目 次

第1章　離散型確率分布

1.1　確率分布

S を有限または可算集合とする．各 $x_i \in S$ に確率 p_i を表にする．

値	x_1	x_2	$\cdots$
確率	p_1	p_2	$\cdots$

$p_i \geq 0$ と $\sum_i p_i = 1$ をみたすとする．

これを確率分布とよぶ．とくに S が離散集合であるので，離散型確率分布とよぶ．

S は有限もしくは可算集合，確率分布は

- $p_i \geq 0$
- $\sum_i p_i = 1$

をみたす．

例 1 (等確率型)

$$\#S = n, \qquad p_i = \frac{1}{n}$$

例 2 (二項分布)　$B(n,p)$ とも表す $(0 < p < 1)$，また $q = 1 - p$ を表す．

$$S = \{0, 1, 2, \ldots, n\}, \qquad p_i = {}_n\mathrm{C}_i p^i q^{n-i}$$

例 3 (幾何分布)　$\mathrm{Ge}(p)$ とも表す $(0 < p < 1)$，また $q = 1 - p$ を表す．

$$S = \{0, 1, 2, \ldots\}, \qquad p_i = p^i q$$

例 4 (ポアソン分布)　$\mathrm{Po}(\lambda)$ とも表す $(\lambda > 0)$

$$S = \{0, 1, 2, \ldots\}, \qquad p_i = e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!}$$

例 5 (負の 2 項分布)　$\mathrm{NB}(n,p)$ とも表す $(0 < p < 1)$，また $q = 1 - p$ を表す．

$$p_k = {}_{n+k-1}\mathrm{C}_k p^n q^k$$

始めて n 回目の失敗をするまでの成功の回数 k を表す．$\mathrm{NB}(1,p)$ は幾何分布になる．

問題 1 負の 2 項分布は

$$P(X=k)=\binom{-n}{k}p^n(-q)^k$$

と表すことができることを示し，さらに全体の確率が 1 に等しいことを示してください．

解.

$$\begin{aligned}{}_{n+k-1}\mathrm{C}_k p^n q^k &= \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}p^n q^k \\ &= \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots n}{k!}p^n q^k \\ &= \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}(-1)^k p^n q^k \\ &= \binom{-n}{k}p^n(-q)^k\end{aligned}$$

ここで

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}p^n(-q)^k=p^n(1-q)^{-n}=1$$

□

数学的に厳密な概念ではないが，$\mathbb{R}$ に値をとる変数 X を確率変数という．

$$p_i=P(X=x_i)$$

により，事象 x_i が起きる確率 p_i を定めると，x_i 全体の集合 S の上の確率分布が定まる．

問題 2 X が次の式をみたすとき定数 C,D を求めてください．

(1)

$$P(X=k)={}_n\mathrm{C}_k p^k\times C^{n-k},\qquad (0\le k\le n)$$

(2)

$$P(X=k)=Cpq^k+D,\qquad (k\ge 0)$$

(3)

$$P(X=k)=C\frac{\lambda^k}{k!},\qquad (k\ge 0)$$

問題 3

X	-1	0	1
確率	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$

をみたすとき，空欄を埋め，$2X-1$，X^2，t^X，e^{tX} の確率分布を求めてください．

解.

X	-1	0	1
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

$2X-1$	-3	-1	1
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

X^2	0	1
確率	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

t^X	$\frac{1}{t}$	1	t
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

e^{tX}	$\frac{1}{e^t}$	1	e^t
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

□

1.2 多変数の確率分布

$X\backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	和
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_1^X
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_2^X
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
和	p_1^Y	p_2^Y	$\cdots$	1

ここで

$$p_i^X = P(X = x_i) = \sum_j p_{ij}, \quad p_j^Y = P(Y = y_j) = \sum_i p_{ij}$$

これらにより，X と Y の確率分布が定まる．これを周辺分布という．

X	x_1	x_2	$\cdots$
確率	p_1^X	p_2^X	$\cdots$

Y	y_1	y_2	$\cdots$
確率	p_1^Y	p_2^Y	$\cdots$

問題 4 X, Y が確率分布

$X\backslash Y$	0	1	2	和
0		$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{12}$			
2	$\frac{1}{8}$			$\frac{7}{24}$
和		$\frac{5}{24}$		

にしたがうとき，まず穴を埋め，$X+Y$，XY，$\max\{X,Y\}$，$\min\{X,Y\}$ の確率分布を定めてください．

解.

$X\backslash Y$	0	1	2	和
0	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{9}{24}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{24}$
和	$\frac{8}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{11}{24}$	

$X+Y$	0	1	2	3	4
確率	$\frac{3}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{2}{24}$

XY	0	1	2	4
確率	$\frac{13}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{2}{24}$

$\max\{X,Y\}$	0	1	2
確率	$\frac{3}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{16}{24}$

$\min\{X,Y\}$	0	1	2
確率	$\frac{13}{24}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{2}{24}$

□

問題 5 $0 < p_1, \ldots, p_n < 1$，$p_1 + \cdots + p_n = 1$ について，$X_1, \ldots, X_n$ の確率分布が

$$P(X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_n!} p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n} \quad (k_1, \ldots, k_n \geq 0, k_1 + \cdots + k_n = n)$$

をみたすとき，多項分布という．これが確率分布になっていることを確かめてください．

解.

$$\sum_{k_1,\ldots,k_n:\, k_1+\cdots+k_n=n} \frac{n!}{k_1! \cdots k_n!} p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n} = (p_1 + \cdots + p_n)^n = 1$$

□

$$p_{ij} = p_i^X \times p_j^Y$$

をすべての i, j についてみたすとき，X と Y は独立であるという．言い換えれば，

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$$

が成り立つとき独立である．2 つ以上の確率変数の場合にも，

$$P(X = x_i, Y = y_j, Z = z_k) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j) \times P(Z = z_k)$$

などと積となるとき独立という．無限個の確率変数 $X_1, X_2, \ldots$ のときには，任意の有限個を取り出すとき，それらが独立なとき，独立であるという．

問題 6 X と Y，Y と Z，Z と X はそれぞれ独立なのに X, Y, Z が独立でない例を作ってください．

解.

$$P(X=1,Y=1,Z=0)=\frac{1}{9},\quad P(X=1,Y=0,Z=0)=\frac{1}{9},$$
$$P(X=1,Y=0,Z=1)=\frac{1}{9},\quad P(X=0,Y=1,Z=0)=\frac{1}{9},$$
$$P(X=0,Y=1,Z=1)=\frac{1}{9},\quad P(X=0,Y=0,Z=1)=\frac{1}{9},$$
$$P(X=Y=Z=0)=\frac{1}{3}$$

□

問題 7 (1) X と Y が以下の表をみたすとき空欄を埋め，さらに $\max\{X,Y\}$ の確率分布を求めてください．

$X\backslash Y$	0	1	和
0	$\frac{1}{24}$		$\frac{1}{6}$
1		$\frac{1}{8}$	
和			

(2) X と Y が独立なとき空欄を埋め，さらに $X+Y$ の確率分布を求めててください．

$X\backslash Y$	0	1	和
0	$\frac{1}{24}$		$\frac{1}{6}$
1			
和			

解.

(1)

$X\backslash Y$	0	1	和
0	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{11}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{20}{24}$
和	$\frac{18}{24}$	$\frac{6}{24}$	

$\max\{X,Y\}$	0	1
確率	$\frac{1}{24}$	$\frac{23}{24}$

(2)

$X\backslash Y$	0	1	和
0	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{4}{24}$
1	$\frac{5}{24}$	$\frac{15}{24}$	$\frac{20}{24}$
和	$\frac{6}{24}$	$\frac{18}{24}$	

$X+Y$	0	1	2
確率	$\frac{1}{24}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{15}{24}$

□

問題 8　(1) $X_1, \ldots, X_n$ が独立ならば，そのうちの任意の有限個の確率変数も独立であることを示してください．

(2) 任意の $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が独立ならば，$X_1, X_2, \ldots$ も独立であることを示してください．

解.

(1) $X_1, \ldots, X_{n-1}$ が独立なことを示せば，後はその繰り返しで示せる．

(2) 上の主張より明らか

□

1.3　期待値と分散

確率変数 X の期待値 (平均) とは

$$E(X) = \sum_i x_i p_i$$

問題 9 x_i に確率 p_i の錘りを置いたとき，回転モーメントが 0 に等しくなる点が期待値であることを示してください．

期待値の性質

(1) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

(2) $E(aX+b) = aE(X) + b$

(3) X と Y が独立ならば，$E(XY) = E(X) \times E(Y)$

分散とは

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_i (x_i - E(X))^2 p_i$$

また，標準偏差とは

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

分散の性質

(1) $V(aX+b) = a^2 V(X)$

(2) $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

(3) X と Y が独立ならば，$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

問題 10 サイコロ 2 個 X, Y を投げるとき，合計の目に対応する確率変数 $X+Y$，大きい方の目に対応する確率変数 $\max\{X,Y\}$, $\min\{X,Y\}$ の期待値と分散を求めてください．

解． $E(X)=E(Y)=\frac{7}{2}$，$V(X)=V(Y)=\frac{35}{12}$ で独立である．

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= E(X)+E(Y)=7 \\ V(X+Y) &= V(X)+V(Y)=\frac{35}{6} \end{aligned}$$

x について

$$P(\max\{X,Y\}\le x)=P(X\le x, Y\le x)=P(X\le x)\times P(Y\le x)$$

なので

$$\begin{aligned} P(\max\{X,Y\}\le 1) &= \frac{1}{36} \\ P(\max\{X,Y\}\le 2) &= \frac{1}{9} \\ P(\max\{X,Y\}\le 3) &= \frac{1}{4} \\ P(\max\{X,Y\}\le 4) &= \frac{4}{9} \\ P(\max\{X,Y\}\le 5) &= \frac{25}{36} \\ P(\max\{X,Y\}\le 6) &= 1 \end{aligned}$$

$\max\{X,Y\}$	1	2	3	4	5	6
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$

$$\begin{aligned} E(\max\{X,Y\}) &= \frac{161}{36} \\ V(\max\{X,Y\}) &= \frac{2555}{1296} \end{aligned}$$

x について

$$P(\min\{X,Y\}\ge x)=P(X\ge x, Y\ge x)=P(X\ge x)\times P(Y\ge x)$$

なので

$$\begin{aligned} P(\min\{X,Y\}\ge 1) &= 1 \\ P(\min\{X,Y\}\ge 2) &= \frac{25}{36} \\ P(\min\{X,Y\}\ge 3) &= \frac{4}{9} \\ P(\min\{X,Y\}\ge 4) &= \frac{1}{4} \\ P(\min\{X,Y\}\ge 5) &= \frac{1}{9} \\ P(\min\{X,Y\}\ge 6) &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

$\max\{X,Y\}$	1	2	3	4	5	6
確率	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$

ここで

$$E(\min\{X,Y\}) = \sum_{k=1}^{6} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{6} P(X \geq k) = \frac{91}{36}$$

と計算することもできる．

$$E(\min\{X,Y\}^2) = \frac{301}{36}$$

より

$$V(\min\{X,Y\}) = \frac{35}{6}$$

□

問題 11 10 種類のおまけが入っているお菓子がある．10 種類全部集めるのに必要な個数の期待値を求めてください．n 種類ならどうですか．

解． 1 種類目は 1 つ買えば必ず手に入る．2 種類目を得る確率は $\frac{9}{10}$，などと 10 種類目を得る確率は $\frac{1}{10}$ などの幾何分布になっているので，期待値は

$$1 + \frac{10}{9} + \cdots + \frac{10}{1} = 10\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right)$$

n ならば

$$n\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \fallingdotseq n(\log n + \gamma)$$

$\gamma \fallingdotseq 0.57721$ はオイラー定数

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right)$$

□

問題 12

$$Y = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$$

とおくと，$E(Y) = 0$ かつ $V(Y) = 1$

問題 13 $X_1, \ldots, X_n$ は独立で，$V(X_1) = \cdots = V(X_n) = v$ ならば

$$V\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{v}{n}$$

1.4　共分散，相関係数

X と Y の共分散を

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$$

で定義する．さらに

$$\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

を相関係数という．

問題 14 相関係数は X と Y を正規化した $\hat{X}=\frac{X-E(X)}{\sqrt{V(X)}}$, $\hat{Y}=\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{V(Y)}}$ の共分散 $\rho(X,Y)=\mathrm{Cov}(\hat{X},\hat{Y})$ であることを確かめてください．

問題 15 相関係数が次元によらないことを確かめてください．

解． ちょっと拡張して，$a,c>0$ について

$$\rho(aX+b,cY+d)=\rho(X,Y)$$

が容易に確かめられる．□

問題 16 X と Y が独立ならば，$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ をみたす．また，$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ をみたしても，独立でない例を作ってください．

解．

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

より，明らかである．また，

$X\backslash Y$	-1	0	1	和
-1	0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{9}$
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{7}{9}$
1	0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{9}$
和	$\frac{1}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{1}{9}$	

は独立ではないが，$E(X)=E(Y)=0$ かつ $E(XY)=0$ なので，$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ □

問題 17 $|\rho(X,Y)| \leq 1$ であること，および $\rho(X,Y) = \pm 1$ ならば，$Y = aX+b$ をみたす a, b が存在することを示してください．また

$$\rho(X,Y) = 1 \Rightarrow a > 0. \qquad \rho(X,Y) = -1 \Rightarrow a < 0$$

もみたす．

解． $t \in \mathbb{R}$ について，

$$V(X+tY) = V(X) + 2t\,\mathrm{Cov}(X,Y) + t^2 V(Y)$$

t の 2 次式として常に非負であるので，その判別式

$$D/4 = (\mathrm{Cov}(X,Y))^2 - V(X)V(Y) \leq 0$$

である．これより，

$$(\rho(X,Y))^2 \leq 1$$

が出る．また，$\rho(X,Y) = \mp 1$ ならば，

$$t = \pm\sqrt{\frac{V(X)}{V(Y)}}$$

のときには，$V(X+tY) = 0$ になる．すなわち

$$X \pm \sqrt{\frac{V(X)}{V(Y)}}Y = \text{定数}$$

□

1.5　モーメント母関数

確率変数 X に対して，

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

をモーメント母関数という．他に，非負の整数値のみをとる確率変数については

$$P_X(t) = E[t^X]$$

を確率母関数，モーメント母関数は確率変数によっては収束する t に注意を払わなければならないので

$$\phi_X(t) = E[e^{itX}]$$

を特性関数という．数学的には特性関数がもっとも意味をもつ．

定理 1

$$M_X(0)=1,\quad M_X'(0)=E(X),\quad M_X''(0)=E(X^2)$$

問題 18 X がそれぞれ 2 項分布 $\mathrm{B}(n,p)$，幾何分布 $\mathrm{Ge}(p)$，ポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$，負の 2 項分布 $\mathrm{NB}(n,p)$ の期待値と分散を計算してください．さらに，モーメント母関数 $E[e^{tX}]$ を求めてください．

解. 幾何分布は直接計算すると大変でしょう．

	期待値	分散	モーメント母関数
$\mathrm{B}(n,p)$	np	npq	$(e^tp+q)^n$
$\mathrm{Ge}(p)$	$\frac{p}{q}$	$\frac{p}{q^2}$	$\frac{q}{1-e^tp}$
$\mathrm{Po}(\lambda)$	λ	λ	$\exp[e^t\lambda-\lambda]$
$\mathrm{NB}(n,p)$	$\frac{np}{q}$	$\frac{np}{q^2}$	$\left(\frac{q}{1-e^tp}\right)^n$

□

問題 19 X は非負の整数値をとる確率変数とする．このとき

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X>k)$$

をみたすことをチェックし，これを用いて，幾何分布 $\mathrm{Ge}(p)$ の期待値を求めてください．

解.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}P(X>k) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=k+1}^{\infty}P(X=l)\\ &= \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{l-1}P(X=l)\\ &= \sum_{l=1}^{\infty}l\,P(X=l)=\sum_{l=0}^{\infty}l\,P(X=l)=E(X)\end{aligned}$$

幾何分布の場合

$$P(X>k)=\sum_{l=k+1}^{\infty}pq^l=pq^{k+1}\frac{1}{1-q}=q^{k+1}$$

したがって

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}q^{k+1}=q\frac{1}{1-q}=\frac{q}{p}$$

□

問題 20 X は値 0,1,2 の 3 つの値をとる確率変数で期待値が $\frac{7}{6}$，分散が $\frac{17}{36}$ のとき，X の確率分布を求めてください．

解.

X の値	0	1	2
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

□

問題 21 2 項分布 $\mathrm{B}(n,p)$，幾何分布 $\mathrm{Ge}(p)$，ポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ の期待値と分散をモーメント母関数を用いて計算してください．

解.

確率分布	$M(t)$	$M'(t)$	$M''(t)$
$\mathrm{B}(n,p)$	$(e^tp+q)^n$	$npe^t(e^tp+q)^{n-1}$	$npe^t(e^tnp+q)(e^tp+q)^{n-2}$
$\mathrm{Ge}(p)$	$\frac{p}{1-e^tq}$	$\frac{e^tpq}{(1-e^tq)^2}$	$\frac{e^t(1+e^tq)pq}{(1-e^tq)^3}$
$\mathrm{Po}(\lambda)$	$\exp[e^t\lambda-\lambda]$	$\lambda e^t\exp[\lambda e^t-\lambda]$	$\lambda e^t(1+\lambda e^t)\exp[\lambda e^t-\lambda]$

□

定理 2 確率変数 X と Y が $M_X(t)=M_Y(t)$ をみたすならば，X と Y は同分布である．

証明は Lévy の反転公式からしたがう．

X,Y のモーメント母関数は

$$M_{(X,Y)}(t,s)=E[e^{tX+sY}]$$

一般に $X_1,\ldots,X_n$ に対しては，$\boldsymbol{t}=(t_1,\ldots,t_n)$ を用いて，$\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)$

$$M_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t})=E[e^{\boldsymbol{tX}}]$$

により定義する．$X_1,\ldots,X_n$ が独立であることと

$$M_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t})=\prod_{i=1}^{n}M_{X_i}(t_i)$$

とは同値である．

問題 22 $X_1,X_2,\ldots$ を均等な硬貨投げとする．

$$\bar{X}=\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$$

のモーメント母関数を求めてください．

解.

$$M_1(t) = E[e^{tX_1}] = \frac{1+e^t}{2}$$

であるので，

$$\begin{aligned} M_{\bar{X}}(t) &= E[e^{t\bar{X}}] = E[e^{(tX_1+\cdots+tX_n)/n}] \\ &= M_{\boldsymbol{X}}((\frac{t}{n},\ldots,\frac{t}{n})) \\ &= \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(\frac{t}{n}) \\ &= \left(\frac{1+e^{t/n}}{2}\right)^n \end{aligned}$$

この式をテイラー展開すると

$$(1+\frac{t}{2n}+\cdots)^n \to e^{t/2}$$

右辺は，常に値 $\frac{1}{2}$ をとる確率変数 (といえるかな) に等しい．これは大数の法則になっている．□

問題 23 (2 項分布の再生性)　X と Y がそれぞれ 2 項分布 $B(n,p)$ と $B(m,p)$ にしたがい，独立とする．このとき，$X+Y$ は 2 項分布 $B(n+m,p)$ にしたがうことを示してください．

解.

