双曲3次元多様体の通約可能性と体積

Volume and commensurability of hyperbolic 3-manifolds

吉田　はん

（群馬工業高等専門学校）

2016年12月23日「結び目の数学」

目次

1. 定義と主結果

2. 準備

3. 主結果の証明

4. 応用

1. 定義と主結果

定義

Γ_1, $\Gamma_2 \subset Isom(\mathbb{H}^3)$ are commensurable

$\Leftrightarrow$ $[\Gamma_1 : \Gamma_1 \cap \Gamma_2] < \infty$ and $[\Gamma_2 : \Gamma_1 \cap \Gamma_2] < \infty$

$M_1 = \mathbb{H}^3/\Gamma_1$ and $M_2 = \mathbb{H}^3/\Gamma_2$ are commensurable

$\Leftrightarrow$ Γ_1 and Γ_2 are commensurable up to conjugacy

$\Leftrightarrow$ M_1 and M_2 have a common finite sheeted cover.

"commensurability" is an equivalence relation.

今までに知られていること

$M_1 = \mathbb{H}^3/\Gamma_1$ と $M_2 = \mathbb{H}^3/\Gamma_2$ が commensurable $\Rightarrow$

・$\dfrac{vol(M_1)}{vol(M_2)} \in \mathbb{Q}$

・$\mathbb{Q}(tr\Gamma_1^{(2)}) = \mathbb{Q}(tr\Gamma_2^{(2)})$ (invariant trace field が同じ)

・cusp parameter が up to $PGL(2, \mathbb{Q})$ で同じ

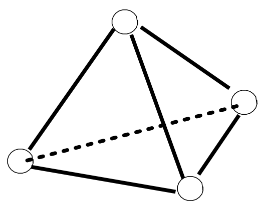
・同じ horoball packing を持つ.

主結果

M_1, M_2 をnon-arithmetic ori. cusped hyp. 3-mfd. とする.

$$0 < |vol(M_1) - vol(M_2)| < \frac{v_0}{4} = 0.25\cdots$$

ならば M_1 と M_2 はincommensurable. ここで $v_0 = 1.0149\cdots$ は regular ideal tetrahedron の体積.

$v_0 = vol$ ()

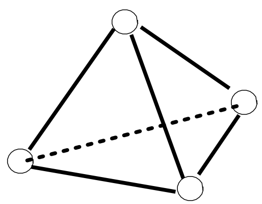
面角は $\frac{\pi}{3}$

主結果

M_1, M_2 をnon-arithmetic ori. cusped hyp. 3-mfd. とする.

$$0 < |vol(M_1) - vol(M_2)| < \frac{v_0}{4} = 0.25\cdots$$

ならば M_1 と M_2 はincommensurable.　ここで $v_0 = 1.0149\cdots$ は regular ideal tetrahedron の体積.

$v_0 = vol$ ()

面角は $\frac{\pi}{3}$

$0 = |vol(M_1) - vol(M_2)|$ で M_1, M_2 がcommensurable となる例は知られている.

Def. A Kleinian group Γ is called arithmetic if it is commensurable with the group norm 1 elements of an order of quaternion algebra A ramified at all real places over a number field k with exactly one complex place.

Ex: The figure-eight knot complement and the Whitehead link complement are arithmetic.

Rem : aritmetic hyp. mfds and non-arithmetic hyp. mfds are incommenurable.

2．準備

[G. Margulis]

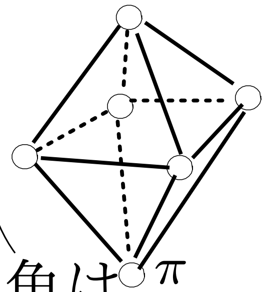
"non-arithmetic" hyp. mfds M_1 and M_2 are commensurable

$\Leftrightarrow \exists\ M_0$: hyp. mfd(or orbifold) s.t. $M_1 \to M_0$ finite cover $M_2 \to M_0$ finite cover

Discrete Subgroups of Semi-simple Lie Groups, Ergeb. der Math. 17, Springer-Verlag (1989).

次のことが知られている.

Th (Adams, 1990). *The six noncompact ori. hyp. 3-orbifolds of volumes less than* $\frac{v_0}{4}$ *have volumes* $\frac{v_0}{12}$, $\frac{v_1}{6}$, $\frac{v_0}{6}$, $\frac{v_0}{6}$, $\frac{5v_0}{24}$ *and* $\frac{v_1}{4}$. *(*$v_1 = 0.915\cdots =$ *is the volume of the regular ideal octahedron/4.)*

$v_1 = vol$ () / 4

面角は $\frac{\pi}{2}$

"Noncompact Hyperbolic 3-Orbifolds of Small Volume", Topology 90,

次のことが知られている.

