15　三次方程式の解の公式

15.1　二次方程式の解の公式

復習

$a \neq 0 (a, b, c \in \mathbb{R})$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (b^2 - 4ac \geq 0)$$

任意の複素数 a, b, c に対しても二次方程式の解の公式は使える。
ただしこの場合、複素数 α が 0 でも正の実数でないとき、
$\sqrt{\alpha}$ は二乗すると α になるようなのうちどちらかを代表とするものとする。

♣注意　複素数時、$b^2 - 4ac < 0$ のとき $b^2 - 4ac = z^2, z \in \mathbb{C}$ を見つけてくると、$x = \dfrac{-b + z}{2a}$ となる。

例　α は正の実数とする。$\alpha = 3$ のとき $+\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ というように正負区別ができる。
α が 0 でも正の実数でもないとき、たとえば $\alpha = 3 + 4\mathrm{i}$ のとき, $3 + 4\mathrm{i}$ の平方根は正負で判別することができない。(P93, 例 15-1 参照)

15.2　1 の 3 乗根

$x^3 - 1 = 0$　は最も簡単な三次方程式といえる。
この解を複素数の範囲で求める。
$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$
$x^2 + x + 1$ の解は二次方程式の解の公式を用いて、
$w = \dfrac{-1 + \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}, \qquad w^2 = \dfrac{-1 - \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$
したがって $x^3 - 1$ は複素数の範囲内で以下のように因数分解される。

$$x^3 - 1 = (x-1)(x-w)(x-w^2) = (x-1)(x + \frac{1 - \sqrt{3}\mathrm{i}}{2})(x + \frac{1 + \sqrt{3}\mathrm{i}}{2})$$

よって x^3-1 の解 x は3つ持つ。このことから1の3乗根＝3乗して1になる数は複素数の範囲で3つあり、$\mathbf{1}$、$\mathbf{w}$、$\mathbf{w^2}$ によって与えられる。

15.3　三次方程式の解の公式

　三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq 0)$ まず、x^3 のの係数を消すことにするそのために（補題1）と変形する。
ここで、$y=x+\dfrac{b}{3a}\qquad p=\dfrac{c}{a}-\dfrac{b^2}{3a^2}\quad q=\dfrac{b}{a}-\dfrac{bc}{3a^2}+2(\dfrac{b}{3a})^2$
とおく。このとき、
$a(y^3+py+q)=0,\quad y^3+py+q=0$ と書き換えられる。
この三次方程式の解を解くために $y=s+t$ とおくと（補題2）と書き換えられる。もし、s、t を $st=-\dfrac{p}{3}$ となるようにとることができれば、（補題3）となる。
　つまり、三次方程式 $y^3+py+q=0$ の解を求めるには、
$st=-\dfrac{p}{3},\quad s^3+t^3=-q$ をみたす s、t を求めて、$y=s+t$ に代入すれば良い、s^3、t^3 は $s^3t^3=(-\dfrac{p}{3})^3,\ s^3+t^3=-q$ をみたすので、
解と係数の関係より $z^2+qz+(-\dfrac{p}{3})^2=0$ となり、z は s^3、t^3 であるから、

$$s^3、t^3 \text{ は }(*)\begin{cases} s^3=\dfrac{1}{2}(-q+\sqrt{q^2-4(-\dfrac{p}{3})^3}\ \ ) \\ t^3=\dfrac{1}{2}(-q-\sqrt{q^2-4(-\dfrac{p}{3})^3}\ \ ) \end{cases}\quad \text{で与えられる。}$$

右辺の3乗根は $\mathbb{C}$ の範囲内にそれぞれ3個あり、それらの組み合わせの中で $st=-\dfrac{p}{3}$ をみたすものが、求める $(s、t)$ の組である。
実際に求めるには $(*)$ の第1式の右辺を極形式 $re^{\theta\mathrm{i}}$ で表し、$s_0=r^{\frac{1}{3}}\cdot e^{\frac{\theta}{3}\mathrm{i}}$ とおきます。
t_0 を $s_0t_0=-\dfrac{p}{3}$ となるように定め、$w=e^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$ （1の三乗根）とおく。
　すると、$(s、t)=(s_0,t_0),(ws_0,w^2t_0),(w^2s_0,wt_0)$ はすべて $st=-\dfrac{p}{3}$ をみたす。こうして三次方程式 $y^3+py+q=0$ の解 y が次の式で求まる。
$\mathbf{y=s_0+t_0、ws_0+w^2t_0、w^2s_0+wt_0}$

補題について　山本さんの配布資料参照:URL
http://www.math.chs.nihon-u.ac.jp/ ichihara/Labo/Notes/2013/3rd/0520yamamoto.pdf

15.4　1 の n 乗根

$n \in \mathbb{N}$ に対して、$z^n = 1$ となる複素数 z を 1 の n 乗根という。
n 乗すると 1 になる実数は多くても 2 つしかない。(n が偶数なら 2 つ, 奇数なら 1 つ)
しかし、$\mathbb{C}$ の範囲内には n 個存在する。

15.5　代数学の基本定理

定理 15-3(代数学の基本定理)

$n \geq 1$ を整数とする。任意の n 次方程式

$$a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

(ただし、$a_n \neq 0$,$a_x, \cdots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$)
は必ず複素数内に解をもつ。