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= E[e^{t(X+Y)}] \\ &= E[e^{tX}] \times E[e^{tY}] \\ &= (e^tp+q)^n(e^tp+q)^m \\ &= (e^tp+q)^{n+m} \end{aligned}$$

これを確率分布で求めるのはなかなか大変である．□

問題 24 (Poisson 分布の再生性)　X と Y がそれぞれポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ と $\mathrm{Po}(\mu)$ にしたがい，独立とする．このとき，$X+Y$ はポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda+\mu)$ にしたがうことを示してください．

解.

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= E[e^{t(X+Y)}] \\ &= E[e^{tX}] \times E[e^{tY}] \\ &= \exp[(e^t-1)\lambda] \times \exp[(e^t-1)\mu] \\ &= \exp[(e^t-1)(\lambda+\mu)] \end{aligned}$$

これは確率分布を用いても容易に示せる.

$$
\begin{aligned}
P(X+Y=k) &= \sum_{l=0}^{k} P(X=l)\times P(Y=k-l) \\
&= \sum_{l=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\mu}\frac{\mu^{k-l}}{(k-l)!} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_l \lambda^l \mu^{k-l} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}
\end{aligned}
$$

□

問題 25 負の 2 項分布 $\mathrm{NB}(n,p)$

$$P(X=k) = {}_{n+k-1}\mathrm{C}_{n-1}p^n q^k$$

は独立な幾何分布 $\mathrm{Ge}(p)$ にしたがう $Y_1,\ldots,Y_n$ の和 $X=Y_1+\cdots+Y_n$ の確率分布であることを確かめてください.

解. 負の 2 項分布のモーメント母関数は，負の 2 項展開を用いると

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= E[e^{tX}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{kt}{}_{n+k-1}\mathrm{C}_{n-1}p^n q^k \\
&= p^n \sum_{k=0}^{\infty} {}_{n+k-1}\mathrm{C}_{n-1}(e^t q)^k \\
&= p^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}(e^t q)^k \\
&= p^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)\cdots n}{k!}(e^t q)^k \\
&= p^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}(-e^t q)^k \\
&= p^n \sum_{k=0}^{\infty} {}_{-n}\mathrm{C}_k(-e^t q)^k \\
&= p^n(1-e^t q)^{-n}
\end{aligned}
$$

一方，幾何分布 $\mathrm{Ge}(p)$ のモーメント母関数は

$$M_Y(t) = E[e^{tY}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk}pq^k = \frac{p}{1-e^t q}$$

であるので，その積は

$$M_{Y_1+\cdots+Y_n}(t) = \frac{p^n}{(1-e^t q)^n}$$

またこのことから，幾何分布 $\mathrm{Ge}(p)$ は負の 2 項分布 $\mathrm{NB}(1,p)$ に等しいことがわかる． □

問題 26 (負の 2 項分布の再生性)　X, Y が独立で負の 2 項分布 $\mathrm{NB}(n,p), \mathrm{NB}(m,p)$ にしたがうとき，$X+Y$ は $\mathrm{NB}(n+m,p)$ にしたがうことを示してください．

解.

$$M_X(t) = \left(\frac{p}{1-e^t q}\right)^n, \quad M_Y(t) = \left(\frac{p}{1-e^t q}\right)^m$$

であるから

$$M_{X+Y}(t) = E[e^{t(X+Y)} = E[e^{tX}] \times E[e^{tY}] = \left(\frac{p}{1-e^t q}\right)^{n+m}$$

□

第2章　連続型確率分布

2.1　密度関数

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

を分布関数と言います．

　分布関数の性質

(1) $F_X(x)$ は単調増加関数

(2) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0, \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$

離散型の場合には，分布関数は階段型

X の値	x_1	x_2	$\cdots$
X の確率	p_1	p_2	$\cdots$

ならば

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ p_1 & x_1 \le x < x_2 \\ p_1 + p_2 & x_2 \le x < x_2 \\ \cdots & \cdots \end{cases}$$

となります．それに対して，分布関数が微分可能な場合を連続型と言い，

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

を密度関数と言います．したがって，

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx$$

をみたします．この場合，

$$P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F_X(a) - F_X(b)$$

であるので，

$$P(a < X \le b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

をみたします．したがって，

$$P(|X-a|<\varepsilon)\to 0$$

となるので，1 点の確率は 0 になり，確率を確率分布表で与えることはできません．

密度関数の性質

(1) $f_X(x)\geq 0$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx=1$

例 6 一様分布 $\mathrm{U}(a,b)$

$$f(x)=\frac{1}{b-a}\quad x\in(a,b)$$

例 7 指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}\quad x>0$$

例 8 正規分布 $\mathrm{N}(m,v)$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-(x-m)^2/v}$$

問題 27 X が正規分布 $N(m,v)$ にしたがうとする．このとき，$Y=\frac{X-m}{\sqrt{v}}$ は標準正規分布にしたがうことを確かめてください．

解． 一般には

$$P(Y\leq y]=P(X\leq y\sqrt{v}+m)=\int_{-\infty}^{y\sqrt{v}+m}\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-(x-m)^2/2v}\,dx$$

において，$s=\frac{x-m}{\sqrt{v}}$ とおけばよい．

$$M_Y(t)=E[e^{tY}]=E[e^{t(X-m)/\sqrt{v}}]=e^{-tm/sqrtv}M_X(t\sqrt{v})$$

および

$$M_X(t)=e^{mt+vt^2/2}$$

を用いてもよい．　□

問題 28 　(1) 密度関数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}|x-2| & 1\leq x\leq 3\\ Cx^2 & -1\leq x<1\end{cases}$$

をみたす C を求めてください．

(2) $[0,\pi]$ の上の密度関数 $C\sin^2 x$ とするとき，C を求めてください．

解.

$$(1)\ 1, \qquad (2)\ \frac{2}{\pi}$$

□

問題 29 連続型の確率変数 X について

$$P(X \le x) = \begin{cases} C - De^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

とするとき，C, D を定め，確率変数 X の密度関数を求めてください．

解.

$$P[X < \infty] = 1$$

であることから，$C = 1$ でなければならない．または，連続型であるときより．

$$\lim_{x \downarrow 0} P(X \le x) = 0$$

を考えると，$C = D$ をみたすことがわかる．x で微分することにより

$$f_X(x) = \begin{cases} D\lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

を得るが，$\int_0^\infty f_X(x)\,dx = 1$ より，$D = 1$ が出る． □

問題 30 (対数正規分布)　正規分布 $\mathrm{N}(m, v)$ にしたがう確率変数 X について，e^X の密度関数を求めてください．

解. $a > 0$ について

$$\begin{aligned} F_{e^X}(a) &= P(e^X \le a) = P(X \le \log a) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \int_{-\infty}^{\log a} e^{-(x-m)^2/2v}\,dx \end{aligned}$$

したがって，

$$f_{e^X}(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-(\log a - m)^2/2v} \frac{1}{a}$$

□

問題 31 (自由度 1 の χ^2 分布) 正規分布 N(0,1) にしたがう確率変数 X について，X^2 の密度関数を求めてください．

解． $a>0$ について

$$
\begin{aligned}
F_{X^2}(a) &= P(X^2 \le a) = P(-\sqrt{a} \le X \le \sqrt{a}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} e^{-x^2/2}
\end{aligned}
$$

微分して

$$
f_{X^2}(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-a/2}
$$

□

問題 32 (自由度 2 の χ^2 分布) 正規分布 N(0,1) にしたがう独立な確率変数 X,Y について，X^2+Y^2 の密度関数を求めてください．

解． X^2,Y^2 の密度関数は自由度 1 の χ^2 分布であるから

$$
P(X^2+Y^2 \le z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-u} f_{X^2}(u) f_{Y^2}(v)\, dudv
$$

であるので，密度関数は

$$
\begin{aligned}
f_{X^2+Y^2}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X^2}(u) f_{Y^2}(z-u)\, du \\
&= \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} e^{-u/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi(z-u)}} e^{-(z-u)/2}\, du \\
&= \frac{e^{-z/2}}{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{zt(z-zt)} z\, dt \quad (u = zt) \\
&= \frac{e^{-z/2}}{2\pi} B(1/2, 1/2) \\
&= \frac{1}{2} e^{-z/2}
\end{aligned}
$$

□

2.2　高次元の密度関数

確率変数 X と Y の結合分布が

$$
P(a<X<b, c<Y<d) = \int f_{(X,Y)}(x,y)\, dxdy
$$

で与えられる．より，高次元の場合も考えられる．この場合，密度関数は高次元の関数となる．

(1) $f_{(X,Y)}(x,y) \geq 0$

(2) $\int f_{(X,Y)}(x,y)\,dxdy = 1$

などとなる．

問題 33 D は $[0,1]^2$ の場合と $(0,0),(1,0),(0,1)$ を頂点とする三角形とする場合に

$$f(x,y) = Cx^2y$$

をみたすとき，それぞれの C を求めてください．

解． $D = [0,1]^2$ のときには，$C = 6$，三角形のときには

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2y\,dy = \frac{1}{60}$$

であるから，$C = 60$ □

問題 34 D は原点を中心とする半径 1 の円の第一象限にある 4 分円とする．

$$f(x,y) = C\sqrt{x^2+y^2}$$

とするとき C を求めてください．

解． $dxdy = r\,drd\theta$ より

$$\int_0^1 dr \int_0^{\pi/2} r^2\,d\theta = \frac{\pi}{6}$$

より，$C = \frac{6}{\pi}$ □

X の密度関数を求めてみよう

$$\begin{aligned} F_X(a) &= P(X < a) = P(X < a, -\infty < Y < \infty) \\ &= \int_{-\infty}^{a} dx \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dxdy \end{aligned}$$

この式を a で微分すると X の密度関数

$$f_X(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(a,y)\,dy$$

を得る．同様に

$$f_Y(b) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,b)\,dx$$

結合分布から周辺分布を導くことができる．

X と Y が独立であるとは

$$P(a < X < b, c < Y < d) = P(a < X < b) \times P(c < Y < d)$$

などと表されることを言う．3 つ以上の複数の確率変数の場合にも離散型と同様に定義される．この場合，密度関数は

$$\begin{aligned} P(a < X < b, c < Y < d) &= \int_a^b dx \int_c^d dy f_{(X,Y)}(x, y) \\ P(a < X < b) \times P(c < Y < d) &= \int_a^b f_X(x)\,dx \int_c^d f_Y(y)\,dy \end{aligned}$$

がすべての a, b, c, d について成り立つのだから，

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y)$$

が成り立つ．離散型と同様に独立であれば，周辺分布から結合分布を導くことができる．

問題 35 D は $[0, 1]^2$ のとき，

$$f(x, y) = 6x^2y$$

D が $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ を頂点とする三角形とする場合に

$$f(x, y) = 60x^2y$$

をみたすとき，X と Y の密度関数を求めてください．X と Y は独立ですか．さらに $P[X \leq \frac{1}{2}]$ を求めてください．

解． $D = [0, 1]^2$ のときには

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^1 6x^2y\,dy = 3x^2 \\ f_Y(y) &= \int_0^1 6x^2y\,dx = 2y \end{aligned}$$

この場合には独立で，$P(X \leq \frac{1}{2}] = \frac{1}{8}$

三角形のときには

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^{1-x} 60x^2y\,dy = 30(x^2 - 2x^3 + x^4) \\ f_Y(y) &= \int_0^{1-y} 60x^2y\,dx = 20(1-y)^3y \end{aligned}$$

独立ではない．

$$P[X \leq x] = 10x^3 - 15x^4 + 6x^5$$

なので $P(X \leq \frac{1}{2}] = \frac{1}{2}$．この場合，$E(X) = \frac{1}{2}, V(X) = \frac{1}{28}$，$E(Y) = \frac{1}{3}, V(Y) = \frac{2}{63}$ □

問題 36 (X, Y) の密度関数が $f_{(X,Y)}$ で与えられているとき，$X+Y$ の密度関数を求めてください．とくに，X と Y が $\mathrm{U}(0,1)$ にしたがい，独立なときの密度関数を求めてください．

解.

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(a) &= P(X+Y<a) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{a-x} f_{(X,Y)}(x,y)\,dxdy \end{aligned}$$

したがって，a で微分すれば

$$f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, a-x)\,dx$$

とくに，X と Y が $\mathrm{U}(0,1)$ にしたがい，独立なときには

$$f_{(X,Y)}(x,y) = 1, \quad 0 \le x, y \le 1$$

であるので，$0 < a - x < 1$ であることに注意すると

$$f_{X+Y}(a) = \begin{cases} \int_0^a dx = a & 0 < a < 1 \\ \int_{a-1}^1 dx = 2-a & 1 \le a < 2 \end{cases}$$

□

問題 37 X, Y は $\mathrm{U}(0,1)$ にしたがい独立なとき $P(X^2+Y^2<a)$ と $P(\max\{X,Y\}<a)$，$P(\min\{X,Y\}<a)$ を求めてください．

解. $f_{(X,Y)}(x,y) = 1$ $((x,y) \in [0,1]^2)$ であるので，

$$\begin{aligned} P(X^2+Y^2<a) &= a^2\pi/4 \\ P(\max\{X,Y\}<a) &= a^2 \\ P(\min\{X,Y\}<a) &= 1 - P(\min\{X,Y\} \ge a) = 1-(1-a)^2 \end{aligned}$$

□

問題 38 X と Y がそれぞれ正規分布 $\mathrm{N}(m_1, v_1)$ と $\mathrm{N}(m_2, v_2)$ にしたがい独立なとき，$X+Y$ の確率分布を求めてください．

解. $\mathrm{N}(m_1+m_2, v_1+v_2)$ □

問題 39 X と Y が $\mathrm{U}(0,1)$ にしたがい，独立なとき，$Z=\max\{X,Y\}$ の密度関数を求めてください．

解． $0<a<1$ について

$$\begin{aligned} F_Z(a) &= P(\max\{X,Y\}\le a)=P(X\le a, Y\le a) \\ &= P(X\le a)\times P(Y\le a) \\ &= a^2 \end{aligned}$$

したがって，密度関数 $f_Z(a)=2a$ □

問題 40 X,Y が独立で $\mathrm{Exp}(\lambda)$ にしたがうとき，$Z=\min\{X,Y\}$ の密度関数を求めてください．

解． $a>0$ について

$$\begin{aligned} F_Z(a) &= P(\min\{X,Y\}\le a)=1-P(\min\{X,Y\}>a) \\ &= 1-P(X>a,Y>a)=1-P(X>a)\times P(Y>a) \\ &= 1-\left(\int_a^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx\right)^2 \\ &= 1-\left(\left[-e^{-\lambda x}\right]_a^\infty\right)^2 \\ &= 1-e^{-2\lambda a} \end{aligned}$$

したがって

$$f_Z(a)=2\lambda e^{-2\lambda a}$$

と再び指数分布になるが，$\max\{X,Y\}$ は密度関数は

$$2\lambda e^{-\lambda a}(1-e^{-\lambda a})$$

となり，指数分布にはならない． □

問題 41 (順序統計量) X,Y,Z が $\mathrm{U}(0,1)$ にしたがい独立なとき，順序を変えて $X^{(1)}\le X^{(2)}\le X^{(3)}$ と表すとき，$X^{(2)}$ の密度関数を求めてください．

解． $0<a<1$ について

$$\begin{aligned} F_{X^{(2)}}(a) &= P(X^{(2)}\le a) \\ &= P(X,Y,Z\le a)+{}_3\mathrm{C}_1 P(X>a,Y,Z\le a) \\ &= a^3+3a^2(1-a) \end{aligned}$$

したがって

$$f_Z(a) = 3a^2 + 6a - 9a^2 = 6a - 6a^2$$

□

問題 42 (高次元の正規分布)　k 次元のベクトル $\boldsymbol{m}$ と正定値 $k \times k$ 対称行列 V について，密度関数

$$f(\boldsymbol{x}) = (\sqrt{2\pi})^k (\det V)^{-1/2} \exp[-\frac{1}{2} {}^t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}) V^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m})]$$

を高次元の正規分布という．これが密度関数であることを確かめてください．

解． V は対称行列なので，固有値はすべて実数である．また，正定値であるとは，すべての固有値が正であることである．$U^{-1}VU$ が対角行列になるように選び，$\boldsymbol{y} = U^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m})$ とおくと，

$$f(\boldsymbol{x}) = (\sqrt{2\pi})^{-k} (\det V)^{-1/2} \exp[-\frac{1}{2} {}^t\boldsymbol{y} (U^{-1}VU)^{-1} \boldsymbol{y}]$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ を固有値とし，$z_k = y_k / \sqrt{\lambda_k}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\int f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} &= \int (\sqrt{2\pi})^{-k} (\det V)^{-1/2} \exp[-\frac{1}{2} {}^t\boldsymbol{y} (U^{-1}VU)^{-1} \boldsymbol{y}]\, d\boldsymbol{y} \\
&= \int (\sqrt{2\pi})^{-k} \exp[-\frac{1}{2} {}^t\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}]\, d\boldsymbol{z} \\
&= \prod_{i=1}^{k} \int (\sqrt{2\pi})^{-1} e^{-z_i^2/2}\, dz_i = 1
\end{aligned}$$

V は分散共分散行列である．

$$\begin{aligned}
\int \boldsymbol{x}^t \boldsymbol{x} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} &= \int U \boldsymbol{y}^t \boldsymbol{y} U^{-1} (\sqrt{2\pi})^{-k} (\det V)^{-1/2} \exp[-\frac{1}{2} {}^t\boldsymbol{y} (U^{-1}VU)^{-1} \boldsymbol{y}]\, d\boldsymbol{y} \\
&= U \int \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} z_1 \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_k} z_k \end{pmatrix} (\sqrt{\lambda_1} z_1, \ldots, \sqrt{\lambda_k} z_k) \exp[-\frac{1}{2}(z_1^2 + \cdots + z_k^2)]\, d\boldsymbol{z} U^{-1} \\
&= U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix} U \\
&= V
\end{aligned}$$

□

2.3 期待値と分散

密度関数 $f_X(x)$ をもつ確率分布にしたがう確率変数 X の期待値は

$$E(X) = \int x f_X(x)\, dx$$

分散は

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = \int (x - E(X))^2 f_X(x)\, dx$$

問題 43 X を $(-\infty, \infty)$ に値をとる確率変数で

$$f_X(x) = \begin{cases} Ae^{x+1} & x < -1 \\ Bx^2 & -1 \le x < 0 \\ Ce^{-x} & x \ge 0, \end{cases}$$

が $E(X) = -1$，$V(X) = 3$ とするとき，A，B，C を求めてください．

解. $A = \frac{2}{3}$, $B = 0$, $C = \frac{1}{3}$ □

問題 44 密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(x - x_0)^2 + \gamma^2}$$

をもつ確率分布をコーシー分布という．この分布が期待値をもたないことを示してください．

解. まず，密度関数であることを示そう．$(x - x_0)/\gamma = y$ とおく．

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(x - x_0)^2 + \gamma^2}\, dx &= \frac{1}{\pi\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + ((x - x_0)/\gamma)^2}\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + y^2}\, dy \\ &= [\arctan y]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 1 \end{aligned}$$

一方，$x \in [n-1, n)$ では

$$\frac{x}{1 + x^2} \ge \frac{n-1}{n^2 + 1} \ge \frac{n-1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1} - 2\frac{1}{(n+1)^2}$$

