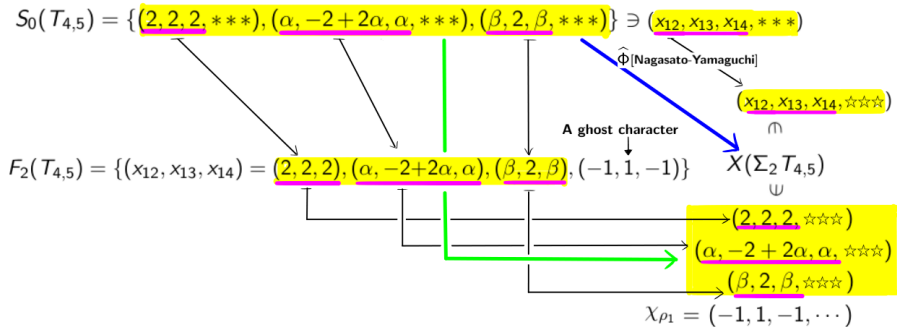
A. [Nagasato-Yamaguchi]

$K$  が 2-bridge knot 又は pretzel knot のときはすべて構成できる.

⇒ 他の結び目ではどうか？ <sup>副産物</sup>  $\implies$  Ng 予想の反例.

(F. Nagasato and Y. Yamaguchi : *On the geometry of the slice of trace-free*  
 *$SL_2(\mathbb{C})$ -characters of a knot group*, Math. Ann. **354**, 967-1002 (2012).)

# What a ghost character tells

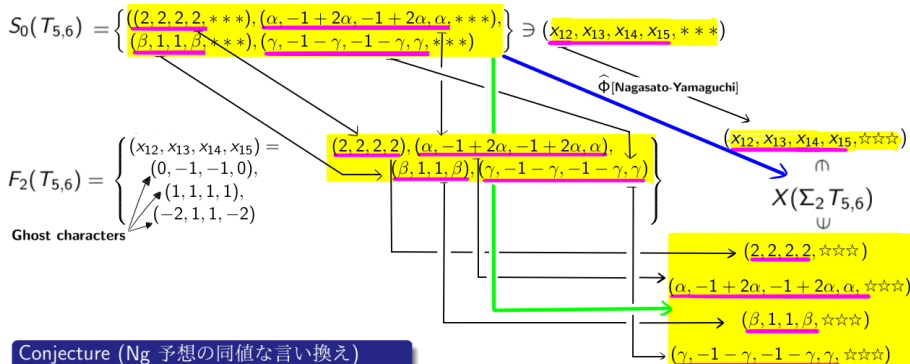


## Theorem 4

$S_0(T_{4,5})$  から求めることのできない指標  $\chi_{\rho_1}$  が  $X(\Sigma_2 T_{4,5})$  に存在するため,  $K = T_{4,5}$  において  $\hat{\Phi}$  は全射ではない.

$$\left[ \begin{array}{l}
 \rho_1(m_{12}) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2}{3}\pi i} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2}{3}\pi i} \end{pmatrix} \rightarrow \text{tr}(\rho(m_{12})) = -1 \\
 \rho_1(m_{13}) = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{3}}e^{\frac{\pi}{3}i} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ 1 & \frac{i}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\pi}{3}i} \end{pmatrix} \rightarrow \text{tr}(\rho(m_{13})) = 1 \\
 \rho_1(m_{14}) = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{3}}e^{\frac{\pi}{3}i} & \frac{1}{3}(1+2\beta) \\ \beta & -\frac{i}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\pi}{3}i} \end{pmatrix} \rightarrow \text{tr}(\rho(m_{14})) = -1
 \end{array} \right]$$

# What a ghost character tells



## Conjecture (Ng 予想の同値な言い換え)

任意の結び目  $K$  において,  $F_2(K) \cong X(\Sigma_2 K)$  が成り立つ.

## Theorem 5

Ghost characters  $(1, 1, 1, 1), (-2, 1, 1, -2)$  に対応する指標が  $X(\Sigma_2 T_{5,6})$  に存在しないことが計算機実験により確認できるため,  $F_2(T_{5,6})$  と  $X(\Sigma_2 T_{5,6})$  は代数的集合として同型ではない. つまり,  $K = T_{5,6}$  は Ng 予想の反例になっている.

$$\chi_{\rho_2} = (0, -1, -1, 0, \dots)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \rho_2(m_1 m_2) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \rightarrow \text{tr}(\rho(m_1 m_2)) = 0 \\ \rho_2(m_1 m_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{5}+2i}{4} \\ \frac{\sqrt{5}-2i}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \text{tr}(\rho(m_1 m_3)) = -1 \\ \rho_2(m_1 m_4) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{5}+i}{4} \\ -\frac{\sqrt{5}-i}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \text{tr}(\rho(m_1 m_4)) = -1 \\ \rho_2(m_1 m_5) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}i \\ i & \frac{3}{2}i \end{pmatrix} \rightarrow \text{tr}(\rho(m_1 m_5)) = 0 \end{array} \right]$$

Thank you for your attention.