Th (Adams, 1990). *The six noncompact ori. hyp. 3-orbifolds of volumes less than* $\frac{v_0}{4}$ *have volumes* $\frac{v_0}{12}$, $\frac{v_1}{6}$, $\frac{v_0}{6}$, $\frac{v_0}{6}$, $\frac{5v_0}{24}$ *and* $\frac{v_1}{4}$. *(*$v_1 = 0.915\cdots =$ *volume of the regular ideal octahedron/4.)*

Th (Neumann-Reid, 1990). *These six orbifolds are arithmetic.*

"Notes on Adams' small volume orbifolds", Topology '90 (1990)

次のことが知られている．

Th (Adams, 1990). *The six noncompact ori. hyp. 3-orbifolds of volumes less than* $\frac{v_0}{4}$ *have volumes* $\frac{v_0}{12}$, $\frac{v_1}{6}$, $\frac{v_0}{6}$, $\frac{v_0}{6}$, $\frac{5v_0}{24}$ *and* $\frac{v_1}{4}$. *(*$v_1 = 0.915\cdots =$ *volume of the regular ideal octahedron/4.)*

Th (Neumann-Reid, 1990). *These six orbifolds are arithmetic.*

"Notes on Adams' small volume orbifolds", Topology '90 (1990)

Cor

non-arithmetic hyp. 3-orbifold の体積は $\frac{v_0}{4}$ 以上

次のことが知られている.

Th (Adams, 1990). *The six noncompact ori. hyp. 3-orbifolds of volumes less than* $\frac{v_0}{4}$ *have volumes* $\frac{v_0}{12}$, $\frac{v_1}{6}$, $\frac{v_0}{6}$, $\frac{v_0}{6}$, $\frac{5v_0}{24}$ *and* $\frac{v_1}{4}$. *(*$v_1 = 0.915\cdots =$ *volume of the regular ideal octahedron/4.)*

Th (Neumann-Reid, 1990). *These six orbifolds are arithmetic.*

Cor 1

non-arithmetic hyp. 3-orbifold の体積は $\frac{v_0}{4}$ 以上

吉田の予想 $0.343\cdots$ 以上

3. 主結果の証明

主結果

M_1, M_2 をnon-arithmetic ori. cusped hyp. 3-mfd. とする.

$$0 < |vol(M_1) - vol(M_2)| < \frac{v_0}{4} = 0.25 \cdots$$

ならば M_1 と M_2 はincommensurable. ここで v_0 は regular ideal tetrahedron の体積.

[証明]

M_1 と M_2 は commensurable と仮定する.

non-arithmetic なので

$P_i : M_i \to M_0$ は n_i-fold covering

となる M_0 が存在する。($i = 1,\ 2$, $n_1 \neq n_2$)

[証明]

M_1 と M_2 は commensurable と仮定する.

non-arithmetic なので

$P_i : M_i \to M_0$ は n_i-fold covering

となる M_0 が存在する。($i = 1,\ 2,\ n_1 \neq n_2$)

よって

$$\begin{aligned} |vol(M_1) - vol(M_2)| &= |n_1 vol(M_0) - n_2 vol(M_0)| \\ &= |n_1 - n_2| vol(M_0) \end{aligned}$$

[証明]

M_1 と M_2 は commensurable と仮定する.

non-arithmetic なので

$P_i : M_i \to M_0$ は n_i-fold covering

となる M_0 が存在する。($i = 1,\ 2,\ n_1 \neq n_2$)

よって

$$\begin{aligned} |vol(M_1) - vol(M_2)| &= |n_1 vol(M_0) - n_2 vol(M_0)| \\ &= |n_1 - n_2| vol(M_0) \end{aligned}$$

Cor.1 より non-arithmetic ori. hyp. 3-orbifold の体積は $\frac{v_0}{4}$ 以上で $n_1 \neq n_2$ なので

$$|vol(M_1) - vol(M_2)| \geq \frac{v_0}{4}$$

これは仮定に矛盾.

3. 応用

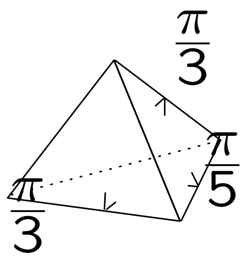
non-ori.cusped hyp. 3-orbifold の体積は $\frac{v_0}{8}$ 以上なので同様にすると

Th. M_1, M_2 を *non-arithmetic nonorientable hyp 3-orbifolds* とする.

$$0 < |vol(M_1) - vol(M_2)| < \frac{v_0}{8}$$

ならば M_1 と M_2 は *incommensurable.*

Marshall と Martin（2012） によりclosed ori. hyp. 3-orbifold の体積は 0.03905 . . . 以上と証明されているので



残りの面角は $\frac{\pi}{2}$

同様にすると,

Th. M_1, M_2 を*non-arithmetic ori. closed hyperbolic 3-manifold* とする.

$$0 < |vol(M_1) - vol(M_2)| < 0.03905 \cdots$$

ならば M_1 と M_2 は *incommensurable.*

M : $n-$cusped hyp. mfd

$M_{(p_1,q_1,\cdots,p_n,q_n)}$: M の i-cusp に(p_i,q_i) Dehn filling して得られた hyp. mfd.

とする.

hyperbolic Dehn surgery Theorem より

$vol(M_{(p_1,q_1,\cdots,p_n,q_n)}) \to vol(M) \quad (p_i^2+q_i^2 \to \infty)$ で

$\{vol(N) : N$ is arith.hyp.mfd$\}$ は discrete なので

結果

M をcusped hyperbolic 3-manifold とする. このとき集合 $\{M$ をDehn filling して得られる hyperbolic 3-manifolds $\}$ は無限個の commensurability 類を含む.

ご清聴ありがとうございました.