この和は発散することから

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{1 + x^2}\, dx$$

は発散する．したがって，期待値は存在しない． □

離散型と同様に

期待値の性質

(1) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

(2) $E(aX+b)=aE(X)+b$

(3) X と Y が独立ならば，$E(XY)=E(X)\times E(Y)$

分散の性質

(1) $V(aX+b)=a^2V(X)$

(2) $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

(3) X と Y が独立ならば，$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

問題 45 $Y=\phi(X)$ とするとき，

$$E(Y)=\int \phi(x)f_X(x)\,dx$$

を $\phi(x)=ax+b$，$\phi(x)=x^2$，$\phi(x)=e^{tx}$ のときにみたすことを示してください．

解.

$$P(Y\le y)=P(\phi(X)\le y)=P(X\in\phi^{-1}(-\infty,y))$$

ここで符号に注意すれば

$$f_Y(y)=\frac{d}{dt}P(Y\le y)=\sum_{x:\ \phi(x)=y} f_X(x)|\phi'(x)|^{-1}$$

これより

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int y\,f_Y(y)\,dy \\ &= \int y \sum_{x:\ \phi(x)=y)} f_X(x)|\phi'(x)|^{-1}\,dy \\ &= \int \phi(x)f_X(x)\,dx \end{aligned}$$

とくに $\phi(x)=ax+b$ ならば

$$P(Y\le y)=P(aX+b\le y)=\begin{cases} P(X\le \frac{y-b}{a}) & a>0 \\ P(X\ge \frac{y-b}{a}) & a<0 \end{cases}$$

符号に注意して

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(\frac{y-b}{a})\frac{1}{a} & a>0 \\ -f_X(\frac{y-b}{a})\frac{1}{a} & a<0 \end{cases} = f_X(\frac{y-b}{a})\left|\frac{1}{a}\right|$$

これより，$a<0$ のときには，変数変換 $x=\frac{y-b}{a}$ により，積分範囲が $(+\infty,-\infty)$ になることに注意すれば

$$\begin{aligned}E(Y) &= \int y f_Y(y)\,dy \\ &= \int y f_X(\frac{y-b}{a})\left|\frac{1}{a}\right|dy \\ &= \int (ax+b) f_X(x)\,dx\end{aligned}$$

同様に，$\phi(x)=x^2$ のときには

$$P(Y\le y)=P(X^2\le x)\begin{cases}P(-\sqrt{x}\le X\le\sqrt{x}) & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

により

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}+f_X(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}$$

これより

$$\begin{aligned}E(Y) &= \int y f_Y(y)\,dy \\ &= \int_0^\infty y(f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y}))\frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy \\ &= \int_0^\infty y f_X(sqrty)\frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy+\int_0^\infty y f_X(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy \\ &= \int_0^\infty x^2 f_X(x)\,dx+\int_0^{-\infty} x^2 f_X(x)\,(-dx) \\ &= \int x^2 f_X(x)\,dx\end{aligned}$$

$\phi(x)=e^{tX}$ のときには，$y\ge 0$ について

$$P(Y\le y)=\begin{cases}P(X\le\frac{1}{t}\log y) & t>0\\ P(X\ge\frac{1}{t}\log y) & t<0\end{cases}$$

より

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(\frac{1}{t}\log y)\frac{1}{ty} & t>0\\ -f_X(\frac{1}{t}\log y)\frac{1}{ty} & t<0\end{cases}$$

これより，$t>0$ ならば

$$\begin{aligned}E(Y) &= \int y f_Y(y)\,dy \\ &= \int_0^\infty y f_X(\frac{1}{t}\log y)\frac{1}{ty}\,dy \\ &= \int e^{tx} f_X(x)\,dx\end{aligned}$$

$t < 0$ でも同様に計算できる． □

一般に $Y = \phi(X)$ は ϕ が C^1 級ならば

$$E(Y) = \int \phi(x) f_X(x)\,dx$$

が成立する．

問題 46 確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ に対して

$$\Sigma = \begin{pmatrix} V(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_1, X_n) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & V(X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_n, X_1) & \mathrm{Cov}(X_n, X_2) & \cdots & V(X_n) \end{pmatrix}$$

を分散共分散行列という．この行列が対称行列であること，固有値がすべて非負であることを示してください．

解． 対称行列であることは $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$ より明らか．2 次形式

$$(a_1, \ldots, a_n)\Sigma \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

が，確率変数 $a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$ の分散

$$\begin{aligned} V(\sum_{i=1}^n a_i X_i) &= E[(\sum_{i=1}^n a_i(X_i - E(X_i))^2] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j E[(X_i - E(X_i)(X_j - E(X_j)] \\ &= (a_1, \ldots, a_n)\Sigma \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

になっていることから非負定値であることがでる． □

問題 47 $E[|X - a|]$ および $E[(X - a)^2]$ を最小にする a を求めてください．

解． メディアンと期待値である．

$$\begin{aligned}\frac{d}{da}E(|X-a|) &= \frac{d}{da}\int |X-a|\,dP \\ &= \frac{d}{da}\left(\int_{X>a}(X-a)\,dP + +\int_{X\le a}(a-X)\,dP\right) \\ &= \int_{X>a} -\,dP + \int_{X\le a}dP \\ &= -P(X>a)+P(X\le a) = 2P(X\le a)-1\end{aligned}$$

したがって，最小になるのは $P(X \le a) = \frac{1}{2}$ となる場合である．

$$\begin{aligned}E[(X-a)^2] &= \int (X-a)^2\,dP \\ &= \int [(X-E(X))+(E(X)-a)]^2\,dP \\ &= \int (X-E(X))^2\,dP + (E(X)-a)^2\end{aligned}$$

より，$a = E(X)$ のときである．　□

2.4　モーメント母関数

$$M(t) = E[e^{tX}] = \int e^{tx} f_X(x)\,dx$$

をモーメント母関数という．これは密度関数の Laplace 変換であり，特性関数は密度関数の Fourier 変換であることがわかる．離散型と同様に

$$M(0)=1,\quad M'(0)=E(X),\quad M''(0)=E(X^2)$$

定理 3 確率変数 X と Y が $M_X(t) = M_Y(t)$ をみたすならば，X と Y は同分布である．

特性関数の一意性 (Lévy の反転公式) からこの証明ができる．

問題 48 正規分布 $\mathrm{N}(m,v)$，指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$ のモーメント母関数を求めて，期待値と分散を計算してください．

解．

	$M(t)$	期待値	分散
$\mathrm{N}(m,v)$	$e^{mt+vt^2/2}$	m	v
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

□

離散型と同様に，$X_1,\dots,X_n$ に対しては，$\boldsymbol{t}=(t_1,\dots,t_n)$ を用いて，$\boldsymbol{X}=$

$(X_1,\dots,X_n)$

$$M_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t})=E[e^{\boldsymbol{tX}}]$$

により定義する．$X_1,\dots,X_n$ が独立であることと

$$M_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t})=\prod_{i=1}^{n}M_{X_i}(t_i)$$

とは同値である．

問題 49 $X_1,X_2,\dots$ を値 ±1 を確率 $\frac{1}{2}$ ずつでとる独立な確率変数とする．このとき，$\bar{X}=X_1+\cdots+X_n$ について，$\frac{\bar{X}}{\sqrt{n}}$ の特性関数を求めてください．

解.

$$M_1(t)=E[e^{tX_1}]=\frac{e^{-t}+e^{t}}{2}$$

なので

$$\begin{aligned}
M_{\bar{X}/\sqrt{n}}(t) &= E[e^{t\bar{X}/n}]\\
&= M_{\boldsymbol{X}}(\frac{t}{\sqrt{n}})\\
&= \prod_{i=1}^{n}M_{X_i}(\frac{t}{\sqrt{n}})\\
&= \left(\frac{e^{-t/\sqrt{n}}+e^{t/\sqrt{n}}}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

この式をテイラー展開すると

$$(1+\frac{t^2}{n}+\cdots)^n\to e^{t^2}$$

を得る．右辺は N(0, 2) のモーメント母関数である．これは中心極限定理に対応している．ここで，$E(X_i)=0$ かつ $V(X_i)=2$ であることに注意すること．□

問題 50 2 項分布 $B(n,p)$ にしたがう確率変数 X において，$\frac{X}{n}$ および $\frac{X-np}{\sqrt{npq}}$ のモーメント母関数を求め，その $n\to\infty$ の極限を求めてください．

解.

$$M_X(t)=(e^tp+q)^n$$

であるから

$$\begin{aligned} M_{X/n}(t) &= E[e^{tX/n}] = (e^{nt/n}p+q)^n \\ &= ((1+\frac{t}{n}+\cdots)p+q)^n \\ &= (1+\frac{pt}{n}+\cdots)^n \to e^{pt} \end{aligned}$$

すなわち，$X \to p$ を示している．

$$\begin{aligned} M_{(X-np)/\sqrt{npq}}(t) &= E[e^{t(X-np)/\sqrt{npq}}] \\ &= M_X(\frac{t}{\sqrt{npq}})e^{-tnp/\sqrt{npq}} \\ &= (e^{t/\sqrt{npq}}p+q)^n e^{-tnp/\sqrt{npq}} \\ &= (((1+\frac{t}{\sqrt{npq}}+\frac{t^2}{2npq}+\cdots)p+q)(1-\frac{pt}{\sqrt{npq}}+\frac{p^2t^2}{2npq}+\cdots))^n \\ &= (1+\frac{p^2t^2}{2npq}+\frac{pt^2}{npq}-\frac{p^2}{npq}+\cdots)^2 \\ &= (1+\frac{t^2}{2n})^n \to e^{t^2/2} \end{aligned}$$

すなわち $(X-np)/\sqrt{npq} \to N(0,1)$ を示している．　□

問題 51 (正規分布の再生性)　X と Y がそれぞれ正規分布 $N(m,v)$ と $N(m',v')$ にしたがい，独立なとき，$X+Y$ は $N(m+m',v+v')$ にしたがう．

解.

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= E[e^{t(X+Y)}] = E[e^{tX}] \times E[e^{tY}] \\ &= \exp[mt+\frac{vt^2}{2}] \times \exp[m't+\frac{v't}{2}] \\ &= \exp[(m+m')t+\frac{(v+v')t^2}{2}] \end{aligned}$$

これは，畳み込みでも証明できる．$(x-m)+(y-m')=s$，$y-m'=t$ と

おくとヤコビアンが 1 に等しいことを用いる．

$$
\begin{aligned}
P(X+Y \leq z) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{vv'}}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} dy\, e^{-(x-m)^2/2v} \times e^{-(y-m')/2v'} \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{vv'}}\int_{-\infty}^{z-(m+m')} ds \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-(s-t)^2/2v-t^2/2v'} \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{vv'}}\int_{-\infty}^{z-(m+m')} ds \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \exp[-\frac{v+v'}{2vv'}(t-\frac{v's}{v+v'})^2 - \frac{vv's^2}{(v+v')^2}] \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{vv'}}\int_{-\infty}^{z-(m+m')} \exp[-\frac{s^2}{2(v+v')}] \times \sqrt{2\pi\frac{vv'}{v+v'}}\, ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(v+v')}}\int_{-\infty}^{z-(m+m')} \exp[-\frac{s^2}{2(v+v')}]\, ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(v+v')}}\int_{-\infty}^{z} \exp[-\frac{(s-(m+m'))^2}{2(v+v')}]\, ds
\end{aligned}
$$

□

2.5 その他の連続型確率分布

(1) $X_1, \ldots, X_n$ を独立で標準正規分布にしたがうとする．このとき

$$X_1^2 + \cdots + X_n^2$$

の確率分布を自由度 $n-1$ の χ^2 分布という．

(2) X は標準正規分布にしたがい，Y が自由度 n の χ^2 分布にしたがうとき，$\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ の確率分布を自由度 n の t 分布という．

(3) X, Y をそれぞれ自由度 m, n の χ^2 分布にしたがい，独立とする．このとき

$$\frac{X/m}{Y/n}$$

の確率分布を自由度 (m, n) の F 分布という．

それぞれの密度関数は

$$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2} \quad (\text{自由度 } n \text{ の } \chi^2 \text{ 分布})$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}B(n/2, 1/2)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \quad (\text{自由度 } n \text{ の t 分布})$$

$$\frac{2}{B(m/2, n/2)} \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} x^{m/n-1} \left(1 + \frac{mx}{n}\right)^{-(m+n)/2} \quad (\text{自由度 } (m, n) \text{ の F 分布})$$

問題 52 自由度 n の χ^2 分布のモーメント母関数は

$$M_X(t) = (1-2t)^{-n/2}$$

に等しいことを示してください．

解． $x(1/2-t) = y$ とおくと

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{tx} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}\,dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x(1/2-t)}\,dx \\ &= \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^\infty \left(\frac{y}{1/2-t}\right)^{n/2-1} e^{-y} \frac{dy}{1/2-t} \\ &= \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} (1/2-t)^{-n/2} \int_0^\infty y^{n/2-1} e^{-y}\,dy \\ &= (1-2t)^{-n/2} \end{aligned}$$

□

定理 4 (コクランの定理) $X_1,\ldots,X_n$ は標準正規分布 $N(0,1)$ にしたがい，独立とする．$Y_1,\ldots,Y_k$ はそれぞれランク $n_1,\ldots,n_k$ の 2 次形式

$$Y_i = (X_1,\ldots,X_n) A_i \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix}$$

で表され，

$$X_1^2 + \cdots + X_n^2 = Y_1^2 + \cdots + Y_k^2$$

をみたすとする．このとき，$Y_1,\ldots,Y_k$ が自由度 $n_1,\ldots,n_k$ の独立な χ^2 分布にしたがう必要十分条件は

$$n_1 + \cdots + n_k = n$$

である．

証明． 自由度 n の χ^2 分布のモーメント母関数は $(1-2t)^{-n/2}$ であるので，独立な自由度 $n_1,\ldots,n_k$ な χ^2 分布にしたがう $Y_1,\ldots,Y_k$ に対して

$$M_{Y_1+\cdots+Y_k}(t) = \prod_{i=1}^k (1-2t)^{-n_i/2} = (1-2t)^{-(n_1+\cdots+n_k)/2}$$

と自由度 $n_1+\cdots+n_k$ の χ^2 分布のモーメント母関数に等しくなる．$X_1^2+\cdots+X_n^2=Y_1^2+\cdots+Y_k^2$ より，

$$n=n_1+\cdots+n_k$$

をみたす．逆に

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}Y_1\\ \vdots\\ Y_k\end{pmatrix}$$

と表すことにすると

$$Y_i={}^t\boldsymbol{X}A_i\boldsymbol{X}$$

とすると，$n=n_1+\cdots+n_k$ より，ユニタリ行列

$$U=\begin{pmatrix}U_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & U_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & U_k\end{pmatrix}$$

が存在して

$$U^{-1}\begin{pmatrix}A_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & A_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & A_k\end{pmatrix}U=B$$

を対角行列 B にできる．一方

$$\begin{aligned}{}^t\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y} &= {}^t\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}A_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & A_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & A_k\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\\ &= {}^t\boldsymbol{X}UBU^{-1}\boldsymbol{X}\end{aligned}$$

また，仮定より ${}^t\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}={}^t\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}$ より，$UBU^{-1}=E$，すなわち $B=U^{-1}EU$ は単位行列 E でなくてはならない．そこで，

$$U^{-1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Z}$$

とおくと

$${}^t\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}={}^t\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}$$

と表せる．$Z_1,\ldots,Z_n$ の確率分布が標準正規分布にしたがい，独立であることを示せば良い．$\boldsymbol{t}={}^t(t_1,\ldots,t_n)$ と $\boldsymbol{s}=U\boldsymbol{t}={}^t(s_1,\ldots,s_n)$ とおくと

$$
\begin{aligned}
M_{(Z_1,\ldots,Z_n)}(\boldsymbol{t}) &= E[e^{t_1Z_1\cdots+t_nZ_n}] \\
&= E[e^{(\boldsymbol{t},\boldsymbol{Z})}] \\
&= E[e^{(U\boldsymbol{t},U\boldsymbol{Z})}] \\
&= E[e^{(U\boldsymbol{t},\boldsymbol{X})}] \\
&= \prod_{i=1}^{n} E[e^{s_iX_i}] \\
&= \prod_{i=1}^{n} \exp[s_i^2/2] \\
&= \exp[(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})/2] \\
&= \exp[(U^{-1}\boldsymbol{s},U^{-1}\boldsymbol{s})/2] \\
&= \exp[(\boldsymbol{t},\boldsymbol{t})/2] = e^{t_1^2/2+\cdots+t_n^2/2}
\end{aligned}
$$

は n 個の独立な標準正規分布のモーメント母関数である．これで，$Z_1,\ldots,Z_n$ は独立で標準正規分布にしたがうことが示せた．□

$X_1,\ldots,X_n$ を独立で標準正規分布にしたがうとする．このとき

$$
\begin{aligned}
\bar{X} &= \frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \\
S_X^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \\
\hat{S}_X^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2
\end{aligned}
$$

と表す．

コクランの定理より $n(\bar{X})^2, \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ は独立でそれぞれ自由度 1 と $n-1$ の χ^2 分布にしたがう．

$$
A=\begin{pmatrix} 1/n & \cdots & 1/n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/n & \cdots & 1/n \end{pmatrix}, \quad
B=\begin{pmatrix} 1-1/n & -1/n & \cdots & -1/n \\ -1/n & 1-1/n & \cdots & -1/n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1/n & -1/n & \cdots & 1-1/n \end{pmatrix}
$$

これより

$$
\frac{\sqrt{n}\bar{X}}{\sqrt{\sum(X_i-\bar{X})/(n-1)}}=\frac{\bar{X}}{\sqrt{S_X^2/(n-1)}}=\frac{\bar{X}}{\sqrt{\hat{S}_X^2/n}}
$$

は自由度 $n-1$ の t 分布にしたがう．

- Γ 分布:$\Gamma(p,a)$

$$f(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax}$$

  平均 $\frac{p}{a}$，分散 $\frac{p}{a^2}$，モーメント母関数 $\left(\frac{a}{a-t}\right)^p$

  再生性 $\Gamma(p,a) + \Gamma(q,a) = \Gamma(p+q,a)$

  - 指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$ は $\Gamma(1,\lambda)$
  - 自由度 n の χ^2 分布は $\gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$

- β 分布: $\beta(a,b)$

$$f(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{p-1}(1-x)^{b-1}, \quad (0 < x < 1)$$

  平均 $\frac{a}{a+b}$，分散 $\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

問題 53 $U_1,\ldots,U_n$ を独立で一様分布 $\mathrm{U}(0,1)$ にしたがう確率変数とする．その順序統計量を $U^{(1)} \leq U^{(2)} \leq \cdots \leq U^{(n)}$ と並べ直すと $U^{(k)}$ の確率分布は $\beta(k, n-k-1)$ であることを示してください．

解． 帰納法で確かめる．

$$P(U^{(n} \leq x) = P(U_1 \leq x,\ldots,U_n \leq x) = x^n$$

したがって，

$$B(n,1) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{n}$$

に注意すると，密度関数は

$$f_{U^{(n)}}(x) = nx^{n-1} = \frac{1}{B(n,1)} \times {}_{n-1}\mathrm{C}_1 x^{n-1}(1-x)^{1-1}$$

また

$$\frac{1}{B(k,n-k+1)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\Gamma(n-k+1)} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

に注意する．そこで $k+1$ まで成立したとすると

$$\begin{aligned} P(U^{(k)} \leq x) &= P(U^{(k+1)} \leq x) + {}_n\mathrm{C}_k P(U_1,\ldots,U_k \leq x, U_{k+1},\ldots,U_n > x) \\ &= \int_0^x \frac{n!}{k!(n-k-1)!} t^k (1-t)^{n-k-1}\,dt + \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

これを x で微分すると，$U^{(k)}$ の密度関数は

$$
\begin{aligned}
&\frac{n!}{k!(n-k-1)!}x^k(1-x)^{n-k-1}+\frac{n!}{k!(n-k)!}kx^{k-1}(1-x)^{n-k}\\
&\quad -\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(n-k)(1-x)^{n-k-1}\\
&=\frac{n!}{k!(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}\left((n-k)x+k(1-x)-(n-k)x\right)\\
&=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}\\
&=\frac{1}{B(k,n-k+1)}x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}
\end{aligned}
$$

□

2.6 Γ 関数

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \qquad (x>0)$$

広義積分

- $t=\infty$ のところ，$t^{x-1}\leq e^{t/2}$ が十分大きな t で成り立つので
$$t^{x-1}e^{-t}\leq e^{-t/2} \qquad \text{for suffciently large } t$$
- $0<x<1$ のときの $t=0$
$$t^{x-1}e^{-t}\leq t^{x-1}$$
これと
$$\int_0^1 t^{x-1}\,dt=\left[\frac{1}{x}t^x\right]_0^1=\frac{1}{x}$$
により，広義積分可能が出る．

(1) $\Gamma(1)=1$

(2) $x>1$ について
$$\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)$$

後者は部分積分

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt\\
&= \left[t^{x-1}(-e^{-t})\right]_0^\infty-\int_0^\infty (x-1)t^{x-2}(-e^{-t})\,dt\\
&= (x-1)\Gamma(x-1)
\end{aligned}
$$

例 9　(1) 帰納法により

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

(2)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

なぜなら

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t}\, dt \\
&= 2\int_0^\infty e^{-x^2}\, dt \qquad (t = x^2, dt = 2xdx = 2t^{1/2}dx) \\
&= \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

2.7　B 関数

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx \qquad (p, q > 0)$$

広義積分

- $0 < p < 1$ で $x = 0$，$0 < q < 1$ のときは $0 < x < \frac{1}{2}$ とすると

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \le \begin{cases} x^{p-1} & q \ge 1 \\ x^{p-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{q-1} & 0 < q < 1 \end{cases}$$

そこで

$$\int_0^1 x^{p-1}\, dx = \frac{1}{p}\left[x^p\right]_0^1 = \frac{1}{p}$$

で広義積分可能になる.

- $0 < q < 1$ で $x = 1$

2.7.1　e^{-x^2} の積分

補題 1

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

証明. この証明は，重積分の極座標変換によるもの，ベータ関数を使うものがある．極座標変換によるもの，まず，$e^{-(x^2+y^2)}$ は連続関数なので，重積分と累次積分が一致することから，

$$\int_{\sqrt{x^2+y^2}\le N} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \le \left(\int_0^N e^{-x^2}\,dx\right)^2 \le \int_{\sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{2}N} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

ここで，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおく変数変換のヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

なので，ヤコビアンはその行列式の r であることを用いると

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{x^2+y^2}\le N} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^N e^{-r^2}\frac{rdr}{2} \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{N^2} e^{-t}\,dt \qquad (t = r^2, dt = 2rdr) \\ &= \frac{\pi}{4}(1-e^{-N^2}) \end{aligned}$$

により $\int e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$ は第一象限で広義積分可能で，その値は $\frac{\pi}{4}$ である．これより，補題の証明が終わる． □

別証明:累次積分の交換だけで証明が可能である．

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-x(1+y^2)}\,dy\right)dx &= \int_0^\infty e^{-x}\left(\int_0^\infty e^{-xy^2}\,dy\right)dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt\right)dx \qquad (\sqrt{y} = t) \\ &= \int_0^\infty e^{-x}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \times I \\ &= \int_0^\infty e^{-s^2}2\,ds \times I \qquad (\sqrt{x} = s) \\ &= 2I^2 \end{aligned}$$

これと次式を用いればよい．

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-x(1+y^2)}\,dx\right)dy &= \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\,dy \\ &= [\arctan y]_0^\infty = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

定理 5 **(微分と積分の交換)**　f が $[a,b]\times[c,d]$ で C^1 級とする．このとき，

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

証明.

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_a^b f(x,y)\,dx \\ g(y) &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} f(x,y)\,dx \end{aligned}$$

とおく．Fubini の定理より

$$\begin{aligned} \int_c^d g(y)\,dy &= \int_a^b\int_c^d \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dydx \\ &= \int_a^b (f(x,d)-f(x,c))\,dx \\ &= G(d)-G(c) \end{aligned}$$

$d\to c$ ととれば，微積分の基本定理より $G'(c)=g(c)$. □

この応用として

補題 2

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

の別証明:

証明.

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(\int_0^t e^{-x^2}\,dx\right)^2 \\ g(t) &= \int_0^1 e^{-(1+x^2)t^2}\frac{dx}{1+x^2} \end{aligned}$$

とおくと，微分と積分の交換より

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2\int_0^t e^{-x^2}\,dx\times e^{-t^2} \\ g'(t) &= \int_0^1 (-2t(1+x^2))e^{-(1+x^2)t^2}\frac{dx}{1+x^2} \\ &= -2\int_0^1 te^{-(1+x^2)t^2}\,dx \end{aligned}$$

$t\neq 0$ で，$u=tx$ とおくと

$$g'(t) = -2\int_0^t e^{-t^2-u^2}\,du = -f'(t)$$

したがって， $f(t)+g(t)$ は定数である．一方，

$$f(0)+g(0)=0+\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$$

ここで

$$e^{-(1+x^2)t^2}\frac{1}{1+x^2}\leq e^{-t^2}$$

なので，

$$g(t)\leq \int_0^1 e^{-t^2}\,dx=e^{-t^2}\to 0 \quad (t\to\infty)$$

これより，

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\frac{\pi}{4}$$

□

補題 3

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

証明． 連続関数なので，累次積分を重積分に置き換えて

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= \lim_{\substack{N\to\infty\\ c\downarrow 0}}\int_c^N\int_c^N e^{-x-y}x^{p-1}y^{q-1}\,dxdy\\
&= \lim_{D}\int_D e^{-x-y}x^{p-1}y^{q-1}\,dxdy\\
&\quad (u=x+y, v=\frac{x}{x+y}\text{ と変数変換して})\\
&= \lim_{M\to\infty}\int_0^M\left(\lim_{\substack{a\downarrow 0\\ b\uparrow 1}}\int_a^b e^{-u}(uv)^{p-1}(u-uv)^{q-1}u\,dv\right)du\\
&= \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-u}u^{p+q-1}\,du\lim_{\substack{a\downarrow 0\\ b\uparrow 1}}\int_a^b v^{p-1}(1-v)^{q-1}\,dv\\
&= \Gamma(p+q)\times B(p,q)
\end{aligned}$$

ここで，$x=uv$，$y=u-uv$ に注意して，ヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v & u\\ 1-v & -u\end{pmatrix}$$

なので，その行列式は $-u$，したがって，ヤコビアンは u であることを用いた．□

補題 4 (1) $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi$

(2) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

証明.　後者は,

$$\pi = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{\Gamma(1)} = \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2$$

より出る．まず,

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

その 1.　$\sqrt{\frac{1-x}{x}} = t$ とおくと，$x = \frac{1}{1+t^2}$ なので，$dx = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}\,dt$．したがって,

$$\begin{aligned} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \int_\infty^0 \sqrt{1+t^2}\,\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,\frac{-2t}{(1+t^2)^2}\,dt \\ &= 2\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} \\ &= 2\Big[\arctan t\Big]_0^\infty = \pi \end{aligned}$$

その 2.

$$\begin{aligned} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1/4-(1/2-x)^2}} \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1/4-t^2/4}}\,\frac{dt}{2} \qquad \left(t = \frac{1}{2} - x\right) \\ &= \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \Big[\arcsin t\Big]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \end{aligned}$$

最後の行は

$$= \Big[-\arccos t\Big]_{-1}^1 = -(0-\pi) = \pi$$

としてもよい．　□

問題 54

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$$

を示してください．

証明.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\sin^m x\cos^n x\,dx &= \int_0^1 t^{m/2}(1-t)^{n/2}\frac{dt}{2\sqrt{t(1-t)}} \quad (\sin^2 x = t)\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{(m-1)/2}(1-t)^{(n-1)/2}\,dt\\ &= \frac{1}{2}B\Big(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\Big)\end{aligned}$$

□

問題 55 半径 1 の n 次元球の体積を求めてください.

証明.

$$I_n(x^2) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx_1 \int_{-\sqrt{1-x^2-x_1^2}}^{\sqrt{1-x^2-x_1^2}} \cdots \int_{-\sqrt{1-x^2-\cdots-x_{n-1}^2}}^{\sqrt{1-x^2-\cdots-x_{n-1}^2}} dx_n$$

とおくと，$I_n(0)$ が n 次元球の体積になる．とくに

$$I_1(x^2) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx_1 = 2\sqrt{1-x^2}$$

帰納法の仮定

$$I_n(x^2) = c_n(1-x^2)^{n/2}$$

とおくと，上から $c_1 = 2$．一方，

$$\begin{aligned}I_n(x^2) &= \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} I_{n-1}(x^2+x_1^2)\,dx_1\\ &= c_{n-1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-x_1^2)^{(n-1)/2}\,dx_1\\ &= c_{n-1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-x^2)^{(n-1)/2}(1-\sin^2\theta)^{(n-1)/2}\sqrt{1-x^2}\cos\theta\,d\theta \quad (x_1 = \sqrt{1-x^2}\sin\theta)\\ &= c_{n-1}(1-x^2)^{n/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^n\theta\,d\theta\\ &= c_{n-1}(1-x^2)^{n/2}B\Big(\frac{1}{2},\frac{n+1}{2}\Big)\end{aligned}$$

これより

$$
\begin{aligned}
c_n &= c_{n-1} B\Big(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\Big) \\
&= c_{n-2} B\Big(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\Big) B\Big(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\Big) \\
&= \cdots \\
&= c_1 B\Big(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\Big) B\Big(\frac{1}{2}, \frac{4}{2}\Big) \cdots B\Big(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\Big) \\
&= 2 \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(4/2)} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(4/2)}{\Gamma(5/2)} \cdots \frac{\Gamma(1/2)\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma((n+2)/2)} \\
&= 2\pi^{(n-1)/2} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma((n+2)/2)} \\
&= \pi^{n/2} \frac{1}{\Gamma((n+2)/2)}
\end{aligned}
$$

□

2.8　精密法

$$
\begin{aligned}
P(B(n,p) \geq k) &= P(\beta(k, n-k+1) \leq p) \\
P(B(n,p) \geq k) &= P(\frac{k}{k + (n-k-1)F_{n-k+1,k}} \leq p)
\end{aligned}
$$

参考

$$\frac{\Gamma(m,a)}{\Gamma(m+n,a)} = \beta(m,n)$$

と Γ 分布の再生性 $\Gamma(m,a) + \Gamma(n,a) = \Gamma(m+n,a)$ を $a = \frac{1}{2}$ で用いて，Γ 分布と χ^2 分布の関係を用いると

$$\beta(m,n) = \frac{1}{1 + (m/n)F_{m,n}}$$

を用いている．

2.8.1　ポアソン分布の精密法

まず，ポアソン過程 N_t を定義しよう．

(1) $t > 0$ について，$P(N_t = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$，つまり，$N_t$ は $\mathrm{Po}(\lambda t)$ にしたがう．つまり，平均 λt のポアソン分布にしたがう．

(2) $0 < t_1 < t_2 < \cdots$ のとき，$N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, N_{t_3} - N_{t_2}, \ldots$ は独立

(3) $t > s$ として，$N_t - N_s$ は N_{t-s} と同分布，つまり $\mathrm{Po}(\lambda(t-s))$ にしたがう．

T_k で $t < T_k$ で $N_t = k-1$，$t > T_k$ で $N_t = k$ となる時刻とする．

$$\begin{aligned} P(T_1 \le t) &= P(N_t \ge 1) = \sum_{k=1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

より T_1 は平均 $\frac{1}{\lambda}$ の指数分布にしたがう．同様に

$$\begin{aligned} P(T_2 - T_1 \le t) &= \int_0^\infty P(N_{t+s} \ge 2, T_1 \in ds) \\ &= \int_0^\infty P(N_{t+s} - N_s \ge 1, N_{s+ds} \ge 1, N_s = 0) \\ &= \int_0^\infty P(N_{t+s} - N_s \ge 1) P(N_{s+ds} \ge 1, N_s = 0) \\ &= \int_0^\infty P(N_{t+s} - N_s \ge 1) e^{-\lambda s}\, ds \\ &= \int_0^\infty P(N_t \ge 1) e^{-\lambda s}\, ds = P(N_t \ge 1) = 1 - e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

と $T_2 - T_1$ も平均 $\frac{1}{\lambda}$ の指数分布にしたがう．独立性も同様にしたがう．

これを用いるとポアソン分布の χ^2 分布の関係がでてくる．指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda \mathrm{t})$ は $\Gamma(1, \lambda t)$ であることを用いると

$$T_k = T_1 + \sum_{i=1}^{k} (T_i - T_{i-1})$$

は独立な指数分布の和であることと Γ 分布の再生性から T_k は $\Gamma(k, \lambda t)$ にしたがう．

Γ 分布の再生性

$$\Gamma(p, a) + \Gamma(q, a) = \Gamma(p+q, a)$$

それぞれに対応する確率変数を X, Y とし，独立とする．このとき，

$$
\begin{aligned}
F_{X+Y}(x) &= P(X+Y \leq x) \\
&= \int_0^x \frac{a^p}{\Gamma(p)} y^{p-1} e^{-ay} \left(\int_0^{x-y} \frac{a^q}{\Gamma(q)} z^{q-1} e^{-az}\, dz \right) dy \\
&= \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^x e^{-as} \left(\int_0^s t^{q-1} (s-t)^{p-1}\, dt \right) ds \quad (s = y+z, t = y) \\
&= \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^x e^{-as} s^{p+q-1} \left(\int_0^1 r^{q-1} (1-r)^{p-1}\, dr \right) ds \quad (t = sr) \\
&= \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^x e^{-as} s^{p+q-1}\, ds\, B(p,q) \\
&= \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p+q)} \int_0^x e^{-as} s^{p+q-1}\, ds
\end{aligned}
$$

□

これより

$$
\begin{aligned}
P(N_t \leq k) &= 1 - P(N_t > k) = 1 - P(N_t \geq k+1) = 1 - P(T_{k+1} < t) \\
&= 1 - \int_0^t \frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma(k+1)} x^k e^{-\lambda x}\, dx
\end{aligned}
$$

である．ここで $2\lambda x = y$ と変数変換すると

$$
\text{上の式} = 1 - \int_0^{2\lambda t} \frac{(1/2)^{k+1}}{\Gamma(k+1)} y^k e^{-y/2}\, dy
$$

がでる．右辺の被積分関数は $\Gamma(k+1, 1/2) = \Gamma\left(\frac{2(k+1)}{2}, \frac{1}{2}\right) =$ 自由度 $2(k+1)$ の χ^2 分布の密度関数である．つまり平均 λt のポアソン分布が k より小さい確率は自由度 $2(k+1)$ の χ^2 分布が $2\lambda t$ 以上である確率と等しいことが示せた．つまり，平均 λ のポアソン分布の分布関数 F_λ は自由度 $2(k+1)$ の χ^2 分布の密度関数 $f_{2(k+1)}$ を用いると

$$
F_\lambda(k) = \sum_{i=0}^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = \int_{2\lambda}^\infty f_{2(k+1)}(x)\, dx = 1 - F_{2(k+1)}(2\lambda) \tag{2.1}
$$

とみなせる．ここで $F_{2(k+1)}$ は自由度 $2(k+1)$ の χ^2 分布の分布関数である．

定理 6 (ポアソン分布の精密法)　X をポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ にしたがうとする．このとき，Y を自由度 $2(k+1)$ の χ^2 分布にしたがう Y を用いると

$$
P(X \leq k) = 1 - P(Y \leq 2\lambda)
$$

と表される．

これを用いると λ の推定には，データに対応する確率変数を $X_1, \ldots, X_n$ とすると，これらは独立なのでポアソン分布の再生性より，$X_1 + \cdots + X_n$ は平均 $n\lambda$ のポアソン分布にしたがう．

Poisson 分布の再生性　X は $\mathrm{Po}(\lambda)$，Y は $\mathrm{Po}(\mu)$ で独立とすると

$$\begin{aligned}
P(X+Y=k) &= \sum_{l=0}^{k} P(X=l)\times P(Y=k-l) \\
&= \sum_{l=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^l}{l!}e^{-\mu}\frac{\mu^{k-l}}{(k-l)!} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k} {}_{k+l}\mathrm{C}_l\lambda^l\mu^{k-l} \\
&= e^{-\lambda+\mu}\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}
\end{aligned}$$

より，$X+Y$ は $\mathrm{Po}(\lambda+\mu)$ にしたがう． □

そこで信頼係数を 5%とすると $k=\sum_{i=0}^{n} x_i$ とするとき，

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} &= \int_{2n\lambda}^{\infty} f_{2k}(x)\,dx = 1-F_{2k}(2n\lambda) = 2.5\% \\
\sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} &= \int_{2n\lambda}^{\infty} f_{2(k+1)}(x)\,dx = 1-F_{2(k+1)}(2n\lambda) = 97.5\%
\end{aligned}$$

をみたす 2 つの λ の間が信頼区間とみなすことができる．すなわち自由度 $2k$ の χ^2 分布の 97.5%点を C_1，自由度 $2(k+1)$ の χ^2 分布の 2.5%点を C_2 とすれば

$$C_1 \le 2n\lambda \le C_2$$

が信頼区間になる．

2.8.2　2 項分布の精密法

$$\sum_{i=0}^{k} {}_n\mathrm{C}_i p^i q^{n-i} = \frac{1}{B(k+1,n-k)}\int_0^{1-p} t^{n-k-1}(1-t)^k\,dt$$

より，

定理 7 **(2 項分布の精密法)**　2 項分布 $B(n,p)$ の分布関数 $F_{n,p}$ は自由度 $(2(k+1),2(n-k))$ の F 分布の密度関数 $f_{2(k+1),2(n-k)}$ を用いると

$$\begin{aligned}
F_{n,p}(k) = \sum_{i=0}^{k} {}_n\mathrm{C}_i p^i q^{n-i} &= \int_{(n-k)p/(k+1)q} f_{(2(k+1),2(n-k)}(x)\,dx \\
&= 1-F_{2(k+1),2(n-k)}\left(\frac{(n-k)p}{(k+1)q}\right) \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

と表せる．ここで $F_{2(k+1),2(n-k)}$ は自由度 $(2(k+1),2(n-k))$ の F 分布の分布関数である．

したがって，信頼区間 95%の推定を行うならば，$k=\sum_{i=1}^{n}x_i$ とおいて

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k-1} {}_n\mathrm{C}_i p^i q^{n-i} &= 1-F_{2k,2(n-k+1)}\left(\frac{(n-k+1)p}{kq}\right)=2.5\% \\
\sum_{i=0}^{k} {}_n\mathrm{C}_i p^i q^{n-i} &= 1-F_{2(k+1),2(n-k)}\left(\frac{(n-k)p}{(k+1)q}\right)=97.5\%
\end{aligned}
$$

の間の p が信頼区間になる．ここで上の式の p と q の役割を入れ替えると

$$
\sum_{i=0}^{n-k+1} {}_n\mathrm{C}_i p^{n-i} q^{i} = 1-F_{2(n-k),2(k+1)}\left(\frac{kq}{(n-k+1)p}\right)=97.5\%
$$

となる．

自由度 $(2(n-k+1),2k)$ の F 分布の 2.5%点を C_1，自由度 $(2(k+1),2(n-k))$ の F 分布の 2.5%点を C_2 とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{kq}{(n-k+1)p} &\le C_1 \\
\frac{2(n-k)p}{2(k+1)q} &\le C_2
\end{aligned}
$$

を解いて

$$
\frac{k}{k+C_1(n-k+1)} \le p \le \frac{C_2(k+1)}{n-k+C_2(k+1)}
$$

が信頼区間になる．

2 項分布の精密法の証明．部分積分により

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{B(k+1,n-k)}\int_0^{1-p} t^{n-k-1}(1-t)^k\,dt \\
&= \frac{1}{B(k+1,n-k)}\left[\frac{1}{n-k}t^{n-k}(1-t)^k\right]_0^{1-p} - \frac{1}{B(k+1,n-k)}\int_0^{1-p}\frac{k}{n-k}t^{n-k}(1-t)^{k-1}\,dt \\
&= {}_n\mathrm{C}_k p^k q^{n-k} - \frac{1}{B(k,n-k+1)}\int_0^{1-p} t^{n-k}(1-t)^{k-1}\,dt
\end{aligned}
$$

を繰り返せば

$$
\sum_{i=0}^{k} {}_n\mathrm{C}_i p^i q^{n-i} = \frac{1}{B(k+1,n-k)}\int_0^{1-p} t^{n-k-1}(1-t)^k\,dt
$$

この右辺で $\phi_1=2(k+1)$，$\phi_2=2(n-k)$ とおいて

$$
t=\frac{\phi_2}{\phi_1 F+\phi_2}
$$

と変数変換すると，

$$
t=0 \text{ ならば } F=\infty, \qquad t=1-p \text{ ならば } F=\frac{\phi_2 p}{\phi_1 q}
$$

なので

$$\frac{1}{B(k+1,n-k)}\int_0^{1-p} t^{n-k-1}(1-t)^k\,dt$$
$$= \frac{1}{B(\phi_1/2,\phi_2/2)}\int_{\phi_2 p/\phi_1 q}\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^{\phi_1/2} F^{\phi_1/2-1}\left(1+\frac{\phi_1}{\phi_2}F\right)^{-(\phi_1+\phi_2)/2} dF$$

これは自由度 (ϕ_1,ϕ_2) の F 分布の密度関数である．

2.9 その他，統計に現れる確率分布

- χ^2 分布 (自由度 n)

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}}x^{n/2}e^{-x/2}, \quad (x>0)$$

標準正規分布にしたがう独立な n 個の確率変数の和のしたがう確率分布，ガンマ分布 $\Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$ である．

再生性: 自由度 n と自由度 m の独立な χ^2 分布の和は自由度 $n+m$ の χ^2 分布にしたがう．

- t 分布 (自由度 n)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n}B(1/2,n/2)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$$

標準正規分布にしたがう確率変数 X とそれと独立な自由度 n の χ^2 分布にしたがう確率変数 Y とするとき，

$$\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

のしたがう確率分布である．

- F 分布 (自由度 m,n)

$$f(x) = \frac{(m/n)^{m/2}}{B(m/2,n/2)}x^{m/2-1}(1+\frac{m}{n}x)^{-(m+n)/2}, \quad (x>0)$$

自由度 m の χ^2 分布にしたがう確率変数 X と自由度 n の χ^2 分布にしたがう確率変数 Y とするとき

$$\frac{X/m}{Y/n}$$

のしたがう確率分布である．

2.9.1 ガンマ分布，ベータ分布と他の確率分布の間の関係

(1) 指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$ は $\Gamma(1, \lambda)$

(2) 自由度 n の χ^2 分布は $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$

(3) $P(\mathrm{Po}(\lambda) \leq k) = P(\Gamma(k+1, 1) > \lambda) = P(\chi^2_{2(k+1)} > 2\lambda)$

(4) $P(B(n,p) \geq k) = P(\beta(k, n-k+1) \leq p)$

(5) $\Gamma(p_1, a)/(\Gamma(p_1, a) + \Gamma(p_2, a)) = \beta(p_1, p_2)$

(6) とくに $a = \frac{1}{2}$ とおいて $1/(1 + (m/n)F_{m,n}) = \beta(m, n)$

上の 4 と 6 をあわせると

$$P(B(n,p) \geq k) = P\left(\frac{k}{k + (n-k+1)F_{n-k+1,k}} \leq p\right)$$

これは 3 とともに精密法で用いられる．

第3章　条件付き確率，条件付き期待値

3.1　条件付き確率

事象 A, B について

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

を B によって条件づけられた A の条件付き確率という．事象 A, B が独立

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

のときには

$$P(A \mid B) = P(A)$$

をみたす．

問題 56 (Polya の壷)　壷に赤玉 a 個と白玉 b 個入っている．赤玉を取り出したときには $c+1$ 個の赤玉を壷に戻し，白玉を取り出したときには $c+1$ 個の白玉を戻すとする．この操作を 3 回行った後で，赤玉を取り出す確率を求めてください．

解．　1 回目を考えると赤玉を取り出す確率は $\frac{a}{a+b}$ である．2 回目を考えると，

(1) 赤玉を取り出して，その次にも赤玉を取り出す．赤玉を取り出す確率は $\frac{a}{a+b}$，その条件の下でまた赤玉を取り出す条件付き確率は $\frac{a+c}{a+b+c}$．したがって，この確率は

$$\frac{a(a+c)}{(a+b)(a+b+c)}$$

(2) 1 回目に白玉を取り出して，その次に赤玉を取り出す白玉を取り出す確率は $\frac{b}{a+b}$，その条件の下で赤玉を取り出す条件付き確率は $\frac{a}{a+b+c}$．したがって，この確率は

$$\frac{ba}{(a+b)(a+b+c)}$$

2 式を加えて

$$\frac{a(a+c)}{(a+b)(a+b+c)} + \frac{ba}{(a+b)(a+b+c)} = \frac{a}{a+b}$$

と 1 回目と同じである．後は帰納法で確かめることができるが，何回目でも赤玉を取り出す確率は $\frac{a}{a+b}$ である． □

定理 8 (ベイズ)

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A)}$$

証明.

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B)$$

より

$$\begin{aligned} P(B \mid A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A)} \end{aligned}$$

□

一般には

系 1 (ベイズ) (1) $P(A) > 0$, $P(B_i) > 0$

(2) $B_1, \ldots, B_n$ は互いに素

(3) $\sum_{i=1}^n P(B_i) = 1$
をみたすとき

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \mid B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A \mid B_i)P(B_i)}$$

証明.

$$P(\bigcup_i B_i \mid A) = \frac{P(\bigcup_i B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P((\bigcup_i B_i)^c \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

に注意すると，定理 8 から

$$1 = P(\bigcup_i B_i \mid A) = \sum_{i=1}^n P(B_i \mid A) = \sum_{i=1}^n \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{P(A)}$$

により

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \mid B_i)P(B_i)$$

をみたす．再び，定理 8 から

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \mid B_k)P(B_k)}{P(A)}$$

の分母に代入すればよい． □

問題 57　(1) 硬貨を 5 回投げたとき，3 回以上表が出たことがわかっているときに 5 回全部が表である条件付き確率を求めてください．

(2) X が幾何分布 $\mathrm{Ge}(p)$ にしたがうとき，$m < n$ について $P(X = m + n \mid X \geq n)$ を求めてください．

解.

(1) A =5 回全部表の事象，B =3 回以上表の事象とすると

$$P(A) = 2^{-5}, \qquad P(B) = \sum_{i=3}^{5} {}_5\mathrm{C}_i 2^-5$$

また，$P(A \cap B) = P(B)$ であるので，

$$P(A \mid B) = \frac{2^{-5}}{\sum_{i=3}^{5} {}_5\mathrm{C}_i 2^{-5}} = \frac{1}{{}_5\mathrm{C}_3 + {}_5\mathrm{C}_4 + {}_5\mathrm{C}_5} = \frac{1}{16}$$

(2) $P(X = n) = pq^n$ より

$$P(X \geq n) = \sum_{i=n}^{\infty} pq^i = pq^n \frac{1}{1-q} = q^n$$

$$P(X = m + n \mid X \geq m) = \frac{P(X = m + n)}{P(X \geq m)} = \frac{pq^{m+n}}{q^n} = pq^m$$

指数分布にしたがうときには過去に起きていないことは影響を与えない．

□

問題 58 X と Y がそれぞれ独立で

(1) 2 項分布 $B(N, p)$ と $B(M, p)$ にしたがうとき

(2) 幾何分布 $\mathrm{Ge}(p)$ と $\mathrm{Ge}(p)$ にしたがうとき

(3) ポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ と $\mathrm{Po}(\mu)$ にしたがうとき

$P(X = n \mid X + Y = n + m)$ を求めてください．

解.

(1) 2 項分布の再生性より $X+Y$ は 2 項分布 $B(N+M,p)$ にしたがう．これより

$$
\begin{aligned}
P(X=n \mid X+Y=n+m) &= \frac{P(X=n, Y=m)}{P(X+Y=n+m)} = \frac{P(X=n)P(Y=m)}{P(X+Y=n+m)} \\
&= \frac{{}_N\mathrm{C}_n p^n q^{N-n} {}_M\mathrm{C}_m p^m q^{M-m}}{{}_{N+M}\mathrm{C}_p^{n+m} q^{N+M-n-m}} \\
&= \frac{{}_N\mathrm{C}_n {}_M\mathrm{C}_m}{{}_{N+M}\mathrm{C}_{n+m}}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
P(X+Y=n+m) &= \sum_{k=0}^{n+m} P(X=k, Y=n+m-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n+m} P(X=k)P(Y=n+m-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n+m} pq^k pq^{n+m-k} \\
&= p^2 q^{n+m}(n+m+1)
\end{aligned}
$$

これより

$$
\begin{aligned}
P(X=n \mid X+Y=n+m) &= \frac{P(X=n)P(Y=m)}{P(X+Y=n+m)} \\
&= \frac{pq^n pq^m}{p^2 q^{n+m}(n+m+1)} \\
&= \frac{1}{n+m+1}
\end{aligned}
$$

(3) ポアソン分布の再生性より $X+Y$ は $\mathrm{Po}(\lambda+\mu)$ にしたがう．これより

$$
\begin{aligned}
P(X=n \mid X+Y=n+m) &= \frac{P(X=n)P(Y=m)}{P(X+Y=n+m)} \\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^n/n! \times e^{-\mu}\mu^m/m!}{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^{n+m}/(n+m)!} \\
&= (\lambda+\mu)^{-(n+m)} {}_{n+m}\mathrm{C}_n \lambda^n \mu^m
\end{aligned}
$$

□

問題 59 くじが 100 本あって，そのうち当たりくじは１０本である．これを 2 つの箱に分け入れる．箱を等確率で引くとして，当たりくじを引く確率を最小もしくは最大にするにはどのように分ければよいでしょうか．

解. 箱を A,B とする箱 A に n 枚 ($n \leq 50$)，当たりくじを k 枚入れるとする．箱 B には $100-n$ 枚のうち $10-k$ 枚が当たりくじであるので，A を選んだときに当たる条件付き確率と B を選んだときに当たる条件付き確率は

$$\begin{aligned} P(\text{当たり} \mid \text{A の箱を選んだ}) &= \frac{k}{n} \\ P(\text{当たり} \mid \text{B の箱を選んだ}) &= \frac{10-k}{100-n} \end{aligned}$$

したがって，当たる確率は

$$\begin{aligned} P(\text{当たり}) &= \frac{P(\text{A の箱を選んで当たり})}{P(\text{A の箱を選んだ})} \times P(\text{A の箱を選んだ}) \\ &\quad + \frac{P(\text{B の箱を選んで当たり})}{P(\text{B の箱を選んだ})} \times P(\text{B の箱を選んだ}) \\ &= P(\text{当たり} \mid \text{A の箱を選んだ}) \times P(\text{A の箱を選んだ}) \\ &\quad + P(\text{当たり} \mid \text{B の箱を選んだ}) \times P(\text{B の箱を選んだ}) \\ &= \frac{k}{n} \times \frac{1}{2} + \frac{10-k}{100-n} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{100k + 10n - 2nk}{2n(100-n)} = \frac{10n + k(100-2n)}{2n(100-n)} \end{aligned}$$

$n \leq 50$ をとめて考えると，分子は k について単調増加なので，$k=0$ のとき最小，$k=10$ のとき最大になり，

$$\text{最小値} = \frac{5}{100-n}, \qquad \text{最大値} = \frac{1000-10n}{2n(100-n)}$$

最小値は $n=0$ のときに $\frac{1}{20}$，$k=10$ のとき，$n \geq 10$ であり，$\frac{1000-10x}{2x(100-x)}$ は単調減少関数なので，最大値は $n=10$ のときに $\frac{1}{2}$ □

例 10 **(低発生率の問題)** 人口の中でまれな病気の発生率が $P(D) = 0.001$ とする．病気の発見試験の精度が 99%，すなわち，病気にかかっている人がテストでプラスになる確率 $P(+ \mid D) = 0.99$ とする．同時にこのテストは精密で病気にかかっていない人がプラスになる確率は $P(+ \mid N) = 0.005$ とする．このとき，ランダムに選んだ人の結果がプラスである確率は (13.6) により

$$P(+) = P(+ \mid D)P(D) + P(+ \mid N)P(N) = 0.005993 \tag{3.1}$$

である．ベイズの定理 (13.5) により，テストがプラスであり，実際に病気にかかっている人の確率はたった

$$P(D \mid +) = \frac{P(+ \mid D)P(D)}{P(+)} = \frac{0.99 \times 0.001}{0.005993} = 0.165 \tag{3.2}$$

であり，テストでプラスにでても実際には健康である人の確率は $P(N \mid +) = 1 - P(D \mid +) = 0.835$ である．

優秀なテストでさえ，まれな病気を発見するのは難しい問題である．同様に，CIA の中でドラッグを使っている人とか，軍隊において忠誠でない人のようなまれな振る舞いを発見するのもよい試験でさえ困難であり．信頼性の低いうそ発見器などで行うのはばかげている．

例 11 **(３枚の扉の問題)** 閉じた扉の 1 つの裏に賞品がある．どの扉を開くかを挑戦者は選ぶが，選んだ扉を開く前に，挑戦者が選んでいない扉のうち，裏に賞品のない扉が開かれる．挑戦者は他の扉に変えた方がよいのだろうか．

間違えた扉を選んだ挑戦者が選ぶ扉を変えた場合には必ず勝つ $P(W \mid S_W, WD) = 1$ が，賞品のある扉を選んだ挑戦者が選ぶ扉を変えた場合には必ず負ける $P(W \mid S_W, RD) = 0$．間違えた扉を選ぶ確率は $P(WD) = 2/3$ であるから，扉を変えた場合に賞品を得る確率は

$$P(W \mid S_W) = P(W \mid S_W, WD)P(WD) + P(W \mid S_W, RD)P(RD) = 2/3 \tag{3.3}$$

正しい扉を選ぶ確率 $P(RD) = 1/3$ であり，正しい扉を選んで，その後，選ぶ扉を変えないときに勝つ確率 $P(W \mid S_P, RD) = 1$ である．それで，扉を変えないで勝つ確率は

$$P(W \mid S_P) = P(W \mid S_P, RD)P(RD) + P(W \mid S_P, WD)P(WD) = 1/3 \tag{3.4}$$

である．したがって，扉が開かれた後に選ぶ扉を変えるべきである．

3.1.1　離散型

$$P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

$Y = y$ という条件のもとでの X の期待値 (X の条件付き期待値) は

$$E(X \mid Y = y) = \sum_i x_i P(X = x \mid Y = y) = \frac{1}{P(Y = y)} \sum_i x_i P(X = x_i, Y = y)$$

以下では，$E(X \mid Y)$ は y の関数で，y での値を $E(X \mid Y = y)$ をとる関数と考える．

定理 9

$$E[E(X \mid Y)] = E(X)$$

証明.

$$\begin{aligned} E[E(X \mid Y)] &= \sum_j E(X \mid Y = y_j) \times p_j^Y \\ &= \frac{1}{p_j^Y} \sum_j \sum_i x_i P(X = x_i Y = y_j) \times p_j^Y \\ &= \sum_j \sum_i x_i P(X = x_i Y = y_j) \\ &= \sum_i x_i P(X = x_i) = E(X) \end{aligned}$$

□

問題 60 (compound Poisson)　X はポアソン分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$ にしたがい，$Y_1, Y_2, \ldots$ は独立なベルヌーイ分布 $\mathrm{Be}(p)$ にしたがう，すなわち

$$P(Y_i = 1) = p, \qquad P(Y_1 = 0) = 1 - p$$

とするとき，$Y = Y_1 + \cdots + Y_X$ とおく．このとき，X, Y の同時確率分布と $E(Y)$ を求めてください．

解.

$$\begin{aligned} P(X = n) &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ P(Y = k \mid X = n) &= {}_n\mathrm{C}_k p^k q^{n-k} \end{aligned}$$

より，$0 \le k \le n$ ならば

$$\begin{aligned} P(Y = k, X = n) &= P(Y = k \mid X = n) \times P(X = n) \\ &= {}_n\mathrm{C}_k p^k q^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \end{aligned}$$

期待値は

$$\begin{aligned} E(Y) &= E[E[Y \mid X]] = \sum_{n=0}^{\infty} E[Y \mid X = n] \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k p^k q^{n-k} \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} p^k q^{-k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(q\lambda)^n}{(n-k)!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} p^k q^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(q\lambda)^{m+k}}{m!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} p^k \lambda^k e^{q\lambda} \\ &= e^{-\lambda} e^{p\lambda} e^{q\lambda} = 1 \end{aligned}$$

□

3.1.2　連続型

X, Y が連続型のとき

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}$$

を条件 $Y = y$ のときの X の密度関数とよぶ．

定理 10 (ベイズ)

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X|Y=y}(x) f_Y(y)}{f_X(x)}$$

証明.

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_{X|Y=y}(x) \times f_Y(y)$$

より

$$\begin{aligned} f_{Y|X=x}(y) &= \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} \\ &= \frac{f_{X|Y=y}(x) \times f_Y(y)}{f_X(x)} \end{aligned}$$

□

$$E(X \mid Y = y) = \int x f_{X|Y=y}(x)\, dx$$

を条件付き平均値という．

$$E(X \mid Y = y) = \frac{1}{f_Y(y)} \int x f_{(X,Y)}(x,y)\, dx$$

をみたす．$E(X \mid Y)$ は y を変数とする関数とみなす．これを用いると離散型と同様に

定理 11

$$E[E(X \mid Y)] = E(X)$$

証明.

$$\begin{aligned} E[E(X \mid Y)] &= \int E(X \mid Y = y) f_Y(y)\, dy \\ &= \int \frac{1}{f_Y(y)} \int x f_{(X,Y)}(x,y)\, dx f_Y(y)\, dy \\ &= \int x \left(\int f_{(X,Y)}(x,y)\, dy \right) dx \\ &= \int x f_X(x)\, dx = E(X) \end{aligned}$$

□

3.1.3 離散型と連続型の場合

一般論は，Y 可測な事象 C について

$$\int_C E(X \mid Y)\, dP = \int_C X\, dP$$

をみたす，Y 可測な関数 $E(X \mid Y)$ が条件付き平均値の Lebesgue 積分における定義になる．これを X の代わりに $1_{X^{-1}A}$，$C = Y^{-1}(B)$ とおくと

$$\int_{Y^{-1}(B)} E(1_{X^{-1}(A)} \mid Y)\, dP = \int_{Y^{-1}(B)} 1_{X^{-1}(A)}\, dP = P(X \in A, Y \in B)$$

- ともに離散型のとき，$A = \{k\}$，$B = \{l\}$ とおくと

$$P(X = k \mid Y = l) \times P(Y = l) = P(X = k, Y = l)$$

- ともに連続型のとき

$$\int_B \left(\int_A f_{X|Y=y}(x)\, dx \right) f_Y(y)\, dy = \int_{A \times B} f_{(X,Y)}(x,y)\, dxdy$$

により

$$f_{X|Y=y}(x) \times f_Y(y) = f_{(X,Y)}(x,y)$$

- X が連続型，Y が離散型のとき

$$\int_A f_{X|Y=y}(x)\, dx \times P(Y = l) = P(X \in A, Y = l)$$

より

$$f_{X|Y=y}(x) \times P(Y = l) = f_X(x, Y = l)$$

- X が離散型，Y が連続型のとき

$$\int_B P(X = k \mid Y = y) f_Y(y)\, dy = P(X = k, Y \in B)$$

より

$$P(X = k \mid Y = y) \times f_Y(y) = f_Y(X = k, y)$$

3.1.4　条件付き確率の性質

(1) $E(a_1X_1 + a_2X_2 + b \mid Y) = a_1E(X_1 \mid Y) + a_2E(X_2 \mid Y) + b$

(2) $E(h(Y)X \mid Y) = h(y)E(X \mid Y)$

(3) $E[E(X \mid Y)g(Y)] = E(Xg(Y))$

(4) $E[E(Z \mid X, Y) \mid Y] = E(Z \mid X)$

(5) X と Y が独立ならば $E(X \mid Y) = E(X)$

証明.　連続型の場合に行う.

(1) これは明らか

(2)

$$\begin{aligned} E(h(Y)X \mid Y) &= \int h(y)xf_{X|Y=y}(x)\,dx \\ &= h(y)\int xf_{X|Y=y}(x)\,dx = h(y)E(X \mid Y = y) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} E[E(X \mid Y)g(Y)] &= \int E(X \mid Y = y)g(y)f_Y(y)\,dy \\ &= \int \left(\int xf_{X|Y=y}g(y)f_{X|Y=y}(x)\,dx\right) f_Y(y)\,dy \\ &= \int\int xf_{(X,Y)}(x,y)g(y)\,dxdy = E[Xg(y)] \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} E[E[Z \mid X = x, Y) \mid Y) &= \int E(Z \mid X = x, Y = y)f_{Y|X=x}(y)\,dy \\ &= \int \left(\int zf_{Z|X=x,Y=y}\,dz\right) \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)}\,dy \\ &= \int\int z\frac{f_{(X,Y,Z)}(x,y,z)}{f_X(x)}\,dz\,dy = \int zf_{Z:\,X=x}(z)\,dz \\ &= E(Z \mid X = x) \end{aligned}$$

(5) 独立ならば

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$$

なので,

$$E(X \mid Y)(y) = \int xf_{X|Y=y}(x) = \int xf_X(x)\,dx = E(X)$$

□

問題 61 X と Y が独立で指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$ にしたがうとき $X+Y$，$X-Y$，$\frac{X}{Y}$ の密度関数を求めてください．XY の密度関数は大変である．

解.

(1) $X+Y$

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(x) &= P(X+Y \le x) = E[P(X+Y \le x) \mid Y] \\ &= \int P(X \le x-y) f_Y(y)\,dy \\ &= \int F_X(x-y) f_Y(y)\,dy \end{aligned}$$

上の式を x で微分して

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(x) &= \int f_X(x-y) f_Y(y)\,dy \\ &= \int_0^x \lambda e^{-\lambda(x-y)} \lambda e^{-\lambda y}\,dy \\ &= \int_0^x \lambda^2 e^{-\lambda x}\,dy = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

これはガンマ分布 $\Gamma(2,\lambda)$ である．

(2) $X-Y$

$$\begin{aligned} F_{X-Y}(x) &= E[P(X-Y \le x) \mid Y] \\ &= \int F_X(x+y) f_Y(y)\,dy \end{aligned}$$

これを x で微分して

$$\begin{aligned} f_{X-Y}(x) &= \int f_X(x+y) f_Y(y)\,dy \\ &= \int_{-x\vee 0} \lambda e^{-\lambda(x+y)} \lambda e^{-\lambda y}\,dy \\ &= \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda x} \int e^{-2\lambda y}\,dy & x \ge 0 \\ \lambda^2 e^{-\lambda x} \int_{-x} e^{-2\lambda y}\,dy & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ \frac{\lambda}{2} e^{\lambda x} & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(3) $\frac{X}{Y}$

$$\begin{aligned} F_{X/Y}(x) &= P(X/Y \leq x) = E[P(X/Y \leq x) \mid Y] \\ &= \int F_X(xy) f_Y(y)\, dy \end{aligned}$$

これを x で微分して

$$\begin{aligned} f_{X/Y}(x) &= \int f_X(xy) y f_Y(y)\, dy \\ &= \int \lambda^2 e^{-\lambda xy} y e^{-\lambda y}\, dy \\ &= \lambda^2 \int y e^{-\lambda(x+1)y}\, dy \\ &= \frac{1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

XY の場合には

$$\begin{aligned} F_{XY}(x) &= P(XY \leq x) = E[P(XY \leq x) \mid Y] \\ &= \int F_X(x/y) f_Y(y)\, dy \end{aligned}$$

これを x で微分して

$$\begin{aligned} f_{XY}(x) &= \int f_X(x/y) \frac{1}{y} f_Y(y)\, dy \\ &= \int \lambda^2 \int \frac{1}{y} e^{-\lambda(x/y+y)}\, dy \end{aligned}$$

となって，積分ができない．積や商の場合には負の値を取る場合にはより注意が必要になる． □

3.1.5 最良推定値

定理 12 $E((Y-g(X))^2)$ を最小にする g は $g(X) = E(Y \mid X)$ である．

証明.

$$\begin{aligned} &E((Y-g(X))^2) = E((Y - E(Y \mid X) + (E(Y \mid X) - g(X))^2) \\ &\quad = E((Y - E(Y \mid X))^2) + 2E((Y - E(Y \mid X))(E(Y \mid X) - g(X)) \\ &\qquad + E((E(Y \mid X) - g(X))^2) \end{aligned}$$

ここで，中項は

$$\begin{aligned} &E((Y - E(Y \mid X))(E(Y \mid X) - g(X)) = E(YE(Y \mid X)) - E(E(Y \mid X)E(Y \mid X)) \\ &\quad - E(Yg(X)) + E(E(Y \mid X)g(X)) \end{aligned}$$

ここで，

$$E(E(Y \mid X)g(X)) = E(Yg(X))$$

また，$E(Y \mid X)$ の 1 つを g と思えば

$$E(E(Y \mid X)E(Y \mid X)) = E(YE(Y \mid X))$$

であることから，中項は 0 であることがわかる．これより，

$$E((Y - g(X))^2) = E((Y - E(Y \mid X))^2) + E((E(Y \mid X) - g(X))^2)$$

前項は g によらないので，定理の証明終わり □

3.2 Bayes の話

X と Y を考える．X の確率分布を事前確率分布といい，$P(X \mid Y)$ を事後確率とよぶ．X の確率分布は情報なしで定まるので，主観的確率ともよばれる．

例 12 壺が 2 つある．どれかを選ぶのを確率変数 X とする．主観的 (事前) 確率は

$$P(X = i) = \frac{1}{2}$$

である．壺には赤玉と白玉が

- 壺 1 には赤 5 個，白 1 個
- 壺 2 には赤 1 個，白 5 個

とする．今，片方の壺をランダムに選んで，さらに玉を取り出すと赤だった．この壺は 1 か 2 か考えてみよう．取り出す玉の色を表す確率変数を Y とし，赤を 0，白を 1 としよう．

$$\begin{aligned} P(Y = 0 \mid X = 1) &= \frac{5}{6} \\ P(Y = 0 \mid X = 2) &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

である．Bayes により

$$P(X = 1 \mid Y = 0) = \frac{P(X = 1, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{P(Y = 0 \mid X = 1) \times P(X = 1)}{P(Y = 0 \mid X = 1)P(X = 1) + P(Y = 0 \mid X = 2)P(X = 2)}$$

なので，事後確率は

$$P(X = 1 \mid Y = 0) = \frac{5/6 \times 1/2}{5/6 \times 1/2 + 1/6 \times 1/2} = \frac{5}{6}$$

と赤をひいたことで，その壺が 1 である確率がずっと高くなった．

例 13 硬貨投げを考える．n 回投げたときの表の回数を Y とする．X は表の出る確率としよう．主観的確率は α, β の β 分布とする．

$$
\begin{aligned}
p_k &= P(Y=k) = \int f(Y=k, X=p)\,dp = \int P(Y=k \mid X=p) f_X(p)\,dp \\
&= {}_n\mathrm{C}_k \int p^k q^{n-k} \frac{1}{B(\alpha,\beta)} p^{\alpha-1} q^{\beta-1}\,dp \\
&= {}_n\mathrm{C}_k \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int p^{\alpha+k-1} q^{\beta+n-k-1}\,dp \\
&= {}_n\mathrm{C}_k \frac{B(\alpha+k, \beta+n-k)}{B(\alpha,\beta)}
\end{aligned}
$$

一方，

$$
P(X=k \mid Y=p) = {}_n\mathrm{C}_k p^k q^{n-k}
$$

より，Bayes より，事後確率は

$$
\begin{aligned}
f_{X|Y=k}(p) &= P(Y=k \mid X=p) \times f_X(p) \times \frac{1}{p_k} \\
&= {}_n\mathrm{C}_k p^k q^{n-k} \frac{p^{\alpha-1} q^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} \frac{B(\alpha,\beta)}{{}_n\mathrm{C}_k B(\alpha+k, \beta+n-k)} \\
&= \frac{1}{B(\alpha+k, \beta+n-k)} p^{\alpha+k-1} q^{\beta+n-k-1}
\end{aligned}
$$

すなわち，β 分布は事前確率から事後確率への移行で保存される．

このことを 2 項分布の共役事前分布は β 分布であるという．

問題 62 正規分布の共役事前分布は正規分布であることを確かめてください．

解． X の事前分布は $N(m_0, v_0)$ とする．また

$$
f_{Y|X=m}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-(y-m)/2v}
$$

にしたがうとする．このとき，

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int f_{Y|X=m}(y) f_X(m)\,dm \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-(y-m)^2/2v} \frac{1}{\sqrt{2\pi v_0}} e^{-(m-m_0)^2/2v_0}\,dm \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(v+v_0)}} e^{-(y-m_0)^2/2(v+v_0)}
\end{aligned}
$$

これより事後確率は

$$
\begin{aligned}
f_{X|Y=y}(m) &= \frac{f_{Y|X=m}(y) f_X(m)}{f_Y(y)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-(y-m)^2/2v} \frac{1}{\sqrt{2\pi v_0}} e^{-(m-m_0)^2/2v_0} \sqrt{2\pi(v+v_0)} e^{(y-m_0)^2/2(v+v_0)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi v v_0/(v+v_0)}} \exp[-(v_0 y - m(v+v_0) + m_0 v)/2 v v_0 (v+v_0)]
\end{aligned}
$$

と正規分布になっていることがわかる．

$Y_1, \ldots, Y_n$ が独立なときにも示せる． □

問題 63 ポアソン分布の共役事前確率分布は Γ 分布であることを示してください．

解． X の事前確率分布は $\Gamma(a, 1/\theta)$ とする．

$$f_X(\lambda) = \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} e^{-\lambda\theta}$$

また

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \int e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} e^{-\lambda\theta}\, d\lambda \\ &= \frac{\theta^a}{k!\Gamma(a)} \int \lambda^{a+k-1} e^{-\lambda(\theta+1)}\, d\lambda \\ &= \frac{\theta^a}{k!\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a+k)}{(\theta+1)^{a+k-1}} \end{aligned}$$

これより，事後確率は

$$\begin{aligned} f_{X|Y=k}(\lambda) &= \frac{P(Y = k \mid X = \lambda) f_X(\lambda)}{P(Y = k)} \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{1}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} e^{-\lambda\theta} \frac{k!\Gamma(a)}{\theta^a} \frac{(\theta+1)^{a+k-1}}{\Gamma(a+k)} \\ &= \frac{(\theta+1)^{a+k-1}}{\theta^a \Gamma(a+k)} \lambda^{a+k-1} e^{-\lambda(\theta+1)} \end{aligned}$$

□

3.3 Markov 連鎖

離散型の確率変数 $X_1, X_2, \ldots$ について

$$P(X_n = x_n | X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) = P(X_n = x_n | x_{n-1} = x_{n-1})$$

をみたすとき**マルコフ連鎖**という．条件付き確率を用いて表現するならば，$\mathcal{B}_n$ で X_n を可測にする最小の σ–algebra，$\tilde{\mathcal{B}}_n$ で $X_1, \ldots, X_n$ を可測にする最小の σ–algebra とすると，$m > n$ ならば

$$P\{\omega\colon X_m(\omega) = x_m \mid \tilde{\mathcal{B}}_n\}(\omega) = P\{\omega\colon X_m(\omega) = x_m \mid \mathcal{B}_n\}(\omega)$$

が成り立つことである．すなわち，時刻 n 以降の事象は n での値にのみより，それまでの履歴によらないと言うことである．

$X_1, X_2, \ldots$ が独立ならば，$\omega \in \{\omega\colon X_1(\omega) = x_1, \ldots, X_n(\omega) = x_n\}$ のとき

$$
\begin{aligned}
P\{\omega\colon X_m(\omega) = x_m \mid \tilde{\mathcal{B}}_n\}(\omega) &= \frac{P\{\omega\colon X_m(\omega) = x_m, X_1(\omega) = x_1, \ldots, X_n(\omega) = x_n\}}{P\{\omega\colon X_1(\omega) = x_1, \ldots, X_n(\omega) = x_n\}} \\
&= P\{\omega\colon X_m(\omega) = x_m\} \\
P\{\omega\colon X_m(\omega) = x_m \mid \mathcal{B}_n\}(\omega) &= \frac{P\{\omega\colon X_m(\omega) = x_m, X_n(\omega) = x_n\}}{P\{\omega\colon X_n(\omega) = x_n\}} \\
&= P\{\omega\colon X_m(\omega) = x_m\}
\end{aligned}
$$

であるから，Markov である．

例 14 $X_1, X_2, \ldots$ を公平な硬貨投げで，

$$X_n = \begin{cases} +1 & \text{表} \\ -1 & \text{裏} \end{cases}$$

としよう．このとき，

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

はマルコフ連鎖になる．これを対称 random walk という．

確率変数 $X_1, X_2, \ldots$ が独立同分布なら，条件付き確率を行列で表すことができる．例えば，2 つの値 a, b しかとらないときには

$$\Pi = \begin{pmatrix} P(X_2 = a|X_1 = a) & P(X_2 = b|X_1 = a) \\ P(X_2 = b|X_1 = a) & P(X_2 = b|X_1 = b) \end{pmatrix}$$

になる．これを**推移確率行列**という．

$$\pi = (P(X_1 = a), P(X_1 = b))$$

を**初期確率**という．また

$$\Pi^2 = \begin{pmatrix} P(X_3 = a|X_1 = a) & P(X_3 = b|X_1 = a) \\ P(X_3 = b|X_1 = a) & P(X_3 = b|X_1 = b) \end{pmatrix}$$

および

$$\pi P = (P(X_2 = a), P(X_2 = b))$$

などをみたすことに注意しよう．

一般の推移確率行列

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

と初期確率

$$\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$$

は

(1) $p_{ij} \geq 0$

(2) $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$

(3) $\pi_i \geq 0$

(4) $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$

をみたす．

$$\sum_i \pi_i p_{ij} = \pi_j$$

をすべての j についてみたす，すなわち $\pi\Pi = \pi$ をみたすとき，**定常**であるという．

問題 64 $1 \leq i, j \leq n$ について，推移確率が

$$p_{ij} = C_i ij$$

で与えられるとき，C_i を求めてください．

解.

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = c_i i \frac{n(n+1)}{2}$$

より

$$C_i = \frac{1}{i} \times \frac{2}{n(n+1)}$$

□

3.4　極限定理

推移確率行列 Π について，Π^n の (i,j) 成分を $p_{i,j}^{(n)}$ で表すことにしよう．これは初めに i にいたときに時刻 n に j にいる確率であることは行列のかけ算をしてみればわかるだろう．とくに $n = 2$ ならば

$$p_{i,j}^{(2)} = \sum_{l=1}^{k} p_{i,l} p_{l,j}$$

であることからわかる．

推移確率行列 Π が非退化であるとは，任意の i,j について，ある n が存在して，$p_{i,j}^{(n)} > 0$ をみたすこととする．非退化でない行列は非退化な行列に分解できることは容易にわかる．

非退化な推移確率行列について，$n \to \infty$ の場合を考えてみよう．

定理 13 (Perron–Frobenius)　A を非退化かつ成分が非負な行列とするとき，その最大固有値は正かつ単純であり，対応する固有ベクトルとして成分がすべて正なものを選ぶことができる．

を用いよう．1 が固有値であることは $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ が固有ベクトルであることからわかり，さらに，Π^n が推移確率行列になっていることから，1 が最大固有値であることがわかる．なぜなら，もし絶対値が 1 以上の固有値があれば $\Pi^n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ は発散してしまう．さらに 1 が最大固有値であることから，定常確率が存在することも示された．

1 以外の固有値がすべて絶対値で 1 より小さいときには，任意の初期状態 π について $\pi\Pi^n$ は定常確率に収束することがわかり，さらに

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} \to 0$$

であることを用いると

$$\pi\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \Pi^k$$

も定常状態に収束することがわかる．これをエルゴード性という．

3.5　吸収壁ランダムウォーク

自分は 1 円，相手は $N-1$ 円の，2 人合わせて N 円所持しているとする．1 回あたり 1 円を賭けてギャンブルをするとき，私が破産する確率を求めてみよう．負ける確率を p，勝つ確率を q とする．

これを解くには p_n で，初め n のところにいたときに破産する確率とする．欲しいのは p_1 だけだが，このように一般の場合を求めるとよい．1 回ギャンブルをすると $n-1$ か $n+1$ に移動するから

$$p_n = p \times p_{n-1} + q \times p_{n+1}$$

が成り立つ．さらに境界条件 $p_0 = 1$，$p_N = 0$ が成り立つ．式を書き換えると

$$p_{n+1} = \frac{1}{q}p_n - \frac{p}{q}p_{n-1}$$

であるから

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/q & -p/q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \end{pmatrix}$$

ここで $P = \begin{pmatrix} 1/q & -p/q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値は 1 と $\frac{p}{q}$ であるから，対角化する行列を U とおいて，$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_0 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$p_n = \alpha + \beta \left(\frac{p}{q} \right)^n$$

が成り立つ．境界条件より

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha + \beta \left(\frac{p}{q} \right)^N = 0$$

であるので，

$$\alpha = \frac{p^N}{p^N - q^N}, \quad \beta = -\frac{q^N}{p^N - q^N}$$

より，

$$p_n = \frac{p^N}{p^N - q^N} - \frac{q^N}{p^N - q^N} \left(\frac{p}{q} \right)^n$$

を得る．この式は $p = q = \frac{1}{2}$ のときには使えない．それには，上の式を整理して

$$p_n = \frac{p^n (p^{N-n} - q^{N-n})}{p^N - q^N}$$

として，$p, q \to \frac{1}{2}$ ととれば

$$p_n = 1 - \frac{n}{N}$$

が導ける．より，正確には $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が，固有値 1 の Jordan 標準形であることから

$$p_n = \alpha + n\beta$$

になることに境界条件を用いればよい．

逆に，相手が破産する確率を q_n とおくと，これは p と q を入れ替えて，$N - n$ をみればよいので

$$q_n = \frac{q^{N-n} (q^n - p^n)}{q^N - p^N}$$

このことから，　$p_n + q_n = 1$，つまり，そのうち，どちらかが破産する確率が 1 であることがわかる．

では，どのくらいの時間で破産するのだろうか，$p_{n,k}$ で最初 n にいて，k 時刻後に破産する確率とする．上と同様に，

$$p_{n,k} = p \times p_{n-1,k-1} + q \times p_{n+1,k-1} \quad (k \geq 1)$$

が成り立つ．両辺に t^k をかけて，$k=1,\dots$ について加えると

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}t^k = pt\sum_{k=0}^{\infty} p_{n-1,k}t^k + qt\sum_{k=0}^{\infty} p_{n+1,k}t^k$$

$p_n(t)=\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}t^k$ とおくと，上の式は

$$p_n(t)-p_{n,0} = ptp_{n-1}(t)+qtp_{n+1}(t)$$

ここで，$n\neq 0$ ならば，$p_{n,0}=0$，とくに $p_0(t)\equiv 1$ かつ $p_N(t)\equiv 0$ である．

3.6　反射壁ランダムウォーク

両側の壁で反射して戻るランダムウォークを反射壁ランダムウォークと言います．1 つの例をあげておきましょう．

3.6.1　エーレンフェストの壷

実際の物理現象ではさまざまな要因が絡み合い，複雑な様相を呈するためにメカニズムの原理が見つけにくい場合が少なくありません．そこで原理の部分だけを取り出して自然の仕組みを解明してみようというわけです．エーレンフェストの壷は，多数の粒子の運動を記述する統計力学のモデルとして提唱されたわかりやすいモデルです．

2 つの壷を用意します．それと玉が N 個あるとします．玉には番号がふってあります．これらの玉を 2 つの壷に分けていれ，1 時刻ごとに 1 から N までの番号を 1 つ選んで，その番号の玉を入っている壷から取り出して，他の壷へと移動します．これをひたすらに繰り返すというのがこのモデルです．物理の対象としては，2 つの球を細い管でつないだものを用意します．この装置の中に空気の粒子が多数入っていますが，その合計個数を N 個とします．空気の粒子はでたらめに動きまわりますから，ときどき管を通って他の球へと移動していきます．これを長い時間観察したらどんな風になるだろうかというわけです．

たとえ，初めに片方の球が空っぽでも，時間がたてば多い方から少ない方へと移動するチャンスが多いわけですから，長い時間には 2 つの球に入っている粒子の数 (エーレンフェストの壷なら 2 つの壷に入っている玉の数) は等しくなって来るだろうという予想がたちます．これを数学的にチェックしたいというわけです．両方の球に半分ずつ粒子が入った状態は平衡状態とみなすことができます．このモデルは，同時に平衡状態とはなんだろうという問題の解決にもなっているはずです．

簡単なモデル

多数の粒子のモデルを扱う前に，もっとシンプルなモデルで記号などを準備しておきましょう．2つの状態AとBというのがあるとします．状態Aからは1時刻たつと確率pで状態Bに移動します．ということは確率$1-p$で状態Aのままでいるわけです．状態Bにいると1時刻後には必ず状態Aに移動するものとしましょう．これは工場の機械の状態をモデル化したものです．状態Aは故障なく機械が働いている状態，状態Bは機械が壊れてしまった状態とすると，正常なときにはある確率pで壊れて状態Bに移動しますが，壊れたら必ず次の時刻では修理して正常な状態に戻すという風に考えてください．こうしたものは確率オートマトンなどといわれ，コンピュータサイエンスでも用いられる概念です．

このメカニズムは行列

$$P=\begin{pmatrix}1-p & p\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

で表現できます．行列の$(1,1)$成分P_{11}は状態Aにいるという条件のもとで1時刻後にも状態Aにいる確率，$(1,2)$成分P_{12}は状態Aにいるという条件のもとで状態Bに1時刻後に移動する確率，$(2,1)$成分P_{21}は状態Bにいるという条件のもとで状態Aに1時刻後に移動する確率，最後に$(2,2)$成分P_{22}は状態Bにいるという条件のもとで1時刻後にも状態Bにいる確率を与えていますので，この行列を推移確率行列といいます．

P^2を考えてみましょう．この$(1,1)$成分P^2_{11}は行列のかけ算から$P_{11}P_{11}+P_{12}P_{21}$に等しいわけですが，この初めの項は初め状態Aにいるという条件のもとで，次もAにいてさらにその次もAにいる確率を表しています．第2項は初め状態Aにいるという条件のもとで，次は状態Bにいって，またその次に状態Aに戻って来る確率を表しています．ということは，P^2_{11}は初めAにいるという条件のもとで2時刻後にもAにいる確率を表しています．一般にP^n_{ij}についてもおわかりですね．

それでは，今状態Aにいる確率をπ_1，状態Bにいる確率をπ_2としましょう．1時刻後に状態Aにいる確率は今Aにいて，次もAにいる確率と今Bにいて次にAに移動する確率の和ですから$\pi_1P_{11}+\pi_2P_{21}$と表せます．これは行列を用いると$(\pi_1,\pi_2)P$の第1成分ですし，この横ベクトルの第2成分は同様に1時刻後に状態Bにいる確率に等しくなっています．横ベクトル$\pi=(\pi_1,\pi_2)$を初期確率といいます．

今，この機械を長い時間動かしていてランダムに機械の点検にいくことにしましょう．きっと，ある確率で正常であって，この確率は時間がたっても変わらないものであるはずです．これを不変確率といいます．不変確率を求めてみましょう．不変確率は1時刻たっても変わらないはずですから

$$\pi P=\pi$$

をみたしていなければなりません．いいかえると，π は行列 P の固有値 1 の固有ベクトルであることとがわかります．

壷に戻って

1 つの壷に注目してその壷に入っているボールの個数を k としましょう．ランダムに選ぶのですから，確率 $\frac{k}{N}$ でその壷に入っているボールを選んで他方へ移します．このとき，この壷の中のボールは 1 つ減って $k-1$ になります．また，確率 $1-\frac{k}{N}=\frac{N-k}{N}$ で他方の壷に入っているボールを選ぶので，このときにはこの壷のボールは $k+1$ 個になります．推移確率行列を書けば

$$
P = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{N} & 0 & \frac{N-1}{N} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{2}{N} & 0 & \frac{N-2}{N} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{N-1}{N} & 0 & \frac{1}{N} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

で与えられます．$(\pi_0,\ldots,\pi_N)P=(\pi_0,\ldots,\pi_N)$ をみたす横ベクトルは

$$
\begin{aligned}
\pi_0 &= \frac{1}{N}\pi_1 \\
\pi_1 &= \pi_0 + \frac{2}{N}\pi_2 \\
\pi_k &= (1-\frac{k-1}{N})\pi_{k-1} + \frac{k+1}{N}\pi_{k+1} \qquad (1 \le k \le N-1) \\
\pi_N &= \frac{1}{N}\pi_{N-1}
\end{aligned}
$$

をみたします．これより，$\pi_k = {}_N\mathrm{C}_k\pi_0$ をみたすことが帰納的に確かめられます．実際，$k=0$ のときは正しいのは明らかです．また，k まで正しいとすると，

$$
\begin{aligned}
\pi_k &= (1-\frac{k-1}{N})\pi_{k-1} + \frac{k+1}{N}\pi_{k+1}, \\
{}_N\mathrm{C}_k\pi_0 &= (1-\frac{k-1}{N})\,{}_N\mathrm{C}_{k-1}\pi_0 + \frac{k+1}{N}\pi_{k+1}
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
\pi_{k+1} &= \frac{N}{k+1}\left({}_N\mathrm{C}_k - (1-\frac{k-1}{N}){}_N\mathrm{C}_{k-1}\right)\pi_0 \\
&= \frac{N}{k+1}\left(\frac{N!}{(N-k)!k!} - \frac{N-k+1}{N}\frac{N!}{(N-k+1)!(k-1)!}\right)\pi_0 \\
&= \frac{N}{k+1}\left(\frac{N!}{(N-k)!k!} - \frac{(N-1)!}{(N-k)!(k-1)!}\right)\pi_0 \\
&= \frac{N}{k+1}\frac{(N-1)!}{(N-k)!k!}(N-k)\pi_0 \\
&= \frac{N!}{(N-k-1)!k!}\pi_0 = {}_N\mathrm{C}_{k+1}\pi_0
\end{aligned}$$

により確かめられます．全体の確率が 1 であることから

$$\sum_{i=1}^{N}\pi_i = \sum_{k=0}^{N}{}_N\mathrm{C}_k\pi_0 = 1$$

一方，

$$\sum_{k=0}^{N}{}_N\mathrm{C}_k = (1+1)^N = 2^N$$

より，$\pi_0 = 2^{-N}$ がわかります．したがって，$\pi_k = {}_N\mathrm{C}_k 2^{-N}$ となりますから，これは N 個の硬貨を投げたときの表の回数を表す確率分布である 2 項分布に等しいことになります．硬貨をいっぱい投げればその約半数は表になるはずです (これを大数の法則といいます) から，N が大きいときには，この壷には全体のボールの約半数が入っていることが示せました．これが平衡状態でしたね．

まとめ

以上から平衡状態とは確率分布であることに納得がいってもらえたでしょうか．半分ずつ壷に入っているのが平衡状態なのですが，確率分布ですからいつもぴったり半分ずつ入っているわけではありません．物理を勉強している人達は平衡状態が確率分布であることを正確に把握している人ばかりではないと思いますが，揺らぎという言葉でこのずれを理解をしているようです．

最後に述べておかなければいかないことがあります．ニュートンの立場にたった古典力学では実際の物理運動は初期値が定まればあとは決まった運動をするわけで，なんらランダムな現象は存在しないはずです．それにもかかわらずランダム性を考慮した上の説明がうまくいっているのはなぜなのかを考えてやる必要があります．もっと，身近な例では氷をお湯の中にいれれば融けてぬるま湯という平衡状態に達するわけですが，これも分子レベルで考えれば，氷を形成している分子は速度が遅く，お湯の分子は速度が速いとい

う違いだけです．これらがランダムに動きまわるとよく混ざってしまい，速度の差がなくなってぬるま湯になると考えるとわかりやすいですよね．これは決まりきった運動をする場合にも平衡状態は確率分布であることから，ランダムな現象ととらえられるということなのです．多数の粒子による複雑さが導く秩序と考えたらいいのかもしれません．

3.7　ランダムウォーク

$\mathbb{Z}$ 上を右へ確率 p，左へ確率 q $(p, q > 0, p+q=1)$ で移動するランダムウォークを考えます．言い換えれば独立同分布の

X_i の値	-1	$+1$
X_i の確率	q	p

の確率変数について

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

がランダムウォークです．$p = q = \frac{1}{2}$ のとき，対称ランダムウォークといいます．

f_n で時刻 n で初めて原点に戻る確率，p_n で時刻 n で原点に戻る確率 とします．p_n は簡単に求められます．n は偶数で，その半分が $+1$ 残りの半分が　-1 にいけばよいのですから

$$p_n = \binom{n}{n/2} p^{n/2} q^{n/2}$$

をみたします．一方，

$$p_n = q_2 p_{n-2} + \cdots + q_{n-2} p_2 + q_n$$

をみたします．つまり，n 回目に原点に戻るのは k 回目に初めて原点に戻って，その後，$n-k$ 回でまた原点に戻るというわけです．$p_0 = 1, f_0 = 1$ とおくと，上の式は $n \neq 0$ のときは

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} f_k p_{n-k}$$

と書けます．k が奇数のところは 0 とします．$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n$，$q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n q_n$ とおくと $n = 0$ のときに注意して

$$\begin{aligned} p(z) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} f_k p_{n-k} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{k=1}^{n} f_k p_{n-k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} z^n f_k p_{n-k} \end{aligned}$$

ここで，$n-k$ を n とおくと

$$\begin{aligned} p(z) &= 1+\sum_{k=1}^{\infty} f_k z^k \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n \\ &= 1+f(z)p(z) \end{aligned}$$

つまり

$$f(z) = 1 - \frac{1}{p(z)}$$

を得ます．一方，

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} z^{2m} p_{2m} \\ &= \sum_{m=0} z^{2m} \binom{2m}{m} p^m q^m \\ &= \sum_{m=0} z^{2m} \frac{(2m(2m-1)\cdots 2\cdot 1}{m!m!} p^m q^m \\ &= \sum_{m=0} z^{2m} 2^m \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 1}{m!} p^m q^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} z^{2m} 2^m (-2)^m \frac{(-1/2)\cdots(-1/2-(m-1))}{m!} p^m q^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-4pqz^2)^m \binom{-1/2}{m} \\ &= (1-4pqz^2)^{-1/2} \end{aligned}$$

一般の 2 項展開を用いました．これで

$$f(z) = 1 - \sqrt{1-4pqz^2}$$

ですから，この $T=2n$ の係数は

$$\begin{aligned} -\binom{1/2}{n}(-4pq)^n &= -(-4pq)^n \frac{1/2(-1/2)\cdots(1/2-n+1)}{n!} \\ &= (-2)^n (pq)^n \frac{(1(-1)(-3)\cdots(3-2n)}{n!} \\ &= 2^n (pq)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{n!} \\ &= 2(pq)^n \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} \\ &= 2(pq)^n \binom{2n-1}{n} \frac{1}{2n-1} \end{aligned}$$

となります．$f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ はいずれ原点に復帰する確率ですが，$f(1) = 1 - \sqrt{1-4pq}$ ですので，対称ランダムウォークのときだけ，$f(1) = 1$ になり，それ以外では $f(1) < 1$ になります．対称ランダムウォークのときには，必ず原点に戻ってくるというわけです (再帰性とよばれます)．では，原点に戻ってくる平均時間はいくつでしょう．

$$\sum_{n=0}^{\infty} n f_n = f'(1)$$

に注意すると

$$f'(1) = \frac{4pq}{\sqrt{1-4pq}}$$

です．つまり，対称ランダムウォークでは戻ってくる平均時間は無限大なのです．もちろん，対称でないときにも，永遠に戻ってこない確率が正ですので，戻ってくる平均時間は無限大です．

第4章　極限定理

4.1　大数の法則

定理 14 (チェビシェフ)

$$P\{\omega \in \Omega\colon |Y - E(Y)| > \varepsilon\} \leq \frac{V(Y)}{\varepsilon^2}$$

証明.

$$\begin{aligned} V(Y) &= E((Y - E(Y))^2) = \int (Y(\omega) - E(Y))^2 \, dP \\ &\leq \int_{\{\omega\in\Omega\colon |Y(\omega)-E(Y)|>\varepsilon\}} (Y(\omega) - E(Y))^2 \, dP \\ &\leq \int_{\{\omega\in\Omega\colon |Y(\omega)-E(Y)|>\varepsilon\}} \varepsilon^2 \, dP \\ &= \varepsilon^2 P\{\omega \in \Omega\colon |Y(\omega) - E(Y)| < \varepsilon\} \end{aligned}$$

□

同じことを 4 乗で行えば

$$P\{\omega \in \Omega\colon |Y - E(Y)| > \varepsilon\} \leq \frac{E[(Y - E(Y))^4]}{\varepsilon^4}$$

が出る．

定理 15 (大数の弱法則)　$X_1, X_2, \ldots$ を独立かつ同分布とする．$E(X_i) = m$, $V(X_i) = v$ とする．このとき，$\forall\varepsilon > 0$ について

$$P\{\omega \in \Omega\colon |\frac{X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)}{n} - m| > \varepsilon\} \to 0$$

証明.

$$P\{\omega \in \Omega\colon |\frac{X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)}{n} - m| > \varepsilon\} \quad \leq \quad \frac{1}{\varepsilon^2} V(\frac{X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)}{n}) = \frac{v}{n\varepsilon^2}$$

□

この収束を確率収束 (測度収束) という．

定理 16 (Schwarz)　X_1, X_2 が $E(X_1^2), E(X_2^2) < \infty$ のとき

$$|E[X_1X_2]| \leq \sqrt{E(X_1^2)E(X_2^2)}$$

証明.　まず $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ より

$$E[(X_1+X_2)^2] \leq 2(E(X_1^2)+E(X_2^2))$$

が成り立つ.

$$E[(tX_1+X_2)^2] = t^2E(X_1^2) + 2tE(X_1X_2) + E(X_2^2) \geq 0$$

判別式

$$D/4 = E(X_1X_2)^2 - E(X_1^2)E(X_2^2) \leq 0$$

□

定理 17 (大数の強法則)　$X_1, X_2, \ldots$ を独立かつ同分布とする．$E(X_i) = m$, $V(X_i) = v$ とする．

$$\frac{X_1(\omega)+\cdots+X_n(\omega)}{n} \to E(X) \quad \text{a.e.}$$

証明.　$E(|X|^4) < \infty$ を仮定した証明を述べよう．Schwarz より $E(|X)) \leq \sqrt{E(X^2)} \leq (E(X^4))^{1/4}$．また，

$$\begin{aligned} E[(X-m)^2) &\leq 2(E(X^2)+m^2) < \infty \\ E[(X-m)^4] &\leq 8(E(X^4)+m^4) < \infty \end{aligned}$$

この式は $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$ および

$$8(a^4+b^4) - (a+b)^4 = (a-b)^4 + 6(a^2-b^2)^2 \geq 0$$

から導ける．

チェビシェフを 4 乗で用いると

$$P\{\omega \in \Omega\colon \left|\frac{X_1(\omega)+\cdots+X_n(\omega)}{n} - m\right| > \varepsilon\} = P\{\omega \in \Omega\colon |X_1(\omega)+\cdots+X_n(\omega) - nm| > n\varepsilon\}$$
$$\leq \frac{E[(\sum(X_i-m))^4]}{(n\varepsilon)^4}$$

一方，独立性を使うと

$$E[(\sum(X_i-m))^4] = nE[(X_i-m)^4] + {}_4\mathrm{C}_2\frac{n(n-1)}{2}(E[(X_1-m)^2])^2 \leq \exists Cn^2$$

したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\omega \in \Omega\colon \left|\frac{X_1(\omega)+\cdots+X_n(\omega)}{n} - m\right| > \varepsilon\} \le \frac{C}{\varepsilon^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$$

Borel–Cantelli の定理より

$$\limsup_{n\to\infty}\{\omega \in \Omega\colon \left|\frac{X_1(\omega)+\cdots+X_n(\omega)}{n} - m\right| > \varepsilon\}$$

の確率は 0 に等しい．したがって，単調収束定理より

$$\begin{aligned}
&P\{\omega \in \Omega\colon \lim_{n\to\infty}\left|\frac{X_1(\omega)+\cdots+X_n(\omega)}{n} - m\right| \neq 0\} \\
&= P\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\{\omega \in \Omega\colon \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{X_1(\omega)+\cdots+X_n(\omega)}{n} - m\right| > \varepsilon\}\right) \\
&= P\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\omega \in \Omega\colon \sup_{k\ge n}\left|\frac{X_1(\omega)+\cdots+X_k(\omega)}{k} - m\right| > \varepsilon\}\right) \\
&= P\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\ge n}\{\omega \in \Omega\colon \left|\frac{X_1(\omega)+\cdots+X_k(\omega)}{k} - m\right| > \varepsilon\}\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} P\left(\limsup_{n\to\infty}\{\omega \in \Omega\colon \left|\frac{X_1(\omega)+\cdots+X_n(\omega)}{n} - m\right| > \varepsilon\}\right) = 0
\end{aligned}$$

□

4.2 Weierstrass の多項式近似定理

定理 18 (Weierstrass) $C[0,1]$ の中で多項式全体 $P[0,1]$ は一様ノルムについて稠密である．

証明.

X_i^x の値	0	1
確率	$1-x$	x

というベルヌーイ型の確率変数をとる．

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^x$$

とおく．

任意の連続関数 f に対して

$$p_n(x) = E[f(S_n/n)] = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k (1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n}) \qquad (Bernstein)$$

f は一様連続であるので，任意の $\varepsilon > 0$ について $\exists\delta > 0$ s.t. $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$ である．

$$
\begin{aligned}
|f(x) - p_n(x)| &= \left| E\left[f(x) - f(\frac{S_n}{n}) \right] \right| \\
&\leq E\left[\left| f(x) - f(\frac{S_n}{n}) \right| \right] \\
&= \int_{\{\omega:\ |S_n(\omega)/n - x| \geq \delta} |f(x) - f(\frac{S_n}{n})|\, dP \\
&\qquad + \int_{\{\omega:\ |S_n(\omega)/n - x| < \delta} |f(x) - f(\frac{S_n}{n})|\, dP \\
&\leq \max 2|f| \times P\{\omega \in \Omega\colon \left| \frac{S_n(\omega)}{n} - x \right| \geq \delta\} + \varepsilon \\
&\leq \max 2|f| \times \frac{x(1-x)}{n\delta^2} + \varepsilon \\
&\leq \frac{\max |f|}{2n\delta^2} + \varepsilon
\end{aligned}
$$

ここで，$E(X_i^x) = x, V(X_i^x) = x(1-x)$ に注意して，チェビシェフを用いた．したがって，sup norm

$$
||f - p_n|| < \frac{\max |f|}{2n\delta^2} + \varepsilon \to \varepsilon
$$

により証明を終わる． □

4.3 ポアソンの小数の法則

定理 19 X_n を 2 項分布 $B(n, p/n)$ にしたがうとする．このとき，$\lim_{n\to\infty} X_n$ はポアソン分布 $\mathrm{Po}(p)$ にしたがう．

証明． X_n のモーメント母関数は

$$
\begin{aligned}
M_{X_n}(t) &= \left(e^t \frac{p}{n} + (1 - \frac{p}{n}) \right)^n \\
&= (1 + \frac{p}{n}(e^t - 1))^n \\
&\to \exp[e^t p - p]
\end{aligned}
$$

□

4.4　Lévy の反転公式

特性関数は確率分布を定めることを，次の定理は主張しています．

定理 20 **(レビーの反転公式)**　X の特性関数を ϕ_X，確率分布を μ_X とするとき，$\mu_X([a,b]) = \mu_X((a,b))$ をみたす任意の区間 $(a,b) \subset \mathbb{R}$ について

$$\mu_X((a,b)) = \frac{1}{2\pi} \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi_X(t)\, dt$$

が成り立つ．

右辺の極限の取り方が微妙な表現ですが，この定理によって，特性関数が与えられれば確率分布が求められる，すなわち，特性関数と確率分布は 1 対 1 に対応することがわかります．

証明.

第 1 段階　$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$ を示そう．$\frac{e^{iz}}{z}$ を考えます．この関数は特異点を 0 に持つ．そこで，積分の道を r から R まで実数を動き，半径 R の円上を左回りに 180° まわり，原点に向かって戻っていって，$-r$ にぶつかったら，円の上を右回りに r に戻る道 (図 **??**) を考える．この道の中には特異点はないので，積分は 0 に等しくなる．各パートに分けて積分をみよう．

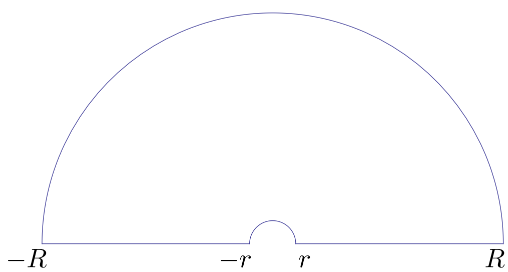

図 4.1: 積分路

(1) r から R まで

$$\int_r^R \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \int_r^R \frac{\cos x}{x}\, dx + i \int_r^R \frac{\sin x}{x}\, dx$$

(2) R から $-R$ まで，$z = Re^{i\theta}$ と変数変換して

$$\int_0^\pi \frac{e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)}}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta}\, d\theta = i\int_0^\pi e^{iR(\cos\theta+i\sin\theta)}\, d\theta = i\int_0^\pi e^{-R\sin\theta} e^{iR\cos\theta}\, d\theta$$

被積分関数は $R \to \infty$ で 0 に収束するので，積分も 0 に収束する．

(3) $-R$ から $-r$ まで

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = -\int_r^R \frac{e^{-ix}}{x}\,dx = -\int_r^R \frac{\cos x}{x}\,dx + i\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx$$

(4) $-r$ から r まで，$z = re^{i\theta}$ と変数変換して

$$\int_\pi^0 \frac{e^{ir(\cos\theta + i\sin\theta)}}{re^{i\theta}} ire^{i\theta}\,d\theta = i\int_\pi^0 e^{ir(\cos\theta+i\sin\theta)}\,d\theta$$

被積分関数は $r \to 0$ で 1 に収束するので，積分は $-\pi i$ に収束する．

以上をまとめれば

$$2i\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi i$$

を得る．このことから

$$\int_0^\infty \frac{\sin xt}{t}\,dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x < 0 \end{cases}$$

を得る．

第 2 段階

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^N \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\phi_X(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^N \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} E[e^{-it\xi}]\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}E\Big[\int_{-N}^N \frac{e^{it(\xi-a)} - e^{it(\xi-b)}}{it}\,dt\Big] \qquad \text{(Fubini)} \\
&= \int \frac{1}{2\pi}E\Big[\int_{-N}^N \frac{\sin t(\xi-a) - \sin t(\xi-b)}{t}\,dt\Big] \qquad (\cos \text{ は消える}) \\
&= \frac{1}{\pi}E\Big[\int_0^N \frac{\sin t(\xi-a) - \sin t(\xi-b)}{t}\,dt\Big]
\end{aligned}$$

第一段階より

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^N \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\phi_X(t)\,dt = \frac{1}{2}\big(\mu_X((a,b)) + \mu_X([a,b])\big)$$

で $\mu_X((a,b)) = \mu_X([a,b])$ ならば，上の式は $\mu_X((a,b))$ に収束する． □

4.5 中心極限定理

定義 1 (1) 確率分布 $\mu_k \to \mu$ とは，任意の有界な台をもつ連続関数について

$$\lim_{n\to\infty} \int f\, d\mu_k = \int f\, d\mu$$

をみたすことである．

(2) X_k が X に法則収束するとは，対応する確率分布が収束することである．

特性関数に関する定理を列挙しておこう．

定理 21 ϕ_k を確率分布 μ_k の特性関数とする．$\mu_k \to \mu_\infty$ ならば，$\phi_k \to \phi_\infty$ に広義一様収束する．

定理 22 ϕ_k を確率分布 μ_k の特性関数とする．ϕ_k が ϕ に各点収束し，ϕ が原点で連続ならば，ある確率分布 μ が存在して $\mu_k \to \mu$

定理 23 (Glivenko) ϕ_k が ϕ_∞ に各点収束するなら，$\mu_k \to \mu_\infty$

定理 24 (Lévy) ϕ_k が ϕ に各点収束し，原点の近傍で一様収束すればある確率分布 μ が存在して $\mu_k \to \mu$

定理 25 (Bochner) ϕ が

(1) $\phi(0) = 0$

(2) ϕ は原点で連続

(3) 非負定値，つまり，$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ と $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{C}$ について

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \bar{c}_j \phi(x_i - x_j) \geq 0$$

ならば，ϕ はある確率分布の特性関数である．

参考

定理 26 (Riesz's representation theorem) H を Hilbert space，$f \in H^*$ とするならば，ただ 1 つ $x \in H$ が存在して

$$f(u) = (u, x)$$

定理 27 (中心極限定理)　$X_1, X_2, \ldots$ は独立同分布で，平均 m，分布 v が存在するとき，

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{nv}} \to N(0,1)$$

証明.　$Y_n = \frac{X_n - m}{\sqrt{v}}$ とおく．

$$\begin{aligned}\phi_{(S_n-nm)/\sqrt{nv}}(t) &= \prod_{j=1}^{n} E[\exp(itY_j/\sqrt{n})] \\ &= E(\exp(itY/\sqrt{n}))^n\end{aligned}$$

一方，テイラー展開をすると

$$\exp(itY/\sqrt{n}) = 1 + it\frac{Y}{\sqrt{n}} - \frac{t^2Y^2}{2n}e^{i\theta Y/\sqrt{n}} \quad (0 < \theta < t)$$

この期待値をとると

$$E(\exp(itY/\sqrt{n})) = 1 - \frac{t^2E(Y^2)}{2n}e^{i\theta Y/\sqrt{n}}$$

これより

$$\phi_{(S_n-nm)/\sqrt{nv}}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n}e^{i\theta Y/\sqrt{n}}\right)^n$$

であるので，Lebesgue の収束定理よりこれは $e^{-t^2/2}$ に収束する．これは標準正規分布の特性関数なので証明を終わる．□

第5章　推定，検定

5.1　導入

硬貨を n 回投げたとき，表の出る回数を求める．硬貨投げを表す確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ の期待値は $\frac{1}{2}$ であるから，n 回投げたときの平均は $\frac{n}{2}$ である．したがって，その頻度の平均は $\frac{1}{2}$ である．大数の法則により，n が十分に大きければ，頻度は $\frac{1}{2}$ に近いと推定される．

そこで中心極限定理を用いると

$$P(-2 < \frac{X_1 + \cdots + X_n - n/2}{\sqrt{n/4}} < 2)$$

は概ね 95%とみなせる (より正確には -1.96 から 1.96)．これを用いて具体的な表を作ると

投げた回数	100	10000	1000000
頻度の範囲	$0.4 \sim 0.6$	$0.49 \sim 0.51$	$0.499 \sim 0.501$
表の回数の範囲	40∼60	$4900 \sim 5100$	$499000 \sim 501000$
頻度の誤差範囲	±10%	±1%	±0.1%
回数の誤差範囲	±10 回	±100 回	±1000 回

問題 65　サイコロの 1 の目は確率 $\frac{1}{6}$ で出るとする．95%の 1 の目の出る頻度の誤差の範囲が ±5% 未満になるには何回以上サイコロを投げる必要があるだろうか．

解．　サイコロの 1 の目に対応する確率変数を $X_1, X_2, \ldots$ とすると，

$$E(X_i) = \frac{1}{6}, \qquad V(X_i) = \frac{5}{36}$$

中心極限定理より

$$P(-2 < \frac{X_1 + \cdots + X_n - n/6}{\sqrt{5n/36}} < 2) \fallingdotseq 0.95$$

なので，$\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ とすると

$$P(-2 < \frac{\bar{x} - 1/6}{\sqrt{5/36n}} < 2) \fallingdotseq 0.95$$

したがって

$$\frac{P(-2\sqrt{\frac{5}{36n}} < \bar{X} - \frac{1}{6} < 2}{\sqrt{\frac{5}{36}}) \fallingdotseq 0.95}$$

求めるものは

$$2\sqrt{\frac{5}{36n}} < 0.05$$

である．解くと $n \geq 213$ □

問題 66 値 -1 と 1 をとる確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ の公平なギャンブルを考える．所持金の誤差範囲が ± 1000 を超えてしまうのは何回以上ギャンブルをしたときだろうか．

解． 対応する確率変数を $X_1, X_2, \ldots$ とすると，$E(X_i) = 0$，$V(X_i) = 1$ であるので，中心極限定理より

$$P(-2 < \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} < 2) \fallingdotseq 0.95$$

したがって

$$P(-2\sqrt{n} < X_1 + \cdots + X_n < 2\sqrt{n}) \fallingdotseq 0.95$$

求めるものは

$$2\sqrt{n} > 1000$$

なので，解は $n > 250000$ □

5.2　用語

母集団からランダムかつ独立に値を得る確率変数を $X_1, X_2, \ldots$，その結果として得る標本を $x_1, x_2, \ldots$ のように対応する小文字で表すのが習慣である．標本の平均を表す確率変数は $\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$，対応する標本平均を $\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$

で表す．以下も同様なので，標本に対応する値のみを記する．

$$
\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}) \quad (\text{標本分散}) \\
s &= \sqrt{s^2} \quad (\text{標準偏差}) \\
\hat{s}^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}) \quad (\text{不偏分散}) \\
m_\nu &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^\nu \quad (\nu\,\text{次の平均のまわりの積率 (モーメント)}) \\
m'_\nu &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^\nu \quad (\nu\,\text{次の原点のまわりの積率 (モーメント)})
\end{aligned}
$$

$m_2 = s^2$ である．とくに m_3/s^3 を歪度，$m_4/s^4 - 3$ を尖度という．

標本 $x_1, \ldots, x_n$ の真ん中の値を中央値 (メディアン) という．ヒストグラムを描いたときもっとも頻度の多い値をモードという．

2 次元の標本，$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ について，$x_1, \ldots, x_n$ と $y_1, \ldots, y_n$ の標準偏差を s_x，s_y と表すとき

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cov} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) \quad (\text{共分散}) \\
r &= \frac{\mathrm{cov}}{s_x s_y} \quad (\text{相関係数})
\end{aligned}
$$

5.2.1 母集団

統計とは母集団とよばれる集合から得られるデータにより，母集団に固有な値を推定，検定することである．母集団の平均を母平均，分散を母分散とよぶがこれらは母集団を $M = \{a_1, \ldots, a_N\}$，母平均を m，母分散を v で表すとき

$$
m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}a_i, \qquad v = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(a_i - m)^2
$$

で与えられる．

データを $x_1, \ldots, x_n$ とするとき，m の推定値として $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ を用いるのは自然だが，その根拠は何なのだろう．

データを得る前に戻ると，1 回目のデータを得る確率変数を X_1 などとするとき，X_i は各 a_j を確率 $\frac{1}{N}$ で取ることになる．すなわち，

$$
E(X_i) = \sum ji = 1^N a_j \times \frac{1}{N} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n} a_j = m
$$

である．$\bar{x}$ に対応する確率変数は $\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$ であるので，大数の法則により，$\bar{X} \to m$ であるので，データ数が多ければ，$\bar{X}$ の実現値である $\bar{x}$ は m に近いと言えることになる．

このことは，母集団というものがはっきりしない確率事象についても，例えば，硬貨投げの表の出る確率というようなものでも，X_i を表が出れば 1，裏が出れば 0 という確率変数とすれば $E(X_i)$ は表の出る確率であるので，母集団がある場合の推定，検定の理論をこのような例の場合にも使えることになる．

5.2.2　必要なこと

以下の確率変数は平均 m，分散 v とする．$X_1, X_2, \ldots$ について

$$
\begin{aligned}
\bar{X} &= \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \\
S^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \\
\hat{S}^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2
\end{aligned}
$$

$\bar{X}$ は m の不偏推定量，$\hat{S}^2$ は v の不偏推定量になる．

(1) 中心極限定理．$X_1, X_2, \ldots$ を独立，同分布とする．$P\left(a < \frac{\bar{X}-m}{\sqrt{v/n}} < b\right)$ は標準正規分布が値 (a, b) をとる確率に近づく．例えば

$$P\left(-1.96 < \frac{\bar{X}-m}{\sqrt{v/n}} < 1.96\right) \fallingdotseq 95\%$$

(2) $X_1, X_2, \ldots$ が正規分布 $\mathrm{N}(m, v)$ にしたがうなら，

$$\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{n}{v}S^2$$

は自由度 $n-1$ の χ^2 分布にしたがう．

(3) $X_1, X_2, \ldots$ が正規分布 $\mathrm{N}(m, v)$ にしたがうなら，

$$\frac{\bar{X}-m}{\sqrt{\hat{S}^2/n}} = \frac{\bar{X}-m}{\sqrt{S^2/(n-1)}}$$

は自由度 $n-1$ の t 分布にしたがう．

第6章　その他

6.1　ジニ係数

ジニ係数は、イタリアの数理統計学者のコッラド・ジニ（Corrado Gini）が1936年に考案した統計学の概念です。

ジニ係数は、統計データさえあれば簡単に計算できるために、所得格差などを分析するさいにはよく使われる指標です。

ジニ係数は０と１の間の数値となりますが、数値が大きければ大きいほど（１にちかいほど）格差が大きく、数値が小さいほど（０に近いほど)、格差が小さいことを表しています。たとえば、ジニ係数が０・２ 63から０・５７４に上昇したら、格差が拡大したことを意味します。

ジニ係数の便利な点は、所得の分配や格差の実態を一個の数値に凝縮して示せること、したがって、ジニ係数を比較して、格差の程度を比較することができることです。

しかし、ジニ係数の計算は、二重、三重に量的な平均化を積み重ねて一個の数値を算出しますから、その格差がどのような質的意味をもっているのか、その格差の原因については、なにも語らないという限界をもっています。

また、ジニ係数を算出するもとになる統計（「家計調査」など）の標本(データ）それ自体が、今日の所得格差の実態を正確に表しているかどうか、という問題もあります。

ジニ係数の算出方法は、次の手順をふんで計算すれば、それほど複雑ではありません。

(1)　対象となる集団に含まれるすべての数値間の差の絶対値を合計して、平均する（これを「平均差」という)。

(2) 全体の平均値を計算する。

(3) 平均差を全体の平均値の２倍で割る（２倍で割るのは、ジニ係数を０と１の間に収めるため)。この結果がジニ係数です。

たとえば（245万円、362万円、826万円）のジニ係数は次のようになります。

(1) 差の絶対値の平均差

$$\frac{|245-362|+|245-826|+|362-245|+|362-826|+|826-245|+|826-362|}{6}$$
$$=\frac{2324}{6}=387.3$$

(2) 平均差

$$\frac{245+362+826}{3}=\frac{1433}{3}=477.7$$

(3) ジニ係数

$$\frac{387.3}{477.7\times 2}=0.4054$$

(akahata/aik4/2006-12-28/20061228faq12_01_0.html から引用)